Problemas de 1º Bachillerato

Isaac Musat Hervás

22 de agosto de 2011

Índice general

Capítulo 1

Álgebra

1.1. Sistemas lineales de ecuaciones

Problema 1 Resolver el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} 2x- & y+ & 2z & =1 \\ x+ & y- & z & =3 \\ 3x+ & 2y+ & z & =5 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} 2x- & y+ & 2z & =1 \\ x+ & y- & z & =3 \\ 3x+ & 2y+ & z & =5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{13}{8} \\ \\ y=\dfrac{1}{2} \\ \\ z=-\dfrac{7}{8} \end{array}\right.$$

Problema 2 Discutir y resolver por el método de Gauss los siguientes sistemas:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x- & y+ & z & =1 \\ 2x+ & y- & 2z & =2 \\ x+ & 2y- & 3z & =1 \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y+ & z & =1 \\ 2x+ & y- & z & =2 \\ 2x+ & & z & =3 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x- & y+ & z & =1 \\ 2x+ & y- & 2z & =2 \\ x+ & 2y- & 3z & =1 \end{array}\right. \text{ Sistema Compatible Indeterminado} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1+\frac{1}{3}z \\ y=\frac{4}{3}z \\ z=z \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y+ & z & =1 \\ 2x+ & y- & z & =2 \\ x+ & & z & =3 \end{array}\right. \text{ Sistema Compatible Determinado} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=7/5 \\ y=-3/5 \\ z=1/5 \end{array}\right.$$

Problema 3 Resolver y discutir los siguientes sistemas:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & y+ & z=1\\ 3x+ & y- & z=2\\ 2x+ & 2y- & 2z=1 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rrr} x+ & y+ & z=4\\ x- & y+ & z=2\\ 3x+ & y- & z=1 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & y+ & z=1\\ 3x+ & y- & z=2\\ 2x+ & 2y- & 2z=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3/4\\ y=-1/4+z\\ z=z \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & y+ & z=4\\ x- & y+ & z=2\\ 3x+ & y- & z=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3/4\\ y=1\\ z=9/4 \end{array}\right.$$

Problema 4 Discutir y resolver por el método de Gauss los siguientes sistemas:

$$\left\{\begin{array}{rrr} 3x- & y- & z=1\\ x+ & y+ & z=2\\ 2x- & 2y- & 2z=-1 \end{array}\right. ; \left\{\begin{array}{rrr} x+ & y- & z=1\\ 3x- & y+ & z=0\\ x+ & y- & 2z=1 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrr} 3x- & y- & z=1\\ x+ & y+ & z=2\\ 2x- & 2y- & 2z=-1 \end{array}\right. \text{Sistema Compatible Indeterminado} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3/4\\ y=5/4-z\\ z=z \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & y- & z=1\\ 3x- & y+ & z=0\\ x+ & y- & 2z=1 \end{array}\right. \text{Sistema Compatible Determinado} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1/4\\ y=3/4\\ z=0 \end{array}\right.$$

Problema 5 Discutir y resolver por el método de Gauss los siguientes sistemas:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & 2y- & z=1\\ 2x- & y- & z=0\\ 3x+ & y+ & 2z=2 \end{array}\right. ; \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y & + & z=1\\ x+ & 2y & - & z=2\\ 2x+ & 3y & & =4 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & 2y- & z=1\\ 2x- & y- & z=0\\ 3x+ & y+ & 2z=2 \end{array}\right. \text{Sistema Compatible Determinado} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=7/20\\ y=9/20\\ z=1/4 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y & + & z=1\\ x+ & 2y & - & z=2\\ 2x+ & 3y & & =4 \end{array}\right. \text{Sistema Incompatible}$$

Problema 6 Discutir y resolver por el método de Gauss los siguientes sistemas:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} 2x- & 2y- & 2z & =-1 \\ 3x- & y- & z & =1 \\ x+ & y+ & z & =2 \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y- & 2z & =1 \\ 3x- & y+ & z & =0 \\ x+ & y- & z & =1 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} 2x- & 2y- & 2z & =-1 \\ 3x- & y- & z & =1 \\ x+ & y+ & z & =2 \end{array}\right. \text{ Sistema Compatible Indeterminado} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3/4 \\ y=5/4-z \\ z=z \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y- & 2z & =1 \\ 3x- & y+ & z & =0 \\ x+ & y- & z & =1 \end{array}\right. \text{ Sistema Compatible Determinado} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1/4 \\ y=3/4 \\ z=0 \end{array}\right.$$

Problema 7 Discutir y resolver por el método de Gauss los siguientes sistemas:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} 2x- & y- & z & =0 \\ x+ & 2y- & z & =1 \\ 3x+ & y+ & 2z & =2 \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{rrrrl} 2x+ & 3y & & & =4 \\ x+ & 2y & - & z & =2 \\ x+ & y & + & z & =1 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} 2x- & y- & z & =0 \\ x+ & 2y- & z & =1 \\ 3x+ & y+ & 2z & =2 \end{array}\right. \text{ Sistema Compatible Determinado} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=7/20 \\ y=9/20 \\ z=1/4 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} 2x+ & 3y & & & =4 \\ x+ & 2y & - & z & =2 \\ x+ & y & + & z & =1 \end{array}\right. \text{ Sistema Incompatible}$$

Problema 8 Discutir y resolver por el método de Gauss los siguientes sistemas:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & 2y- & z & =1 \\ x- & 8y+ & 5z & =1 \\ 2x- & y+ & z & =2 \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{rrrrl} x+ & y & + & z & =2 \\ 2x- & y & - & z & =1 \\ 3x+ & y & - & z & =4 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & 2y- & z & =1 \\ x- & 8y+ & 5z & =1 \\ 2x- & y+ & z & =2 \end{array}\right. \text{ Sistema Compatible Indeterminado} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1-\frac{1}{5}\lambda \\ y=\frac{3}{5}\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x+ & y & + & z & =2 \\ 2x- & y & - & z & =1 \\ 3x+ & y & - & z & =4 \end{array}\right. \text{ Sistema Compatible Determinado} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=1 \\ z=0 \end{array}\right.$$

Problema 9 Discutir y resolver por el método de Gauss los siguientes sistemas:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x- & y+ & 2z = & 1 \\ x- & & z = & 2 \\ x- & 2y+ & 7z = & -4 \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y & -z & = 0 \\ 2x+ & y & & = 2 \\ x+ & 2y & +z & = 1 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x- & y+ & 2z = & 1 \\ x- & & z = & 2 \\ x- & 2y+ & 7z = & -4 \end{array}\right. \text{Sistema Compatible Indeterminado} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2+\lambda \\ y = 3+4\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y & -z & = 0 \\ 2x+ & y & & = 2 \\ x+ & 2y & +z & = 1 \end{array}\right. \text{Sistema Compatible Determinado} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 5/4 \\ y = -1/2 \\ z = 3/4 \end{array}\right.$$

Problema 10 Discutir y resolver por el método de Gauss los siguientes sistemas:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x- & y+ & 2z = & 1 \\ x- & & z = & 2 \\ x- & 2y+ & 7z = & -4 \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y & -z & = 0 \\ 2x+ & y & & = 2 \\ x+ & 2y & +z & = 1 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x- & y+ & 2z = & 1 \\ x- & & z = & 2 \\ x- & 2y+ & 7z = & -4 \end{array}\right. \text{Sistema Compatible Indeterminado} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2+\lambda \\ y = 3+4\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y & -z & = 0 \\ 2x+ & y & & = 2 \\ x+ & 2y & +z & = 1 \end{array}\right. \text{Sistema Compatible Determinado} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 5/4 \\ y = -1/2 \\ z = 3/4 \end{array}\right.$$

Problema 11 Discutir y resolver por el método de Gauss los siguientes sistemas:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & y+ & z = 1 \\ 2x+ & & z = 1 \\ x+ & 3y- & z = 5 \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{rrrl} x- & y- & z & = 2 \\ 2x+ & y- & z & = 1 \\ x- & y+ & 2z & = 3 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & y+ & z = 1 \\ 2x+ & & z = 1 \\ x+ & 3y- & z = 5 \end{array}\right. \text{Sistema Incompatible} \Longrightarrow \text{No Tiene Solución}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x- & y- & z & = 2 \\ 2x+ & y- & z & = 1 \\ x- & y+ & 2z & = 3 \end{array}\right. \text{Sistema Compatible Determinado} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 11/9 \\ y = -10/9 \\ z = 1/3 \end{array}\right.$$

Problema 12 Discutir y resolver por el método de Gauss los siguientes sistemas:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & 2y+ & z=1 \\ 2x+ & y- & 2z=2 \\ 3x- & y- & z=3 \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{rrr} x+ & y+ & z=2 \\ 2x- & y- & z=1 \\ x+ & y- & 2z=0 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & 2y+ & z=1 \\ 2x+ & y- & 2z=2 \\ 3x- & y- & z=3 \end{array}\right. \text{ Sistema Compatible Indeterminado} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1+3/5\lambda \\ y=4/5\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & y+ & z=2 \\ 2x- & y- & z=1 \\ x+ & y- & 2z=0 \end{array}\right. \text{ Sistema Compatible Determinado} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=1/3 \\ z=2/3 \end{array}\right.$$

Problema 13 Discutir y resolver por el método de Gauss los siguientes sistemas:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & y- & z=0 \\ 2x+ & y+ & z=4 \\ 3x- & y+ & z=3 \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{rrr} x+ & y+ & z=1 \\ 3x- & 2y- & 2z=3 \\ 4x- & y- & z=8 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & y- & z=0 \\ 2x+ & y+ & z=4 \\ 3x- & y+ & z=3 \end{array}\right. \text{ Sistema Compatible Determinado} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=4/3 \\ y=7/6 \\ z=1/6 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & y+ & z=1 \\ 3x- & 2y- & 2z=3 \\ 4x- & y- & z=8 \end{array}\right. \text{ Sistema Incompatible}$$

Problema 14 Discutir y resolver por el método de Gauss los siguientes sistemas:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & y+ & z=5 \\ x- & 3y+ & z=4 \\ 2x+ & y- & z=2 \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{rrr} x+ & y- & z=3 \\ 3x+ & y- & 2z=5 \\ 2x- & & z=2 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & y+ & z=5 \\ x- & 3y+ & z=4 \\ 2x+ & y- & z=2 \end{array}\right. \text{ Sistema Compatible Determinado} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=13/6 \\ y=1/4 \\ z=31/12 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y- & z & = 3 \\ 3x+ & y- & 2z & = 5 \\ 2x- & & z & = 2 \end{array}\right. \text{ Sistema Compatible Indeterminado} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 + \dfrac{1}{2}\lambda \\ \\ y = 2 + \dfrac{1}{2}\lambda \\ \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 15 Discutir y resolver por el método de Gauss los siguientes sistemas:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & 2y- & z & = -1 \\ x- & y & & = 1 \\ 2x+ & y- & z & = 0 \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y+ & z & = 3 \\ x- & y+ & 2z & = 2 \\ 2x+ & y- & z & = 4 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & 2y- & z & = -1 \\ x- & y & & = 1 \\ 2x+ & y- & z & = 0 \end{array}\right. \text{ Sistema Compatible Indeterminado} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1/3 + 1/3\lambda \\ y = -2/3 + 1/3\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y+ & z & = 3 \\ x- & y+ & 2z & = 2 \\ 2x+ & y- & z & = 4 \end{array}\right. \text{ Sistema Compatible Determinado} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 13/7 \\ y = 5/7 \\ z = 3/7 \end{array}\right.$$

Problema 16 Discutir y resolver por el método de Gauss los siguientes sistemas:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x- & y- & z & = 0 \\ 2x+ & y- & z & = 2 \\ x- & 2y+ & z & = 3 \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y+ & z & = 2 \\ 3x- & y+ & 2z & = 3 \\ 2x- & 2y+ & z & = 7 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x- & y- & z & = 0 \\ 2x+ & y- & z & = 2 \\ x- & 2y+ & z & = 3 \end{array}\right. \text{ Sistema Compatible Determinado} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 12/7 \\ y = 1/7 \\ z = 11/7 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y+ & z & = 2 \\ 3x- & y+ & 2z & = 3 \\ 2x- & 2y+ & z & = 7 \end{array}\right. \text{ Sistema Incompatible}$$

Problema 17 Discutir y resolver por el método de Gauss los siguientes sistemas:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} 3x- & y- & z & = 1 \\ x+ & y+ & z & = 2 \\ 2x- & 2y- & 2z & = -1 \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y- & z & = 1 \\ 3x- & y+ & z & = 0 \\ x+ & y- & 2z & = 1 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} 3x- & y- & z & = 1 \\ x+ & y+ & z & = 2 \\ 2x- & 2y- & 2z & = -1 \end{array}\right. \text{ Sistema Compatible Indeterminado} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3/4 \\ y = 5/4 - z \\ z = z \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y- & z & = 1 \\ 3x- & y+ & z & = 0 \\ x+ & y- & 2z & = 1 \end{array}\right. \text{ Sistema Compatible Determinado} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1/4 \\ y = 3/4 \\ z = 0 \end{array}\right.$$

Problema 18 Discutir y resolver por el método de Gauss los siguientes sistemas:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & 2y- & z & = 1 \\ 2x- & y- & z & = 0 \\ 3x+ & y+ & 2z & = 2 \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{rrrrl} x+ & y & + & z & = 1 \\ x+ & 2y & - & z & = 2 \\ 2x+ & 3y & & & = 4 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & 2y- & z & = 1 \\ 2x- & y- & z & = 0 \\ 3x+ & y+ & 2z & = 2 \end{array}\right. \text{ Sistema Compatible Determinado} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 7/20 \\ y = 9/20 \\ z = 1/4 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x+ & y & + & z & = 1 \\ x+ & 2y & - & z & = 2 \\ 2x+ & 3y & & & = 4 \end{array}\right. \text{ Sistema Incompatible}$$

Problema 19 Discutir y resolver por el método de Gauss los siguientes sistemas:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x- & y & & = 2 \\ -x+ & 2y+ & 3z & = -1 \\ x+ & y+ & 6z & = 4 \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{rrrl} x- & 2y+ & z & = 1 \\ & y- & z & = 1 \\ 3x+ & 2y+ & z & = -1 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x- & y & & = 2 \\ -x+ & 2y+ & 3z & = -1 \\ x+ & y+ & 6z & = 4 \end{array}\right. \text{ Sistema Compatible Indeterminado} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 - 3\lambda \\ y = 1 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x- & 2y+ & z & = 1 \\ & y- & z & = 1 \\ 3x+ & 2y+ & z & = -1 \end{array}\right. \text{ Sistema Compatible Determinado} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 \\ z = -2 \end{array}\right.$$

Problema 20 Discutir y resolver por el método de Gauss los siguientes sistemas:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x- & y & & = 2 \\ -x+ & 2y+ & 3z & = -1 \\ x+ & y+ & 6z & = 4 \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{rrrl} x- & 2y+ & z & = 1 \\ & y- & z & = 1 \\ 3x+ & 2y+ & z & = -1 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x- & y & & =2\\ -x+ & 2y+ & 3z & =-1\\ x+ & y+ & 6z & =4 \end{array}\right. \text{Sistema Compatible Indeterminado} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3-3\lambda\\ y=1-3\lambda\\ z=\lambda \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x- & 2y+ & z & =1\\ & y- & z & =1\\ 3x+ & 2y+ & z & =-1 \end{array}\right. \text{Sistema Compatible Determinado} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1\\ y=-1\\ z=-2 \end{array}\right.$$

Problema 21 Discutir y resolver por el método de Gauss los siguientes sistemas:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & 6\\ x & - & 2z= & -5\\ 2x- & y+ & 2z= & 6 \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y- & z & =2\\ 2x- & y+ & z & =0\\ x- & 5y+ & 5z & =1 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z= & 6\\ x & - & 2z= & -5\\ 2x- & y+ & 2z= & 6 \end{array}\right. \text{Sistema Compatible Determinado} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1\\ y=2\\ z=3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y- & z & =1\\ 3x- & y+ & z & =0\\ x+ & y- & 2z & =1 \end{array}\right. \text{Sistema Incompatible}$$

Problema 22 Discutir y resolver por el método de Gauss los siguientes sistemas:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 3y- & z= & 0\\ 2x+ & y+ & 4z= & 1\\ & 5y- & 6z= & -1 \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 3z= & 2\\ 2x- & y+ & 2z= & -1\\ 3x+ & 2y+ & 7z= & 5 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 3y- & z= & 0\\ 2x+ & y+ & 4z= & 1\\ & 5y- & 6z= & -1 \end{array}\right. \text{Sistema Compatible Indeterminado} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3/5-13/5\lambda\\ y=-1/5+6/5\lambda\\ z=\lambda \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 3z= & 2\\ 2x- & y+ & 2z= & -1\\ 3x+ & 2y+ & 7z= & 5 \end{array}\right. \text{Sistema Compatible Determinado} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2\\ y=3\\ z=-1 \end{array}\right.$$

Problema 23 Discutir y resolver por el método de Gauss los siguientes sistemas:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & y- & 2z= & 5\\ x- & y- & 2z= & 0\\ 3x- & 2y- & 3z= & 4 \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{rrrr} x- & y+ & z= & 2\\ 2x+ & y- & 4z= & -1\\ -4x- & 5y+ & 14z= & 9 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & y- & 2z= & 5\\ x- & y- & 2z= & 0\\ 3x- & 2y- & 3z= & 4 \end{array}\right. \text{ Sistema Compatible Determinado} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3\\ y=1\\ z=1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & y+ & z= & 2\\ 2x+ & y- & 4z= & -1\\ -4x- & 5y+ & 14z= & 9 \end{array}\right. \text{ Sistema Incompatible}$$

Problema 24 Discutir y resolver por el método de Gauss los siguientes sistemas:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & 2y+ & z=1\\ 2x+ & y- & 2z=2\\ 3x- & y- & z=3 \end{array}\right. ; \left\{\begin{array}{rrr} x+ & y+ & z=2\\ 2x- & y- & z=1\\ x+ & y- & 2z=0 \end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & 2y+ & z=1\\ 2x+ & y- & 2z=2\\ 3x- & y- & z=3 \end{array}\right. \text{ Sistema Compatible Indeterminado} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1+3/5\lambda\\ y=4/5\lambda\\ z=\lambda \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & y+ & z=2\\ 2x- & y- & z=1\\ x+ & y- & 2z=0 \end{array}\right. \text{ Sistema Compatible Determinado} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1\\ y=1/3\\ z=2/3 \end{array}\right.$$

1.2. Logaritmos y exponenciales

Problema 25 Calcular:

1. $\log(x^2+2)-\log x = 1$
2. $4^{x-1}+2^x-1=0$

Solución:

1. $\log(x^2+2)-\log x = 1 \Longrightarrow x = 0,2041684766, \quad x = 9,795831523$
2. $4^{x-1}+2^x-1=0 \Longrightarrow x = -0,2715533031$

Problema 26 Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales:

1. $3\cdot 2^{2x-1}-2^{x+1}-2=0$
2. $3^{x+2}-3^{x+1}-1=0$

Solución:

1. $3\cdot 2^{2x-1}-2^{x+1}-2=0 \Longrightarrow x=1$
2. $3^{x+2}-3^{x+1}-1=0 \Longrightarrow x = x = -1,630929753$

Problema 27 Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales:

1. $3\cdot 2^{2x+2}-2^{x+1}-6=0$
2. $5^{x-1}-5^{x+1}+1=0$

Solución:

1. $3\cdot 2^{2x+2}-2^{x+1}-6=0 \Longrightarrow x = -0,3303678915$
2. $5^{x-1}-5^{x+1}+1=0 \Longrightarrow x = -0,9746358686$

Problema 28 Resolver las ecuaciones:

1. $\ln(1-x)-\ln x = 1$
2. $\log(5-x^2)-\log x = 1+\log(x+1)$
3. $\log x - \log(x^2-2) = 1-\log x$

Solución:

1. $\ln(1-x)-\ln x = 1 \Longrightarrow \ln\dfrac{(1-x)}{x} = \ln e \Longrightarrow$

   $1-x = ex \Longrightarrow x = \dfrac{1}{e+1} = 0,2689414213.$

2. $\log(5-x^2)-\log x = 1+\log(x+1) \Longrightarrow \log\dfrac{5-x^2}{x} = \log 10(x+1) \Longrightarrow$ $11x^2+10x-5=0 \Longrightarrow x = 0{,}3585701736,\ x=-1{,}267661082$(no vale).

3. $\log x - \log(x^2-2) = 1-\log x \Longrightarrow \log\dfrac{x^2}{x^2-2} = \log 10 \Longrightarrow 9x^2 = 20 \Longrightarrow x = 1,490711984;\ x=-1,490711984$(no vale).

Problema 29 Resolver las ecuaciones:

1. $\ln x - \ln(1-x) = 1$
2. $\log(7-x^2)-\log x = 1$
3. $\log(2x+3)+\log x = -1$

Solución:

1. $\ln x - \ln(1-x) = 1 \Longrightarrow \ln\dfrac{x}{(1-x)} = \ln e \Longrightarrow$

   $x = e - ex \Longrightarrow x = \dfrac{e}{e+1} = 0,7310585786.$

2. $\log(7-x^2)-\log x = 1 \Longrightarrow \log\dfrac{7-x^2}{x} = \log 10 \Longrightarrow x^2+10x-7 = 0 \Longrightarrow x = 0,6568542494,\ x=-10,65685424$ (no vale).

3. $\log(2x+3)+\log x = -1 \Longrightarrow \log(2x^2+3x) = \log 10^{-1} \Longrightarrow 20x^2 + 30x-1=0 \Longrightarrow x = 0,03262379212;\ x=-1,532623792$(no vale).

Problema 30 Resolver las ecuaciones:

1. $\log(x+1)-\log x = 1$
2. $\log(x+3)+\log x = -1$
3. $\log(3-x^2)-\log(2x) = 1$

Solución:

1. $\log(x+1)-\log x = 1 \Longrightarrow \log\dfrac{(x+1)}{x} = \log 10 \Longrightarrow$

   $x = \dfrac{1}{9}.$

2. $\log(x+3)+\log x = -1 \Longrightarrow \log x(x+3) = \log 10 \Longrightarrow 10x^2+30x-1 = 0 \Longrightarrow x = 0{,}329,\ x=-30$(no vale).

3. $\log(3-x^2)-\log(2x)=1 \Longrightarrow \log\dfrac{3-x^2}{2x}=\log 10 \Longrightarrow x^2+20x-3=0 \Longrightarrow x=0,149;\ x=-20$(no vale).

Problema 31 Resolver las ecuaciones:

1. $\log x-\log(x-3)=\log(2x)$
2. $\log x-\log(x-1)=2$
3. $\log(2+x^2)-\log x=1$

Solución:

1. $\log x-\log(x-3)=\log(2x) \Longrightarrow \log\dfrac{x}{x-3}=\log(2x) \Longrightarrow x^2-5x=0 \Longrightarrow x=7/2$.
2. $\log x-\log(x-1)=2 \Longrightarrow \log\dfrac{x}{x-1}=\log 100 \Longrightarrow x=\dfrac{100}{99}$.
3. $\log(2+x^2)-\log x=1 \Longrightarrow \log\dfrac{2+x^2}{x}=\log 10 \Longrightarrow x^2-10x+2=0 \Longrightarrow x=9,795;\ x=0,205$.

Problema 32 Resolver las ecuaciones:

1. $\log x^2-\log(x+1)=1+\log(x-1)$
2. $\log(3x+5)-\log x=2$
3. $\log(x+1)+\log(x-1)=\log(25x)-2$

Solución:

1. $\log x^2-\log(x+1)=1+\log(x-1) \Longrightarrow \log\dfrac{x^2}{x+1}=\log 10(x-1) \Longrightarrow x^2-10(x^2-1)=0 \Longrightarrow x=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$.
2. $\log(3x+5)-\log x=2 \Longrightarrow \log\dfrac{3x+5}{x}=\log 100 \Longrightarrow x=\dfrac{5}{97}$.
3. $\log(x+1)+\log(x-1)=\log(25x)-2 \Longrightarrow \log(x^2-1)=\log\dfrac{25x}{100} \Longrightarrow 4x^2-x-4=0 \Longrightarrow x=1,133;\ x=-0,883$.

Problema 33 Resolver las ecuaciones:

1. $\log(x+1)^2 - \log x = 1 + \log(2x)$
2. $\log(2x+1) - \log x = 3$
3. $\log(x+1) + \log(x-1) = 2 + \log x$

Solución:

1. $\log(x+1)^2 - \log x = 1 + \log(2x) \Longrightarrow \log \dfrac{(x+1)^2}{x} = \log 20x \Longrightarrow$

   $x = 0,288$ y $x = -0,1827$ que no vale.
2. $\log(2x+1) - \log x = 3 \Longrightarrow \log \dfrac{2x+1}{x} = \log 1000 \Longrightarrow x = \dfrac{1}{998}$.
3. $\log(x+1) + \log(x-1) = 2 + \log x \Longrightarrow \log(x^2-1) = \log(100x) \Longrightarrow x^2 - 100x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 100,01;\ x = -0,01$(no vale).

Problema 34 Resolver las ecuaciones:

1. $\log(x+3) + \log x = 2\log(x+1)$
2. $\log(4x+1) + \log(2x) = 2$
3. $\log(3x-1) - \log(x+2) = 1 + \log x$

Solución:

1. $\log(x+3) + \log x = 2\log(x+1) \Longrightarrow \log(x^2+3x) = \log(x+1)^2 \Longrightarrow$

   $x = 1$.
2. $\log(4x+1) + \log(2x) = 2 \Longrightarrow \log(8x^2+2x) = \log 100 \Longrightarrow x = 3,413,\ \ x = -3,663$(no vale).
3. $\log(3x-1) - \log(x+2) = 1 + \log x \Longrightarrow \log \dfrac{3x-1}{x+2} = \log(10x) \Longrightarrow 19x^2 + 17x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -0,061$ (no vale); $x = -1,639$(no vale).

Problema 35 Resolver las ecuaciones:

1. $\log(3x-1) + \log(x-1) = 1 + \log x$
2. $\log(4x+3) - \log x = 1$

3. $\log(x-2) - \log(x+3) = 1 + \log x$

Solución:

1. $\log(3x-1)+\log(x-1) = 1+\log x \Longrightarrow \log(3x^2-x-3x+1) = \log 10x \Longrightarrow$

   $3x^2 - 14x + 1 = 0 \Longrightarrow x = 0,0726$(No vale) y $x = 4,594$.

2. $\log(4x+3) - \log x = 1 \Longrightarrow \log \dfrac{4x+3}{x} = \log 10 \Longrightarrow 4x+3 = 10x \Longrightarrow$ $x = \dfrac{1}{2}$.

3. $\log(x-2) - \log(x+3) = 1 + \log x \Longrightarrow \log \dfrac{x-2}{x+3} = \log(10x) \Longrightarrow$ $10x^2 + 29x + 2 = 0 \Longrightarrow x = -0,07;\ x = -2,83$(no vale ninguna de las dos).

Problema 36 Resolver las ecuaciones:

1. $\ln(1-x) - \ln x = 1$
2. $\log(5-x^2) - \log x = 1 + \log(x+1)$
3. $\log x - \log(x^2-2) = 1 - \log x$

Solución:

1. $\ln(1-x) - \ln x = 1 \Longrightarrow \ln \dfrac{(1-x)}{x} = \ln e \Longrightarrow$

   $1 - x = ex \Longrightarrow x = \dfrac{1}{e+1} = 0,2689414213$.

2. $\log(5-x^2) - \log x = 1 + \log(x+1) \Longrightarrow \log \dfrac{5-x^2}{x} = \log 10(x+1) \Longrightarrow$ $11x^2 + 10x - 5 = 0 \Longrightarrow x = 0{,}3585701736,\ x = -1{,}267661082$(no vale).

3. $\log x - \log(x^2-2) = 1 - \log x \Longrightarrow \log \dfrac{x^2}{x^2-2} = \log 10 \Longrightarrow 9x^2 = 20 \Longrightarrow x = 1,490711984;\ x = -1,490711984$(no vale).

Problema 37 Resolver las ecuaciones:

1. $\ln x - \ln(1-x) = 1$
2. $\log(7-x^2) - \log x = 1$

3. $\log(2x+3) + \log x = -1$

Solución:

1. $\ln x - \ln(1-x) = 1 \Longrightarrow \ln \dfrac{x}{(1-x)} = \ln e \Longrightarrow$

   $x = e - ex \Longrightarrow x = \dfrac{e}{e+1} = 0,7310585786.$

2. $\log(7-x^2) - \log x = 1 \Longrightarrow \log \dfrac{7-x^2}{x} = \log 10 \Longrightarrow x^2 + 10x - 7 = 0 \Longrightarrow x = 0,6568542494, \quad x = -10,65685424$ (no vale).

3. $\log(2x+3) + \log x = -1 \Longrightarrow \log(2x^2+3x) = \log 10^{-1} \Longrightarrow 20x^2 + 30x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 0,03262379212;\ x = -1,532623792$(no vale).

Problema 38 Resolver las ecuaciones:

1. $\log(2-x) - \log(x-1) = 2$
2. $\log(3-x^2) - \log x = 1 + \log(x+2)$
3. $4^{x^2-1} \cdot 2^{x+5} = 32^{x+1}$
4. $4^{x-2} - 2^{x+1} - 3 = 0$

Solución:

1. $\log(2-x) - \log(x-1) = 2 \Longrightarrow \ln \dfrac{2-x}{x-1} = \log 100 \Longrightarrow$

   $101x = 102 \Longrightarrow x = \dfrac{102}{101}.$

2. $\log(3-x^2) - \log x = 1 + \log(x+2) \Longrightarrow \log \dfrac{3-x^2}{x} = \log 10(x+2) \Longrightarrow 11x^2 + 20x - 3 = 0 \Longrightarrow x = 0,139, \quad x = -1,958$(no vale).

3. $$4^{x^2-1} \cdot 2^{x+5} = 32^{x+1} \Longrightarrow x^2 - 4x - 2 = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2,4142 \\ x = -0,414 \end{array} \right.$$

4. $$4^{x-2} - 2^{x+1} - 3 = 0 \Longrightarrow t^2 - 32t - 48 = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t = 33,435 \Longrightarrow x = 5,063 \\ t = -1,435 \ \text{ no vale} \end{array} \right.$$

Problema 39 Resolver las ecuaciones:

1. $\log(5-x) - \log(x+1) = 2$
2. $\log(5-x^2) - \log x = 1 + \log(x-1)$
3. $2\log(3-x) - 1 = \log x$
4. $2^{x^2-1} \cdot 4^{x-5} = 32^{x+1}$
5. $9^{x-1} - 3^{x+1} - 3 = 0$

Solución:

1. $\log(5-x) - \log(x+1) = 2 \Longrightarrow \log \dfrac{5-x}{x+1} = \log 100 \Longrightarrow$

   $101x = -95 \Longrightarrow x = -\dfrac{95}{101}$.

2. $\log(5-x^2) - \log x = 1 + \log(x-1) \Longrightarrow \log \dfrac{5-x^2}{x} = \log 10(x-1) \Longrightarrow$ $11x^2 - 10x - 5 = 0 \Longrightarrow x = 1,267661082,\ \ x = -0{,}3585701736$(no vale).

3. $2\log(3-x) - 1 = \log x \Longrightarrow x^2 - 16x + 9 = 0 \Longrightarrow x = 0,584,\ \ x = 15,416$(no vale).

4. $$2^{x^2-1} \cdot 4^{x-5} = 32^{x+1} \Longrightarrow x^2 - 3x - 16 = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 5,772001872 \\ x = -2,772001872 \end{array} \right.$$

5. $$9^{x-1} - 3^{x+1} - 3 = 0 \Longrightarrow t^2 - 27t - 27 = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t = 27,96547614 \Longrightarrow x = 3,031980243 \\ t = -0,9654761414 \ \text{ no vale} \end{array} \right.$$

Problema 40 Resolver las ecuaciones:

1. $\log(x+1)^2 - \log x = 1 + \log(2x)$
2. $\log(2x+1) - \log x = 3$
3. $\log(x+1) + \log(x-1) = 2 + \log x$
4. $3^{x^2-1} \cdot 9^{x-5} = 27^{x+1}$
5. $3^{2x-1} + 3^{x+1} - 1 = 0$

Solución:

1. $\log(x+1)^2 - \log x = 1 + \log(2x) \Longrightarrow \log\dfrac{(x+1)^2}{x} = \log 20x \Longrightarrow$

   $x = 0,288$ y $x = -0,1827$ que no vale.

2. $\log(2x+1) - \log x = 3 \Longrightarrow \log\dfrac{2x+1}{x} = \log 1000 \Longrightarrow x = \dfrac{1}{998}$.

3. $\log(x+1) + \log(x-1) = 2 + \log x \Longrightarrow \log(x^2-1) = \log(100x) \Longrightarrow$ $x^2 - 100x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 100,01;\ x = -0,01$(no vale).

4. $3^{x^2-1} \cdot 9^{x-5} = 27^{x+1} \Longrightarrow x^2 - x - 14 = 0 \Longrightarrow x = 4,274917217$ y $x = -3,274917217$

5.

$$3^{2x-1} + 3^{x+1} - 1 = 0 \Longrightarrow \frac{t^2}{3} + 3t - 1 = 0 \Longrightarrow$$

$t = 3^x = -9,321825380$ No Vale y $t = 3^x = 0,3218253804 \Longrightarrow x = -1,031980243$

1.3. Inecuaciones

Problema 41 Resolver las siguientes inecuaciones:

$$\frac{x^2-2x-15}{x-1} \le 0, \quad \frac{x-1}{x^2+3x+2} \ge 0$$

Solución:

$$\frac{x^2-2x-15}{x-1} \le 0 \Longrightarrow (-\infty,-3] \cup (1,5]$$

$$\frac{x-1}{x^2+3x+2} \ge 0 \Longrightarrow (-2,-1) \cup [1,\infty)$$

Problema 42 Resolver las inecuaciones siguientes:

1. $\dfrac{3x-1}{2} - \dfrac{x}{3} \ge 1 - \dfrac{x}{2}$
2. $\dfrac{x^2-2x-15}{x^2+x-2} \le 0$

Solución:

1. $\dfrac{3x-1}{2} - \dfrac{x}{3} \ge 1 - \dfrac{x}{2} \Longrightarrow \left[\dfrac{9}{10}, +\infty\right)$
2. $\dfrac{x^2-2x-15}{x^2+x-2} \le 0 \Longrightarrow [-3,-2) \cup (1,5]$

Problema 43 Resolver las inecuaciones siguientes:

1. $\dfrac{2x-1}{3} + \dfrac{x+1}{2} \ge 1 - \dfrac{x}{2}$
2. $\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-15} \le 0$

Solución:

1. $\dfrac{2x-1}{3} + \dfrac{x+1}{2} \ge 1 - \dfrac{x}{2} \Longrightarrow \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$
2. $\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-15} \le 0 \Longrightarrow (-5,-2] \cup [1,3)$

Problema 44 Resolver las inecuaciones siguientes:

1. $\dfrac{x}{2} - \dfrac{2x+1}{6} \le \dfrac{x-1}{3}$
2. $\dfrac{x^2-x-2}{x^2+2x-3} \le 0$

Solución:

1. $\dfrac{x}{2}-\dfrac{2x+1}{6}\leq\dfrac{x-1}{3}\Longrightarrow[1,+\infty)$

2. $\dfrac{x^2-x-2}{x^2+2x-3}\leq 0\Longrightarrow(-3,-1]\cup(1,2]$

Problema 45 Resolver las inecuaciones siguientes:

1. $\dfrac{x-1}{5}-\dfrac{x}{10}\leq\dfrac{x+3}{2}$

2. $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2+x-2}\geq 0$

Solución:

1. $\dfrac{x-1}{5}-\dfrac{x}{10}\leq\dfrac{x+3}{2}\Longrightarrow\left[-\dfrac{17}{4},+\infty\right)$

2. $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2+x-2}\geq 0\Longrightarrow(-\infty,-2)\cup[-1,1)\cup[3,\infty)$

Problema 46 Resolver las inecuaciones siguientes:

1. $\dfrac{x+1}{3}-\dfrac{x+2}{8}\leq 1-\dfrac{x}{12}$

2. $\dfrac{x^2-2x-35}{x^2+x-6}\geq 0$

Solución:

1. $\dfrac{x+1}{3}-\dfrac{x+2}{8}\leq 1-\dfrac{x}{12}\Longrightarrow\left[-\infty,\dfrac{22}{7}\right]$

2. $\dfrac{x^2-2x-35}{x^2+x-6}\geq 0\Longrightarrow(-\infty,-5]\cup(-3,2)\cup[7,\infty)$

Problema 47 Resolver las inecuaciones siguientes:

1. $\dfrac{3x+1}{2}-\dfrac{x}{3}\leq 1+\dfrac{x-1}{8}$

2. $\dfrac{x^2-2x-3}{x+5}\leq 0$

Solución:

1. $\dfrac{3x+1}{2}-\dfrac{x}{3}\leq 1+\dfrac{x-1}{8}\Longrightarrow\left(-\infty,\dfrac{9}{25}\right]$

2. $\dfrac{x^2-2x-3}{x+5}\leq 0\Longrightarrow(-\infty,-5)\cup[-1,3]$

Problema 48 Resolver las inecuaciones siguientes:

1. $\dfrac{x}{2} - \dfrac{3x+2}{5} \geq 2 - \dfrac{2x-1}{10}$

2. $\dfrac{x^2-5x+6}{x+1} \leq 0$

Solución:

1. $\dfrac{x}{2} - \dfrac{3x+2}{5} \geq 2 - \dfrac{2x-1}{10} \Longrightarrow [25, +\infty)$

2. $\dfrac{x^2-5x+6}{x+1} \leq 0 \Longrightarrow (-\infty, -1) \cup [2, 3]$

Problema 49 Resolver las inecuaciones siguientes:

1. $\dfrac{x}{4} - \dfrac{3x+2}{3} \leq 1 - \dfrac{x+1}{12}$

2. $\dfrac{x^2+3x+2}{x-1} \geq 0$

Solución:

1. $\dfrac{x}{4} - \dfrac{3x+2}{3} \leq 1 - \dfrac{x+1}{12} \Longrightarrow \left[-\dfrac{19}{8}, +\infty\right)$

2. $\dfrac{x^2+3x+2}{x-1} \leq 0 \Longrightarrow [-2, -1] \cup (1, \infty)$

Problema 50 Resolver las inecuaciones siguientes:

1. $\dfrac{3x-1}{2} - \dfrac{x}{3} \geq 1 - \dfrac{x}{2}$

2. $\dfrac{x^2-2x-15}{x^2+x-2} \leq 0$

Solución:

1. $\dfrac{3x-1}{2} - \dfrac{x}{3} \geq 1 - \dfrac{x}{2} \Longrightarrow \left[\dfrac{9}{10}, +\infty\right)$

2. $\dfrac{x^2-2x-15}{x^2+x-2} \leq 0 \Longrightarrow [-3, -2) \cup (1, 5]$

Problema 51 Resolver las inecuaciones siguientes:

1. $\dfrac{2x-1}{3} + \dfrac{x+1}{2} \geq 1 - \dfrac{x}{2}$

2. $\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-15} \leq 0$

Solución:

1. $\dfrac{2x-1}{3}+\dfrac{x+1}{2}\geq 1-\dfrac{x}{2}\Longrightarrow \left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

2. $\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-15}\leq 0\Longrightarrow (-5,-2]\cup[1,3)$

Problema 52 Resolver las inecuaciones siguientes:

1. $\dfrac{5x+1}{3}-\dfrac{x-3}{6}\leq 1-\dfrac{x-3}{2}$

2. $\dfrac{x^2-4x-21}{x^2+4x-12}\geq 0$

3. $\dfrac{x^2+6x-7}{x^2+3x+2}\leq 0$

Solución:

1. $\dfrac{5x+1}{3}-\dfrac{x-3}{6}\leq 1-\dfrac{x-3}{2}\Longrightarrow (-\infty,5/6]$

2. $\dfrac{x^2-4x-21}{x^2+4x-12}\geq 0\Longrightarrow (-\infty,-6)\cup[-3,2)\cup[7,\infty)$

3. $\dfrac{x^2+6x-7}{x^2+3x+2}\leq 0\Longrightarrow [-7,-2)\cup(-1,1]$

1.4. Ecuaciones no lineales y sistemas

Problema 53 Calcular:

1. $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=1$
2. $\left\{\begin{array}{l} x^2-2y^2=1 \\ x+y=2 \end{array}\right.$

Solución:

1. $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=1 \Longrightarrow x=\dfrac{5}{4}$
2. $\left\{\begin{array}{l} x^2-2y^2=1 \\ x+y=2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1=\sqrt{7}+4=6{,}645751311 \\ y_1=-\sqrt{7}-2=-4{,}645751311 \\ x_2=4-\sqrt{7}=1{,}354248688 \\ y_2=\sqrt{7}-2=0{,}6457513110 \end{array}\right.$

Problema 54 Resolver las ecuaciones:

1. $\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}=2$
2. $\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}=1$
3. $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+3}=1$

Solución:

1. $\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}=2 \Longrightarrow$ sin solución
2. $\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}=1 \Longrightarrow x=-2$
3. $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+3}=1 \Longrightarrow x=10,29150262$

Problema 55 Resolver las ecuaciones:

1. $\sqrt{x-3}+\sqrt{x-1}=1$
2. $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-5}=2$
3. $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+1}=2$

Solución:

1. $\sqrt{x-3}+\sqrt{x-1}=1 \Longrightarrow$ sin solución
2. $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-5}=2 \Longrightarrow x=6,5625$
3. $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+1}=2 \Longrightarrow x=0$

Problema 56 Resolver el siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{c} x \cdot y = 2 \\ 2x - y = 3 \end{array} \right.$$

Solución:

$$\left\{ \begin{array}{c} x \cdot y = 2 \\ 2x - y = 3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 2, \ \ y = 1 \\ x = -1/2, \ \ y = -4 \end{array} \right.$$

Problema 57 Resolver el siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{c} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = 0 \end{array} \right.$$

Solución:

$$\left\{ \begin{array}{c} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \ \ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right.$$

Problema 58 Resolver el siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{c} x \cdot y = 6 \\ x + 3y = 11 \end{array} \right.$$

Solución:

$$\left\{ \begin{array}{c} x \cdot y = 6 \\ x + 3y = 11 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 2, \ \ y = 3 \\ x = 9, \ \ y = \frac{2}{3} \end{array} \right.$$

Problema 59 Resolver el siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{c} x^2 + y^2 = 1 \\ x + 2y = 0 \end{array} \right.$$

Solución:

$$\left\{ \begin{array}{c} x^2 + y^2 = 1 \\ x + 2y = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}, \ \ y = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ x = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \ \ y = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{array} \right.$$

Problema 60 Resolver el siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{c} (x+2)(y+2) = 9 \\ xy = 1 \end{array} \right.$$

Solución:

$$\left\{ \begin{array}{c} (x+2)(y+2) = 9 \\ xy = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow x = 1, \ \ y = 1$$

Problema 61 Resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} (x+2)(y-3) = 5 \\ x \cdot y = 12 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} (x+2)(y-3) = 5 \\ x \cdot y = 12 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 3, \ y = 4 \\ x = -\frac{8}{3}, \ y = -\frac{9}{2} \end{cases}$$

Problema 62 Resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1, \ y = 1 \\ x = -\frac{1}{5}, \ y = -\frac{7}{5} \end{cases}$$

Problema 63 Resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} x \cdot y = 6 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} x \cdot y = 6 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2, \ y = 3 \\ x = 6, \ y = 1 \end{cases}$$

Problema 64 Resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} x \cdot y = 2 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} x \cdot y = 2 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2, \ y = 1 \\ x = -1/2, \ y = -4 \end{cases}$$

Problema 65 Resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Problema 66 Resolver los siguientes sistemas:

$$\left\{ \begin{array}{c} x \cdot y = 2 \\ 3x + 2y = 7 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{c} x^2 + 2y^2 = 6 \\ x - 2y = 0 \end{array} \right.$$

Solución:

$$\left\{ \begin{array}{c} x \cdot y = 2 \\ 3x + 2y = 7 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 1, \ y = 2 \\ x = 4/3, \ y = 3/2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{c} x^2 + 2y^2 = 6 \\ x - 2y = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 2, \ y = 1 \\ x = 2, \ y = -1 \end{array} \right.$$

Problema 67 Resolver los siguientes sistemas:

$$\left\{ \begin{array}{c} x^2 + 2y^2 = 19 \\ 3x - y = 0 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{c} x \cdot y = 10 \\ 5x - y = 5 \end{array} \right.$$

Solución:

$$\left\{ \begin{array}{c} x^2 + 2y^2 = 19 \\ 3x - y = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 1, \ y = 3 \\ x = -1, \ y = -3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{c} x \cdot y = 10 \\ 5x - y = 5 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = -1, \ y = -10 \\ x = 2, \ y = 5 \end{array} \right.$$

1.5. Ecuaciones Polinómicas

Problema 68 Resolver las ecuaciones polinómicas siguientes:

1. $\dfrac{x+1}{x^2+2x-3} - \dfrac{x}{x+3} = 1 - \dfrac{1}{1-x}$

2. $\dfrac{x-3}{x^2-x-2} - \dfrac{1}{2-x} = 2 - \dfrac{1}{1+x}$

Solución:

1. $\dfrac{x+1}{x^2+2x-3} - \dfrac{x}{x+3} = 1 - \dfrac{1}{1-x} \Longrightarrow x = \dfrac{1}{2},\ \ x = -1$

2. $\dfrac{x-3}{x^2-x-2} - \dfrac{1}{2-x} = 2 - \dfrac{1}{1+x} \Longrightarrow\ x = 0,\ \ x = \dfrac{5}{2}$

Problema 69 Resolver las ecuaciones polinómicas siguientes:

1. $\dfrac{2x+3}{x^2+2x-15} - \dfrac{1}{3-x} = 2 - \dfrac{1}{x+5}$

2. $\dfrac{x+5}{x^2-3x-4} - \dfrac{x}{x+1} = 2 - \dfrac{x}{4-x}$

Solución:

1. $\dfrac{2x+3}{x^2+2x-15} - \dfrac{1}{3-x} = 2 - \dfrac{1}{x+5} \Longrightarrow x = -4,183300132,\ \ x = 4,183300132$

2. $\dfrac{x+5}{x^2-3x-4} - \dfrac{x}{x+1} = 2 - \dfrac{x}{4-x} \Longrightarrow\ x = -0,9437410968,\ x = 3,443741096$

1.6. Varios

Problema 70 Resolver las siguientes ecuaciones e inecuaciones:

1. $\ln(2-x) - \ln(x+2) = 1$
2. $2^{2x-1} - 2^x - 1 = 0$
3. $\dfrac{2x-5}{x^2-4x-21} - 1 = \dfrac{x}{x+3} - \dfrac{2}{7-x}$
4. $\dfrac{x^2-4x-21}{x+1} \le 0$
5. $\sqrt{x+3} + \sqrt{x} = 2$

Solución:

1. $\ln(2-x) - \ln(x+2) = 1 \Longrightarrow x = \dfrac{2(1-e)}{1+e}$
2. $2^{2x-1} - 2^x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 0,4499$
3. $\dfrac{2x-5}{x^2-4x-21} - 1 = \dfrac{x}{x+3} - \dfrac{2}{7-x} \Longrightarrow x = 6,2943, \;\; x = -0,79436$
4. $\dfrac{x^2-4x-21}{x+1} \le 0 \Longrightarrow (-\infty,-3] \cup (-1,7]$
5. $\sqrt{x+3} + \sqrt{x} = 2 \Longrightarrow x = \dfrac{1}{16}$

Problema 71 Resolver las ecuaciones:

1. $\sqrt{2x-1} = x-2$
2. $\log(1-x) - \log x = 2$
3. $2^{x-1} + 2^{x+1} - 1 = 0$

Solución:

1. $\sqrt{2x-1} = x-2 \Longrightarrow \; x = 1, \; x = 5$
2. $\log(1-x) - \log x = 2 \Longrightarrow \; x = \frac{1}{101}$
3. $2^{x-1} + 2^{x+1} - 1 = 0 \Longrightarrow x = -1,321928094$

Problema 72 Resolver las ecuaciones:

1. $\log(x^2-1) + 1 = 2\log(x-2)$
2. $2^{2x-1} + 2^{x+2} - 1 = 0$

3. $\dfrac{x-1}{x^2-2x-15} - \dfrac{1}{x+3} = 1 - \dfrac{1}{x-5}$

4. $\dfrac{x^2+2x-15}{x^2-8x+7} \geq 0$

5. $\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1} = 1$

6. $\sqrt{2x-1} - \sqrt{x-1} = 2$

Solución:

1. $\log(x^2-1)+1 = 2\log(x-2) \Longrightarrow \log 10(x^2-1) = \log(x-1)^2 \Longrightarrow$

   $9x^2+4x-14 = 0 \Longrightarrow x = 1,0446,\;\; x = -1,1231$ y no vale ninguna de ellas.

2. $2^{2x-1}+2^{x+2}-1 = 0 \Longrightarrow \dfrac{t^2}{2}+4t-1 = 0 \Longrightarrow t = 0,2426\;\; t = -8,2426$(No Vale).

   $2^x = 0,2426 \Longrightarrow x = \dfrac{\log 0,2426}{\log 2} = -2,04310$

3. $\dfrac{x-1}{x^2-2x-15} - \dfrac{1}{x+3} = 1 - \dfrac{1}{x-5} \Longrightarrow x^2-3x-22 = 0 \Longrightarrow$

   $$x = 6{,}424428900;\; x = -3{,}424428900$$

   .

4. $\dfrac{x^2+2x-15}{x^2-8x+7} = \dfrac{(x+5)(x-3)}{(x-1)(x-7)} \geq 0 \Longrightarrow$

   $$(-\infty,-5] \cup (1,3] \cup (7,\infty)$$

$\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1} = 1 \Longrightarrow\;\; x = 5$

$\sqrt{2x-1} - \sqrt{x-1} = 2 \Longrightarrow\;\; x = 22,58300524$

Problema 73 Resolver las ecuaciones:

1. $\log(x^2-1)+1 = 2\log(x-2)$

2. $2^{2x-1}+2^{x+2}-1 = 0$

3. $\dfrac{x-1}{x^2-2x-15} - \dfrac{1}{x+3} = 1 - \dfrac{1}{x-5}$

4. $\dfrac{x^2+2x-15}{x^2-8x+7} \geq 0$

5. $\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1} = 1$

6. $\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-1}=2$

Solución:

1. $\log(x^2-1)+1=2\log(x-2) \Longrightarrow \log 10(x^2-1)=\log(x-1)^2 \Longrightarrow$

   $9x^2+4x-14=0 \Longrightarrow x=1,0446,\ \ x=-1,1231$ y no vale ninguna de ellas.

2. $2^{2x-1}+2^{x+2}-1=0 \Longrightarrow \dfrac{t^2}{2}+4t-1=0 \Longrightarrow t=0,2426\ \ t=-8,2426$(No Vale).

   $2^x=0,2426 \Longrightarrow x=\dfrac{\log 0,4494}{\log 2}=-2,04310$

3. $\dfrac{x-1}{x^2-2x-15}-\dfrac{1}{x+3}=1-\dfrac{1}{x-5} \Longrightarrow x^2-3x-22=0 \Longrightarrow$

   $$x=6{,}424428900;\ x=-3{,}424428900$$

   .

4. $\dfrac{x^2+2x-15}{x^2-8x+7}=\dfrac{(x+5)(x-3)}{(x-1)(x-7)}\geq 0 \Longrightarrow$

   $$(-\infty,-5]\cup(1,3]\cup(7,\infty)$$

$\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}=1 \Longrightarrow\ x=5$
$\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-1}=2 \Longrightarrow\ x=22,58300524$

Problema 74 Resolver las ecuaciones:

1. $\log(20x^2+10)-1=2\log(x+3)$
2. $3^{2x+1}+3^{x-1}-2=0$
3. $1-\dfrac{1}{x^2-6x-7}=\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{1}{x-7}$
4. $\dfrac{x^2-6x-7}{x^2-x-6}\leq 0$
5. $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}=2$
6. $\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-1}=1$

Solución:

1. $\log(20x^2+10)-1=2\log(x+3) \Longrightarrow \log\dfrac{20x^2+10}{10}=\log(x+3)^2 \Longrightarrow$ $x^2-6x-8=0 \Longrightarrow x=7,1231,\ \ x=-1,1231.$

2. $3^{2x+1}+3^{x-1}-2=0 \Longrightarrow 3\cdot t^2+\dfrac{t}{3}-2=0 \Longrightarrow 9t^2+t-6=0 \Longrightarrow t = 0,7628,\ \ t=-0,873\,(\text{No Vale})$.

   $3^x = 0,728 \Longrightarrow x = \dfrac{\log 0,7628}{\log 3} = -0,2465$

3. $1-\dfrac{1}{x^2-6x-7} = \dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{1}{x-7} \Longrightarrow x = \dfrac{14}{3} = 4,67.$

4. $\dfrac{x^2-6x-7}{x^2-x-6} = \dfrac{(x+1)(x-7)}{(x+2)(x-3)} \le 0 \Longrightarrow\ (-2,-1]\cup(3,7]$

5. $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}=2 \Longrightarrow\ x=-\dfrac{23}{16}=x=-1,4375$

6. $\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-1}=1 \Longrightarrow\ x=5,\ \ x=1$

Problema 75 Resolver las ecuaciones:

1. $\log(x^2+14x+14)-1=\log(x+1)$
2. $3^{2x-1}+3^{x+1}-1=0$
3. $\dfrac{2}{x^2-x-6}-\dfrac{1}{x+2}=1-\dfrac{2}{x-3}$
4. $\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-5x+6}\ge 0$
5. $\sqrt{x^2+8}-x=2$
6. $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}=1$

Solución:

1. $$\log(x^2+14x+14)-1=\log(x+1) \Longrightarrow$$
   $$\log\frac{x^2+14x+14}{10}=\log(x+1) \Longrightarrow\ x=-2 \text{ No Vale}$$

2. $$3^{2x-1}+3^{x+1}-1=0 \Longrightarrow \frac{t^2}{3}+3t-1=0 \Longrightarrow$$
   $t=3^x=-9,321825380$ No Vale y $t=3^x=0,3218253804 \Longrightarrow x=-1,031980243$

3. $$\frac{2}{x^2-x-6}-\frac{1}{x+2}=1-\frac{2}{x-3} \Longrightarrow x=5,\ \ x=-3$$

4. $$\frac{x^2+4x+3}{x^2-5x+6} \geq 0 \Longrightarrow (-\infty,-3]\cup[-1,2)\cup(3,\infty)$$

5. $\sqrt{x^2+8}-x=2 \Longrightarrow x=1$

6. $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}=1 \Longrightarrow x=3$

Problema 76 Resolver las ecuaciones:

1. $\log(x+1)-1=\log(x^2-1)$

2. $5^{2x+1}-5^x-2=0$

3. $\dfrac{x}{x^2+x-2}-\dfrac{1}{x+2}=1-\dfrac{1}{x-1}$

4. $\dfrac{x^2+6x-7}{x^2+2x-15} \leq 0$

5. $x-\sqrt{x^2+15}=-3$

6. $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+3}=5$

Solución:

1. $\log(x+1)-1=\log(x^2-1) \Longrightarrow \log\dfrac{x+1}{10}=\log(x^2-1) \Longrightarrow$

   $x=11/10=1,1.$

2. $5^{2x+1}-5^x-2=0 \Longrightarrow 5t^2-t-2=0 \Longrightarrow t=5^x=-0,5403124237$ No Vale y $t=5^x=0,7403124237 \Longrightarrow x=-0,1868248444.$

3. $\dfrac{x}{x^2+x-2}-\dfrac{1}{x+2}=1-\dfrac{1}{x-1} \Longrightarrow x=\pm\sqrt{5}$

4. $\dfrac{x^2+6x-7}{x^2+2x-15} \leq 0 \Longrightarrow [-7,-5)\cup(1,3)$

5. $x-\sqrt{x^2+15}=-3 \Longrightarrow x=1$

6. $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+3}=5 \Longrightarrow x=6$

Problema 77 Resolver las ecuaciones:

1. $\log(2-x)-\log(x-1)=2$

2. $\log(3-x^2)-\log x=1+\log(x+2)$

3. $4^{x^2-1}\cdot 2^{x+5}=32^{x+1}$

4. $4^{x-2}-2^{x+1}-3=0$

Solución:

1. $\log(2-x) - \log(x-1) = 2 \Longrightarrow \ln \dfrac{2-x}{x-1} = \log 100 \Longrightarrow$

   $101x = 102 \Longrightarrow x = \dfrac{102}{101}$.

2. $\log(3-x^2) - \log x = 1 + \log(x+2) \Longrightarrow \log \dfrac{3-x^2}{x} = \log 10(x+2) \Longrightarrow$
   $11x^2 + 20x - 3 = 0 \Longrightarrow x = 0,139, \;\; x = -1,958$(no vale).

3.
$$4^{x^2-1} \cdot 2^{x+5} = 32^{x+1} \Longrightarrow x^2 - 4x - 2 = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2,4142 \\ x = -0,414 \end{array} \right.$$

4.
$$4^{x-2} - 2^{x+1} - 3 = 0 \Longrightarrow t^2 - 32t - 48 = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t = 33,435 \Longrightarrow x = 5,063 \\ t = -1,435 \;\; \text{no} \;\; \text{vale} \end{array} \right.$$

Capítulo 2

Geometría

2.1. Trigonometría

2.1.1. Razones trigonométricas

Problema 78 Sabiendo que $\tan\alpha = 2$, calcular el resto de las razones trigonométricas; teniendo en cuenta que α pertenece al tercer cuadrante.
Solución:

$$\tan\alpha = 2 \Longrightarrow \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Sabemos que $\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$ y aplicando esta fórmula quedaría:
$2^2 + 1 = \sec^2\alpha \Longrightarrow \sec = \pm\sqrt{5} = \pm 2,24$. Como en el tercer cuadrante la secante es negativa concluimos con el resultado $\sec\alpha = -2,24$.

Como $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ podemos despejar $\cos\alpha$ y nos quedaría $\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{1}{-2{,}24} = -0,45$, es decir $\cos\alpha = -0,45$.

Ahora vamos a utilizar la fórmula $1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$ y tendríamos:
$1 + \frac{1}{4} = \csc^2\alpha \Longrightarrow \csc\alpha = \pm\sqrt{\frac{5}{4}} = \pm 1,12$. Como en el tercer cuadrante la cosecante es negativa será $\csc\alpha = -1,12$.

Como $\cos\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \Longrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\csc\alpha} = \frac{1}{-1{,}12} = -0,89$ es decir
$\sin\alpha = -0,89$

Problema 79 Teniendo en cuenta que $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ y que α pertenece al primer cuadrante, calcular:

$$\sin(\alpha + 30^o);\ \sin(\alpha + 45^o);\ \cos(\alpha - 60^o);\ \tan(60^o - \alpha)$$

Solución:
Se calcula primero $\cos\alpha$ y $\tan\alpha$:

$\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3}$; $\quad \tan\alpha = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{8}}{3}} = \frac{1}{\sqrt{8}}$

$\sin(\alpha+30^{o}) = \sin\alpha\cdot\cos 30^{o}+\cos\alpha\cdot\sin 30^{o} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{8}}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{8}}{6} = 0,7601$

$\sin(\alpha+45^{o}) = \sin\alpha\cdot\cos 45^{o}+\cos\alpha\cdot\sin 45^{o} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{8}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,9024$

$\cos(\alpha-60^{o}) = \cos\alpha\cdot\cos 60^{o}+\sin\alpha\cdot\sin 60^{o} = \frac{\sqrt{8}}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,7601$

$\tan(60^{o}-\alpha) = \frac{\tan 60^{o}-\tan\alpha}{1+\tan 60^{o}\cdot\tan\alpha} = \frac{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{8}}}{1+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}} = 0,8549$

Problema 80 Hallar las razones trigonométricas de α sabiendo que $\sec\alpha = 3$ y $\alpha \in 4^{o}$ Cuadrante.

Solución:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = 3 \Longrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{3}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Longrightarrow \sin\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan\alpha = -2\sqrt{2}$$

$$\cot\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Problema 81 Demuestra que

$$\frac{\sin^3 x\cos x + \cos^3 x\sin x}{\sin 2x} = \frac{1}{2}$$

Solución:

$$\frac{\sin^3 x\cos x + \cos^3 x\sin x}{\sin 2x} = \frac{(\sin x\cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x)}{2\sin x\cos x} = \frac{1}{2}$$

Problema 82 Sabiendo que $\csc\alpha = 3$ y que α pertenece al segundo cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Solución:

$$\csc\alpha = 3 \Longrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{9} + \cos^2\alpha = 1 \Longrightarrow \cos^2\alpha = \frac{8}{9} \Longrightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{8}}{3}, \quad \sec\alpha = -\frac{3}{\sqrt{8}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{8}}, \quad \cot\alpha = -\sqrt{8}$$

Problema 83 Simplificar:

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{11\pi}{2}+\alpha\right)$$

Solución:

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\frac{5\pi}{2}\cos\alpha-\cos\frac{5\pi}{2}\sin\alpha=\cos\alpha$$

$$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{2}+\sin\alpha\sin\frac{\pi}{2}=\sin\alpha$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\frac{7\pi}{2}\cos\alpha+\cos\frac{7\pi}{2}\sin\alpha=-\cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{11\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\frac{11\pi}{2}\cos\alpha-\sin\frac{11\pi}{2}\sin\alpha=\sin\alpha$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{11\pi}{2}+\alpha\right)=2\sin\alpha$$

Problema 84 Sabiendo que $\csc\alpha=2$ y que α pertenece al segundo cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Solución:

$$\csc\alpha=2\Longrightarrow\sin\alpha=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4}+\cos^2\alpha=1\Longrightarrow\cos^2\alpha=\frac{3}{4}\Longrightarrow\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad\sec\alpha=-\frac{2}{\sqrt{3}}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3},\quad\cot\alpha=-\sqrt{3}$$

Problema 85 Resolver la ecuación trigonométrica siguiente:

$$\sin 2x=2\cos x$$

Solución:

$$2\sin x\cos x-2\cos x=0\Longrightarrow 2\cos x(\sin x-1)=0\Longrightarrow\cos x=0,\quad\sin x=1$$

Luego:

$$\cos x=0\Longrightarrow x=\frac{\pi}{2},\quad x=\frac{3\pi}{2}$$

$$\sin x=1\Longrightarrow x=\frac{\pi}{2}$$

La solución sería:

$$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\quad x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$$

Problema 86 Resolver la ecuación trigonométrica siguiente:

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 1$$

Solución:

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 1 \Longrightarrow \cos 2x = 1 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x = 2\pi \\ 2x = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \pi \\ x = 0 \end{array} \right.$$

Las soluciones serían: $x = \pi + 2k\pi$ y $x = 0 + 2k\pi$

Problema 87 Sabiendo que $\tan\alpha = -4$ y que α pertenece al segundo cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Solución:

$$\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha \Longrightarrow \sec\alpha = -\sqrt{17} \Longrightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Longrightarrow \sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}} \Longrightarrow \csc\alpha = \frac{\sqrt{17}}{4}$$

$$\tan\alpha = -4 \Longrightarrow \cot\alpha = -\frac{1}{4}$$

Problema 88 Si $\csc\alpha = 3$ y $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ calcula las restantes razones trigonométricas de α.

Solución:

$$\csc\alpha = 3 \Longrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Longrightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{8}}{3}, \quad \sec\alpha = -\frac{3}{\sqrt{8}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{1/3}{\sqrt{8}/3} = -\frac{1}{\sqrt{8}}, \quad \cot\alpha = -\sqrt{8}$$

Problema 89 Demostrar que $\dfrac{2\sin^3 x + \sin 2x\cos x}{2\sin x} = 1$

Solución:

$$\frac{2\sin^3 x + \sin 2x\cos x}{2\sin x} = \frac{2\sin x(\sin^2 x + \cos^2 x)}{2\sin x} = 1$$

Problema 90 Resolver la ecuación trigonométrica

$$\sin 2x\cos x + \cos 2x = 2\sin x + 1$$

Solución:

$$2\sin x\cos^2 x+\cos^2 x-\sin^2 x=2\sin x+1$$

$$2\sin x(1-\sin^2 x)+(1-\sin^2 x)-\sin^2 x=2\sin x+1$$

$$-2\sin^2 x(\sin x+1)=0\Longrightarrow \sin x=0\Longrightarrow x=0+2k\pi,\ \ x=\pi+2k\pi$$

$$\sin x=-1\Longrightarrow x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$$

Problema 91 Si $\cot\alpha=-\dfrac{1}{5}$ y $\alpha\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ calcula las restantes razones trigonométricas de α.

Solución:

$$\cot\alpha=-\frac{1}{5}\Longrightarrow \tan\alpha=-5$$

$$\tan^2\alpha+1=\sec^2\alpha\Longrightarrow \sec\alpha=-\sqrt{26},\ \ \cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{26}}$$

$$\sin^2\alpha+\left(-\frac{1}{\sqrt{26}}\right)^2=1\Longrightarrow \sin\alpha=\frac{5}{\sqrt{26}},\ \ \csc\alpha=\frac{\sqrt{26}}{5}$$

Problema 92 Demostrar que $\tan\alpha\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=1$

Solución:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1$$

$$2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

Problema 93 Resolver la ecuación trigonométrica

$$\cos 2x+\cos x\sin 2x=2\sin x+1$$

Solución:

$$\cos^2 x-\sin^2 x+2\sin x\cos^2 x=2\sin x+1$$

$$1-\sin^2 x-\sin^2 x+2\sin x(1-\sin^2 x)=2\sin x+1$$

$$-2\sin^2 x-2\sin^3 x=0\Longrightarrow \sin x=0,\ \ \sin x=-1$$

$$\sin x=0\Longrightarrow x=0+2k\pi,\ \ \ x=\pi+2k\pi$$

$$\sin x=-1\Longrightarrow x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$$

Problema 94 Encontrar todas las razones trigonométricas de $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, sabiendo que $\cot\alpha = -\frac{3}{2}$

Solución:

$$\cot\alpha = -\frac{3}{2} \Longrightarrow \tan\alpha = -\frac{2}{3}$$

$$1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha \Longrightarrow \csc\alpha = \frac{\sqrt{13}}{2} \Longrightarrow \sin\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha \Longrightarrow \sec\alpha = -\frac{\sqrt{13}}{3} \Longrightarrow \cos\alpha = -\frac{3}{\sqrt{13}} = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$$

Problema 95 Resolver la siguiente ecuacción trigonométrica

$$\cos 2x + 5\cos x + 3 = 0$$

Solución:

$$\cos 2x + 5\cos x + 3 = 0 \Longrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x + 5\cos x + 3 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + 5\cos x + 3 = 0 \Longrightarrow 2\cos^2 + 5\cos x + 2 = 0$$

$$\cos x = \begin{cases} -\frac{1}{2} \Longrightarrow \begin{cases} x = 120^{\circ} + 2k\pi \\ x = 240^{\circ} + 2k\pi \end{cases} \\ \\ -2 \text{ No Vale} \end{cases}$$

Problema 96 Demostrar que: $\cot 2x = \frac{1}{2}(\cot x - \tan x)$

Solución:

$$\cot 2x = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2\sin x\cos x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x\cos x} - \frac{\sin^2 x}{\sin x\cos x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(\cot x - \tan x)$$

Problema 97 Encontrar todas las razones trigonométricas de $\alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, sabiendo que $\tan\alpha = 2$

Solución:

$$\tan\alpha = 2 \Longrightarrow \cot\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha \Longrightarrow \sec\alpha = -\sqrt{5} \Longrightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha \Longrightarrow \csc\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow \sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Problema 98 Encontrar todas las razones trigonométricas de $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, sabiendo que $\tan\alpha = -\frac{3}{2}$

Solución:

$$\tan\alpha = -\frac{3}{2} \Longrightarrow \cot\alpha = -\frac{2}{3}$$

$$1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha \Longrightarrow \csc\alpha = \frac{\sqrt{13}}{3} \Longrightarrow \sin\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha \Longrightarrow \sec\alpha = -\frac{\sqrt{13}}{2} \Longrightarrow \cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{13}} = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$$

Problema 99 Resolver la siguiente ecuacción trigonométrica

$$3\sin^2 x + \cos^2 x + \sin x - 2 = 0$$

Solución:

$$3\sin^2 x + \cos^2 x + \sin x - 2 = 0 \Longrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Longrightarrow$$

$$(t = \sin x) \Longrightarrow 2t^2 + t - 1 = 0 \Longrightarrow t = -1,\ \ t = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 30^{\text{o}} + 2k\pi \\ x = 150^{\text{o}} + 2k\pi \end{array} \right. \\ \\ -1 \Longrightarrow x = 270^{\text{o}} + 2k\pi \end{array} \right.$$

Problema 100 Demostrar que: $\cos^2 x = \frac{\sin 2x}{2\tan x}$

Solución:

$$\frac{\sin 2x}{2\tan x} = \frac{2\sin x\cos x}{2\frac{\sin x}{\cos x}} = \cos^2 x$$

Problema 101 Resolver la siguiente ecuación trigonométrica

$$2\cos 2x + 5\sin x - 3 = 0$$

Solución:

$$2(\cos^2 x - \sin^2 x) + 5\sin x - 3 = 0 \Longrightarrow 4\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0 \Longrightarrow$$

$$(t = \sin x) \Longrightarrow 4t^2 + 5t - 3 = 0 \Longrightarrow t = 1,\ \ t = \frac{1}{4}$$

$$\sin x = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 14^{\text{o}}28'39'' + 2k\pi \\ x = 165^{\text{o}}31'21'' + 2k\pi \end{array} \right. \\ \\ 1 \Longrightarrow x = 90^{\text{o}} + 2k\pi \end{array} \right.$$

Problema 102 Encontrar todas las razones trigonométricas de $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, sabiendo que $\tan\alpha = -\frac{1}{2}$

Solución:

$$\tan\alpha = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \cot\alpha = -2$$

$$1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha \Longrightarrow \csc\alpha = \sqrt{5} \Longrightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha \Longrightarrow \sec\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow \cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Problema 103 Resolver la siguiente ecuacción trigonométrica

$$\cos 2x + \cos x = 0$$

Solución:

$$\cos^2 x - \sin^2 x + \cos x = 0 \Longrightarrow \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + \cos x = 0 \Longrightarrow$$

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \Longrightarrow (t = \sin x) \Longrightarrow 2t^2 + t - 1 = 0 \Longrightarrow t = -1, \;\; t = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = \begin{cases} \frac{1}{4} \Longrightarrow \begin{cases} x = 60^{\text{o}} + 2k\pi \\ x = 300^{\text{o}} + 2k\pi \end{cases} \\ \\ -1 \Longrightarrow \;\; x = 180^{\text{o}} + 2k\pi \end{cases}$$

Problema 104 Encontrar todas las razones trigonométricas de $\alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, sabiendo que $\tan\alpha = 2$

Solución:

$$\tan\alpha = 2 \Longrightarrow \cot\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha \Longrightarrow \sec\alpha = -\sqrt{5} \Longrightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha \Longrightarrow \csc\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow \sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Problema 105 Encontrar todas las razones trigonométricas de $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, sabiendo que $\cot\alpha = -\frac{1}{4}$

Solución:

$$\cot\alpha = -\frac{1}{4} \Longrightarrow \tan\alpha = -4$$

$$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha \Longrightarrow \csc\alpha=\frac{\sqrt{17}}{4} \Longrightarrow \sin\alpha=\frac{4\sqrt{17}}{17}$$

$$\tan^2\alpha+1=\sec^2\alpha \Longrightarrow \sec\alpha=-\sqrt{17} \Longrightarrow \cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}=-\frac{\sqrt{17}}{17}$$

Problema 106 Resolver la siguiente ecuación trigonométrica

$$8\cos^2 x+2\sin x-7=0$$

Solución:

$$8(1-\sin^2 x)+2\sin x-7=0 \Longrightarrow 8\sin^2 x-2\sin x-1=0 \Longrightarrow$$

$$(t=\sin x) \Longrightarrow 8t^2-2t-1=0 \Longrightarrow t=\frac{1}{2},\ t=-\frac{1}{4}$$

$$\sin x=\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{2} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=30^{\circ}+2k\pi \\ x=150^{\circ}+2k\pi \end{array}\right. \\ \\ -\dfrac{1}{4} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=194^{\circ}28'39''+2k\pi \\ x=345^{\circ}31'20''+2k\pi \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Problema 107 Demostrar que:

$$\frac{\cos 2x}{\cos x}-\frac{\sin 2x}{\sin x}=\frac{-1}{\cos x}$$

Solución:

$$\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x}-\frac{2\sin x\cos x}{\cos x}=-\cos x-\frac{\sin^2 x}{\cos x}=-\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x}=-\frac{1}{\cos x}$$

Problema 108 Encontrar todas las razones trigonométricas de $\alpha\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, sabiendo que $\cot\alpha=-\frac{1}{3}$

Solución:

$$\cot\alpha=-\frac{1}{3} \Longrightarrow \tan\alpha=-3$$

$$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha \Longrightarrow \csc\alpha=\frac{\sqrt{10}}{3} \Longrightarrow \sin\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\tan^2\alpha+1=\sec^2\alpha \Longrightarrow \sec\alpha=-\sqrt{10} \Longrightarrow \cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$$

Problema 109 Resolver la siguiente ecuación trigonométrica

$$-6\cos^2 x + \sin x + 4 = 0$$

Solución:

$$-6(1-\sin^2 x) + \sin x + 4 = 0 \Longrightarrow 6\sin^2 x + \sin x + 2 = 0 \Longrightarrow$$

$$(t = \sin x) \Longrightarrow\ 6t^2 + t - 2 = 0 \Longrightarrow\ t = \frac{1}{2},\ \ t = -\frac{2}{3}$$

$$\sin x = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{2} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 30^{\text{o}} + 2k\pi \\ x = 150^{\text{o}} + 2k\pi \end{array} \right. \\ \\ -\dfrac{2}{3} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -41^{\text{o}}48'37'' = 318^{\text{o}}11'23'' + 2k\pi \\ x = 221^{\text{o}}48'37'' + 2k\pi \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Problema 110 Demostrar que:

$$\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{2}(\cot\alpha - \tan\alpha)$$

Solución:

$$\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{2}(\cot\alpha - \tan\alpha)$$

Problema 111 Encontrar todas las razones trigonométricas de $\alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, sabiendo que $\tan\alpha = \frac{3}{2}$

Solución:

$$\tan\alpha = \frac{3}{2} \Longrightarrow \cot\alpha = \frac{2}{3}$$

$$1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha \Longrightarrow \csc\alpha = -\frac{\sqrt{13}}{3} \Longrightarrow \sin\alpha = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha \Longrightarrow \sec\alpha = -\frac{\sqrt{13}}{2} \Longrightarrow \cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{13}} = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$$

Problema 112 Resolver la siguiente ecuación trigonométrica

$$6\cos^2 x + 7\sin x - 8 = 0$$

Solución:

$$6(1-\sin^2 x) + 7\sin x - 8 = 0 \Longrightarrow 6\sin^2 x - 7\sin x + 2 = 0 \Longrightarrow$$

$$(t = \sin x) \Longrightarrow\ 6t^2 - 7t + 2 = 0 \Longrightarrow\ t = \frac{1}{2},\ \ t = \frac{2}{3}$$

$$\sin x = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \Longrightarrow \begin{cases} x = 30^{o} + 2k\pi \\ x = 150^{o} + 2k\pi \end{cases} \\ \\ \dfrac{2}{3} \Longrightarrow \begin{cases} x = 41^{o}48'37'' + 2k\pi \\ x = 138^{o}11'23'' + 2k\pi \end{cases} \end{cases}$$

Problema 113 Demostrar que:

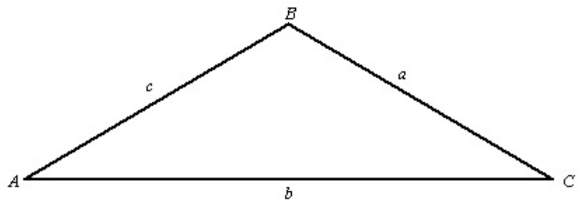
$$\cot 2\alpha = \frac{1}{2}(\cot\alpha - \tan\alpha)$$

Solución:

$$\cot 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) = \frac{1}{2}(\cot\alpha - \tan\alpha)$$

2.1.2. Resolución de triángulos

Problema 114 Resolver el triángulo no rectángulo del que conocemos dos de sus ángulos $A = 65^{\text{o}}$, $C = 35^{\text{o}}$, y uno de sus lados $b = 15$. Calcular finalmente su área.
Solución:
Tenemos que $A+B+C = 180^{\text{o}}$ luego $B = 180^{\text{o}} - (A+B) = 180^{\text{o}} - (65^{\text{o}} +$



$35^{\text{o}}) = 80^{\text{o}}$
Por el teorema del seno tenemos: $\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \Longrightarrow a = \frac{15 \cdot \sin 65^{\text{o}}}{\sin 80^{\text{o}}} = 13,8043$

Por el teorema del seno tenemos: $\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} \Longrightarrow c = \frac{15 \cdot \sin 35^{\text{o}}}{\sin 80^{\text{o}}} = 8,7364$

Por la fórmula de Herón calcularemos la superficie de este triángulo:

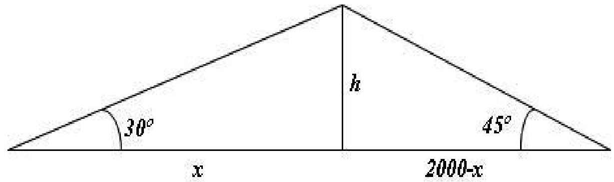
El semiperímetro será $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13,8043+15+8,7364}{2} = 18,77035$

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$

$\sqrt{18,77035 \cdot (18,77035 - 13,8043) \cdot (18,77035 - 15) \cdot (18,77035 - 8,7364)} =$

$59,3838.$

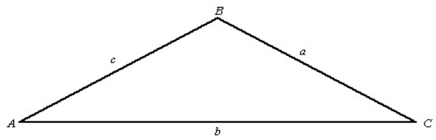
Problema 115 Dos personas separadas por una llanura de $2Km$, observan un globo aerostático con ángulos de 30^{o} y 45^{o} respectivamente. Hallar la altura a la que vuela dicho artefacto.
Solución:



$$\left\{\begin{array}{l}\tan 30^{\circ} = \dfrac{h}{x} \\ \\ \tan 45^{\circ} = \dfrac{h}{2000-x}\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} h = 732,0508074m \\ \\ x = 1267,949192m\end{array}\right.$$

La solución pedida es que el globo vuela a una altura de $732,0508074m$.

Problema 116 Dado el triángulo



1. Resolverlo sabiendo que $a = 3$, $b = 5$ y $C = 30^{\circ}$, calcular también su área.
2. Demostrar el teorema del seno.

Solución

1.

$$c^2 = 9 + 25 - 30\frac{\sqrt{3}}{2} = 8,02 \Longrightarrow c = 2,83$$

$$\frac{3}{\sin A} = \frac{2,83}{1/2} \Longrightarrow \sin A = 0,529 \Longrightarrow A = 31^{\circ}59'5''$$

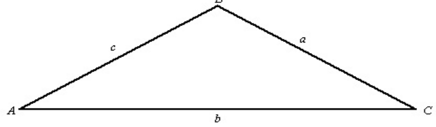
$$B = 180^{\circ} - (A + C) = 118^{\circ}0'55''$$

$$p = \frac{3 + 5 + 2,83}{2} = 5,415 \Longrightarrow$$

$$S = \sqrt{5,415(5,415-3)(5,415-5)(5,415-2,83)} = 3,74$$

2. Ver teoría

Problema 117 Dado el triángulo



1. Resolverlo sabiendo que $a = 4$, $b = 6$ y $C = 30^{o}$, calcular también su área.

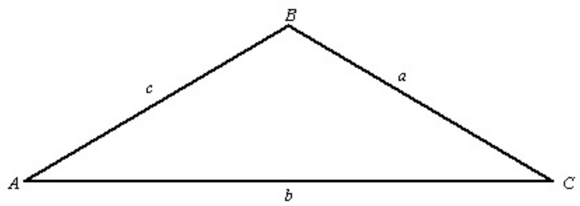
2. Demostrar el teorema del seno.

Solución
1.

$$c^2 = 16 + 36 - 48\frac{\sqrt{3}}{2} = 10,43 \Longrightarrow c = 3,23$$
$$\frac{4}{\sin A} = \frac{3,23}{1/2} \Longrightarrow \sin A = 0,619 \Longrightarrow A = 38^{o}15'43''$$
$$B = 180^{o} - (A + C) = 111^{o}44'17''$$
$$p = \frac{4 + 6 + 3,23}{2} = 6,615 \Longrightarrow$$
$$S = \sqrt{6,615(6,615 - 4)(6,615 - 6)(6,615 - 3,23)} = 6$$

2. Ver teoría

Problema 118 Dado el triángulo

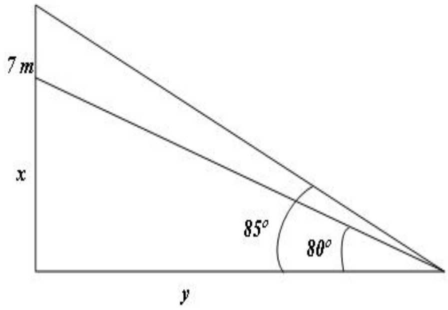


Resolverlo sabiendo que $a = 5$, $b = 6$ y $C = 135^{o}$.
Solución

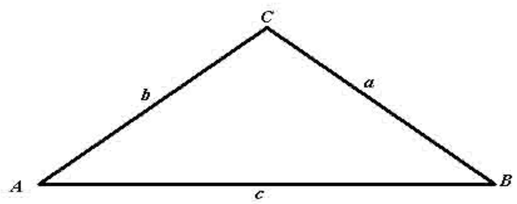
$$c^2 = 25 + 36 - 60\cos 135^{o} \Longrightarrow c = 10,16$$
$$\frac{10,16}{\sin 135^{o}} = \frac{5}{\sin A} \Longrightarrow \sin A = 0,32 \Longrightarrow A = 18^{o}44'54''$$
$$B = 180^{o} - (A + C) = 26^{o}16'$$

Problema 119 Acaban de colocar una antena de 7 metros en lo alto de un edificio. Observas el extremo superior de la antena con un ángulo de 85^{o}, mientras que su base la observamos con 80^{o}. Calcular la altura del edificio y la distancia que te separa de él.
Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} \tan 85^{o} = \frac{x+7}{y} \\ \tan 80^{o} = \frac{x}{y} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 6,89 \\ y = 1,21 \end{array}\right.$$

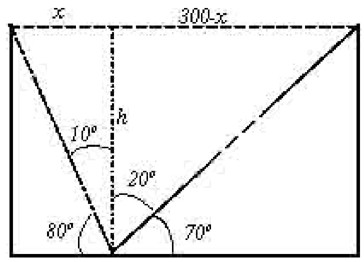


Problema 120 Resolver un triángulo no rectángulo del que conocemos dos de sus lados $a = 10$, $b = 16$ y uno de sus ángulos $C = 105^{\circ}$, que no es el opuesto a ninguno de estos lados.
Solución:



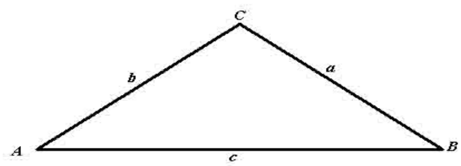
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \Longrightarrow c = 20,498$$
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Longrightarrow A = 27^{\circ}27'30''$$
$$B = 180^{\circ} - (A + C) = 47^{\circ}32'30''$$
$$S = \sqrt{46,9(46,9-10)(46,9-16)(46,9-20,498)} = 77,274$$

Problema 121 Desde el fondo de un desfiladero observamos a Isaac en su nuevo entretenimiento, el de equilibrista. Tratará de cruzar el desfiladero por todo lo alto. Le observamos desde abajo con un poco de pesimismo. Podemos ver un extremo de la cuerda con un ángulo de 80° y el otro con un ángulo de 70°. Si sabemos que el desfiladero tiene 300 metros de ancho calcular a que altura se encuentra nuestro amigo.
Solución:



$$\left\{\begin{array}{l} \tan 10^{o} = \frac{x}{h} \\ \\ \tan 20^{o} = \frac{300-x}{h} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} [x = 97,90554642\, m \\ h = 555,2499477\, m \end{array}\right.$$

Problema 122 A dos puertos, separados longitudinalmente por 20 Km, se reciben a la vez señales de socorro de un barco que se encuentra en alta mar. El puerto A recibe la señal con un ángulo de 75^{o} mientras que el B lo recibe con un ángulo de 60^{o}. También se sabe que el barco está entre los dos puertos, pero pérdido dentro del mar, y se pide calcular a que distacia se encuentra de ellos.
Solución:



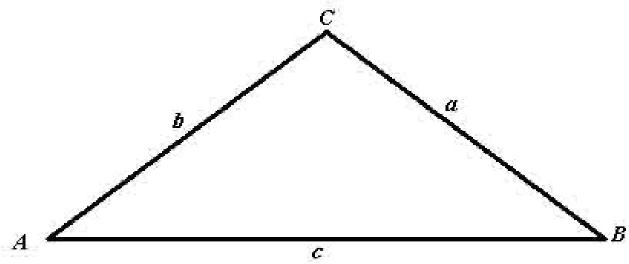
$$C = 180^{o} - (75^{o} + 60^{o}) = 45^{o}$$

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \Longrightarrow a = \frac{20 \sin 75^{o}}{\sin 45^{o}} = 27,32\, Km$$

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} \Longrightarrow b = \frac{20 \sin 60^{o}}{\sin 45^{o}} = 24,49\, Km$$

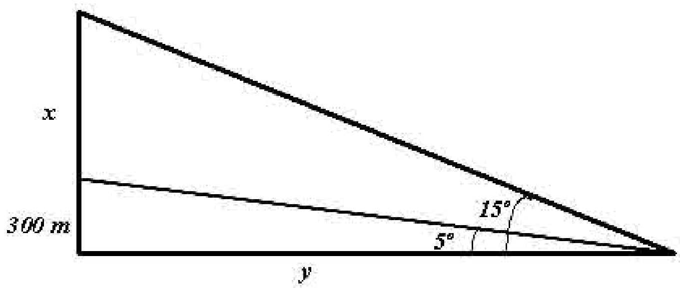
Problema 123 Resolver un triángulo no rectángulo del que conocemos dos de sus lados $a = 16$, $c = 9$ y uno de sus ángulos $B = 115^{o}$, que no es el opuesto a ninguno de estos lados.

Solución:



$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \Longrightarrow c = 21,417$$
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Longrightarrow A = 22^{\circ}23'10''$$
$$C = 180^{\circ} - (A + B) = 42^{\circ}36'50''$$
$$S = \sqrt{23,21(23,21-16)(23,21-9)(23,21-21,417)} = 65,24$$

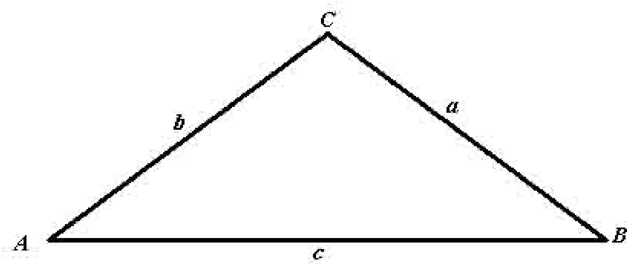
Problema 124 Un paracaidista de acrobacias en una exhibición sabe que, en su caida libre desde el avión tiene que abrir el paracaídas cuando su altímetro le indique que le quedan 300 m. para llegar al suelo. Suponemos que en el momento que se lanza el avión se encuentra en suspensión (sin movimiento) y lo observamos con un ángulo de 15°, cuando abre el paracaídas le vemos con un ángulo de 5°. Se pide calcular la altura desde la que se ha lanzado y la distancia que recorreremos para encontrarnos con él.
Solución:



$$\left\{\begin{array}{l} \tan 5^{\circ} = \frac{300}{y} \\ \\ \tan 15^{\circ} = \frac{300+x}{y} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 618,8\,m \\ y = 3{,}429\,m \end{array}\right.$$

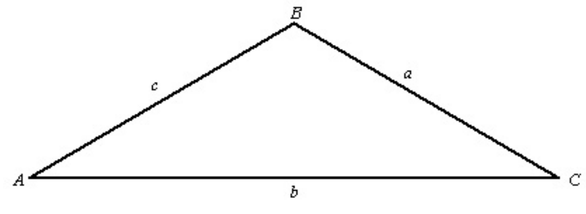
Problema 125 Dos destructores detectan un submarino, que se encuentra sumergido en la línea que separa a ambos, y que es de 5 Km. Uno de ellos lo detecta con un ángulo de 35º y el otro de 20º. Los tres se encuentran parados y preparan sus torpedos, tan sólo les queda calcular la distacia hasta su enemigo, el primero que la calcule será el que sobrevirá. Se pide que las calcules.

Solución:



$$C = 180^{o} - (20^{o} + 35^{o}) = 125^{o}$$
$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \Longrightarrow a = \frac{5\sin 20^{o}}{\sin 125^{o}} = 2,0876\,Km$$
$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} \Longrightarrow b = \frac{5\sin 35^{o}}{\sin 125^{o}} = 3,5010\,Km$$

Problema 126 Resolver un triángulo no rectángulo del que se conocen sus tres lados: $a = 4$ cm, $b = 3$ cm y $c = 6$ cm.
Solución:



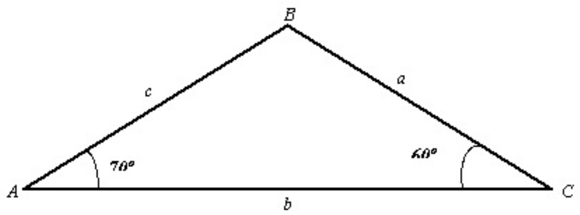
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Longrightarrow 16 = 9 + 36 - 36\cos A \Longrightarrow A = 36^{o}20'10''$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos A \Longrightarrow 9 = 16 + 36 - 48\cos B \Longrightarrow B = 26^{o}23'3''$$

$$C = 180^o - (A+B) = 117^o 16' 47''$$

$$p = \frac{13}{2} \Longrightarrow S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 5,333\, u^2$$

Problema 127 Dos barcos pesqueros que se encuentran faenando y separados por una distancia de 100 Km empiezan a recibir una señal de socorro. Rápidamente se ponen en contacto los capitanes de ambos barcos para situar el origen de la señal, para ello trazan una línea entre ambos, y sobre esa línea uno de ellos recibe la señal con un ángulo de 70^o, mientras que el otro la recibe con un ángulo de 60^o. Calcula las distancias que separan a estos dos barcos del origen de la señal.

Solución:

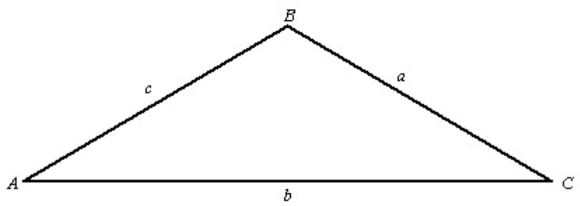


$$B = 180^o - (A+C) = 180^o - 130^o = 50^o$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Longrightarrow \frac{a}{\sin 70^o} = \frac{100}{\sin 50^o} \Longrightarrow a = 122,668\,\mathrm{Km}$$

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} \Longrightarrow \frac{c}{\sin 60^o} = \frac{100}{\sin 50^o} \Longrightarrow a = 113,052\,\mathrm{Km}$$

Problema 128 Resolver un triángulo no rectángulo del que se conocen sus tres lados: $a = 10$ cm, $b = 4$ cm y $C = 35^o$



Solución:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 100 + 16 - 80\cos 35^o = 7,104\, cm$$

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \Longrightarrow \frac{7,104}{\sin 35^{\circ}} = \frac{10}{\sin A} \Longrightarrow A = 53^{\circ}50'33''$$

La calculadora nos dá como resultado $A = 53^{\circ}50'33''$, pero este resultado no es válido dado que, el ángulo A tiene que ser obtuso, lo que corresponde al ángulo $180^{\circ} - 53^{\circ}50'33'' = 126^{\circ}9'27''$

$$B = 180^{\circ} - (A + C) = 18^{\circ}50'33''$$

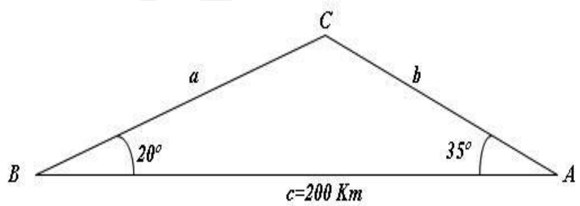
$$S\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 11,63\ cm^2$$

donde $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

Problema 129 Dos aeropuertos A y B reciben la señal de un avión, que está pidiendo un aterrizaje forzoso por la averia de uno de sus motores. El aeropuerto A recibe la señal con un ángulo de 35° y el B con 20°, ambos medidos con la horizontal. Si los aeropuertos están separados por una distancia de 200 Km, calcular la distancia desde cada aeropuerto al avión.

Solución:

$$C = 180^{\circ} - (35^{\circ} + 20^{\circ}) = 125^{\circ}$$



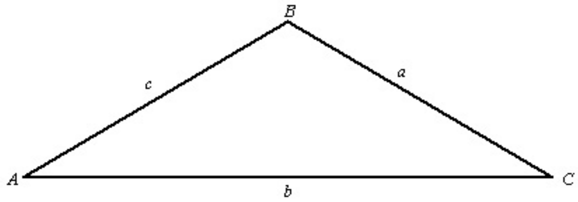
$$\frac{200}{\sin 125^{\circ}} = \frac{a}{\sin 35^{\circ}} \Longrightarrow a = 140,0415\,Km$$
$$\frac{200}{\sin 125^{\circ}} = \frac{b}{\sin 20^{\circ}} \Longrightarrow b = 83,5059\,Km$$

Problema 130 Resolver un triángulo no rectángulo del que se conocen: $a = 4$ cm, $b = 6$ cm y $C = 40^{\circ}$.

Solución:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \Longrightarrow c^2 = 16 + 36 - 48\cos 40^{\circ} \Longrightarrow c = 3,9\ cm$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2ab\cos A \Longrightarrow 16 = 36 + 15,21 - 46,8\cos A \Longrightarrow A = 41^{\circ}12'20''$$

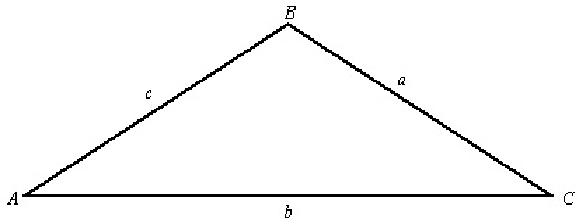


$$B = 180^o - (A + C) = 98^o 47' 40''$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} = 6,95 \Longrightarrow S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 7,70\, cm^2$$

Problema 131 Dos amigos aficionados a la astronomía y, que se encuentran separados por una distancia de 1000 Km, están observando un foco de luz que, por una causa desconocida había aparecido en el firmamento en medio de las estrellas. Ese objeto luminoso se confunde con lo que sería una nueva estrella desconocida, por lo que deciden investigar. Uno de ellos apunta con su telescopio bajo un ángulo de 85^o, mientras que el otro lo hace con un ángulo de 87^o. Calcular la distancia de cada uno de ellos al objeto en cuestión. ¿Se tratará de una estrella?

Solución:



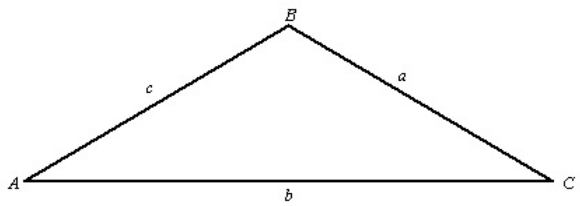
$$B = 180^o - (A + C) = 180^o - 172^o = 8^o$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Longrightarrow \frac{a}{\sin 85^o} = \frac{1000}{\sin 8^o} \Longrightarrow a = 7157,95\,\text{Km}$$

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} \Longrightarrow \frac{c}{\sin 87^o} = \frac{1000}{\sin 8^o} \Longrightarrow c = 7175,45\,\text{Km}$$

Está claro de que no es una estrella.

Problema 132 Resolver un triángulo no rectángulo del que se conocen: $a = 5$ cm, $b = 4$ cm y $C = 40^o$.



Solución:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \Longrightarrow c^2 = 25 + 16 - 40\cos 40^{\circ} \Longrightarrow c = 3,22\ cm$$

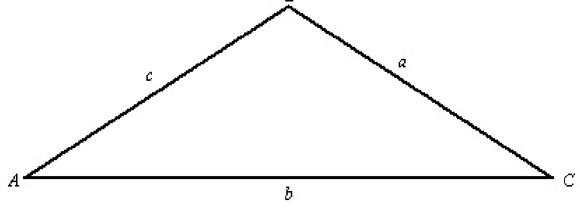
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2ab\cos A \Longrightarrow 25 = 16 + 10,36 - 25,76\cos A \Longrightarrow A = 87^{\circ}34'46''$$

$$B = 180^{\circ} - (A + C) = 52^{\circ}25'14''$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} = 6,11 \Longrightarrow S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 6,43\,cm^2$$

Problema 133 Dos amigos aficionados a la arqueología se encuentrar a bordo de un pequeño submarino para investigar un galeotote undido en el mar Mediterraneo. Se sumergieron con un ángulo de 15° sobre la horizontal, estubieron trabajando en el fondo, y empezaron el ascenso con un ángulo de 23°. Cuando salieron a la superficie estaban a 10 Km del lugar donde iniciaron la inmersión. Calcular los Kms que han recorrido tanto de descenso como de ascenso.

Solución:



$$B = 180^{\circ} - (A + C) = 180^{\circ} - 38^{\circ} = 142^{\circ}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Longrightarrow \frac{a}{\sin 23^{\circ}} = \frac{10}{\sin 142^{\circ}} \Longrightarrow a = 6,3465\,\text{Km}$$

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} \Longrightarrow \frac{c}{\sin 15^{\circ}} = \frac{10}{\sin 142^{\circ}} \Longrightarrow c = 4,2039\,\text{Km}$$

Problema 134 Resolver un triángulo no rectángulo del que se conocen: $a = 10$ cm, $b = 4$ cm y $C = 35^{\circ}$.

Solución:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 100 + 16 - 80\cos 35^{\circ} = 7,104\,cm$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Longrightarrow \cos A = -0,59 \Longrightarrow A = 126^{\circ}15'16''$$

Otra manera:

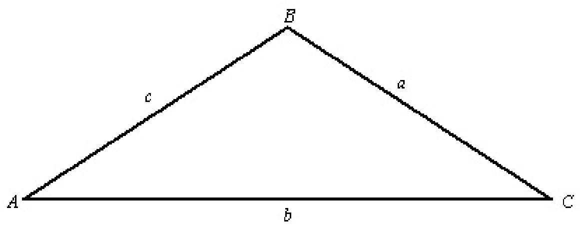
$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \Longrightarrow \frac{7,104}{\sin 35^{\circ}} = \frac{10}{\sin A} \Longrightarrow A = 53^{\circ}50'33''$$

La calculadora nos da como resultado $A = 53^{\circ}50'33''$, pero este resultado no es válido dado que, el ángulo A tiene que ser obtuso, lo que corresponde al ángulo $180^{\circ} - 53^{\circ}50'33'' = 126^{\circ}9'27''$

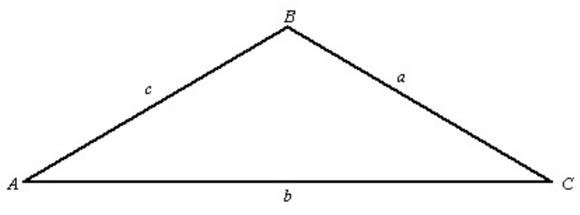
$$B = 180^{\circ} - (A + C) = 18^{\circ}49'43''$$

$$S\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 11,63\ cm^2$$

donde $p = \dfrac{a+b+c}{2}$



Problema 135 Resolver un triángulo no rectángulo del que se conocen: $a = 15$ cm, $b = 33$ cm y $C = 28^{\circ}$.



Solución:

$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C \Longrightarrow c^2 = 15^2+33^2-2\cdot 15\cdot 33\cdot \cos 28^{o} \Longrightarrow c = 20,97\ cm$$

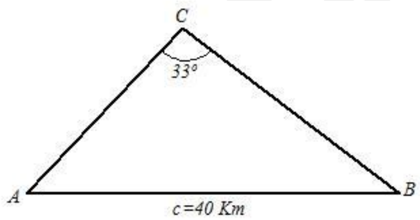
$$a^2 = b^2+c^2-2ab\cos A \Longrightarrow 15^2 = 33^2+20,97^2-2\cdot 33\cdot 20,97\cos A \Longrightarrow A = 19^{o}36'38''$$

$$B = 180^{o} - (A + C) = 132^{o}23'22''$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} = 34,485 \Longrightarrow S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 116,128\,cm^2$$

Problema 136 Un barco observa la luz de dos faros de la costa, que se encuentran separados por una distancia de 40 Km, y las luces inciden en dicho barco con un ángulo de 33º. El capitán sabe que se encuentra a 50 Km del faro más cercano. Se pide, calcular la distancia desde el barco al otro faro y los ángulos del triángulo formado.

Solución:



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Longrightarrow \frac{40}{\sin 33^{o}} = \frac{50}{\sin A} \Longrightarrow A = 42^{o}54'22''$$

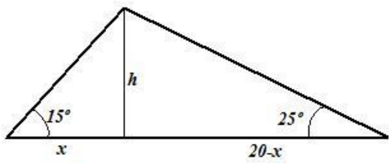
$$B = 180^{o} - (75^{o}54'22'') = 104^{o}5'38''$$

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} \Longrightarrow \frac{40}{\sin 33^{o}} = \frac{b}{\sin 104^{o}5'38''} \Longrightarrow c = 71,232\,\mathrm{Km}$$

Problema 137 En una llanura inmensa, Esteban y Mario se encuentran separados por una distancia de 20 Km. La aparición de un OVNI suspendido en el aire en la dirección que los separa les sorprende de forma asombrosa. Se comunican por sus teléfonos móviles la siguiente información: Esteban observa el artefacto bajo un ángulo de 15 º y Mario lo observa con un ángulo de 25º. ¿A qué altura se encuentra el OVNI?

Solución:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan 15^{o} = \frac{h}{x} \\ \tan 25^{o} = \frac{h}{20-x} \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 12,698\,\mathrm{Km} \\ h = 3,4\,\mathrm{Km} \end{array} \right.$$



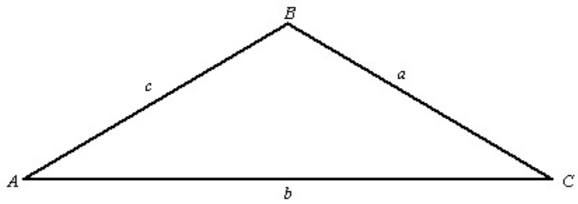
Problema 138 Resolver un triángulo no rectángulo del que se conocen: $a = 11$ cm, $b = 23$ cm y $C = 31^o$.
Solución:

$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C \Longrightarrow c^2 = 11^2+23^2-2\cdot 11\cdot 23\cdot\cos 31^o \Longrightarrow c = 14,7\ cm$$

$$a^2 = b^2+c^2-2ab\cos A \Longrightarrow 11^2 = 23^2+14,7^2-2\cdot 23\cdot 14,7\cos A \Longrightarrow A = 22^o38'27''$$

$$B = 180^o - (A + C) = 126^o21'33''$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} = 24,35 \Longrightarrow S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 65,08\,cm^2$$



Problema 139 Los alumnos de 1º de Bachillerato, del colegio Villaeuropa de Móstoles, se encuentran de excursión por Aranjuez, donde han ido a montar en globo aerostático.

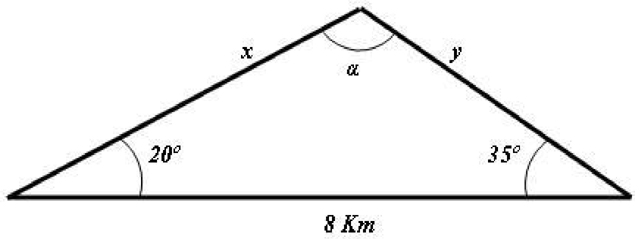
Se encuentran en una llanura enorme. Luis acaba de descender del globo y observa a Tania con unos anteojos, que está subiendo en otro globo en ese momento; por la lectura de su aparato de observación sabe que entre ellos dos hay una distancia de 8 Km. Otro globo se encuentra en el aire, circulando entre ellos dos rectilíneamente, en él van Cintia y Cristina. Luis lo ve bajo un ángulo 20º y Tania con un ángulo de 35º.

¿Qué distancia hay desde el globo hasta Tania y hasta Luis?

Solución:

$$\alpha = 180^o - 55^o = 125^o$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

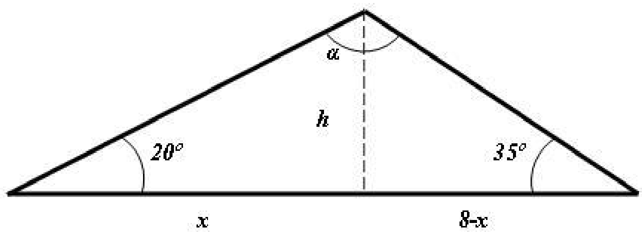


$$\frac{8}{\sin 125^{\text{o}}}=\frac{x}{\sin 35^{\text{o}}}\Longrightarrow x=5,6\,\text{Km}$$

$$\frac{8}{\sin 125^{\text{o}}}=\frac{y}{\sin 20^{\text{o}}}\Longrightarrow y=3,34\,\text{Km}$$

Problema 140 Si seguimos con el enunciado del problema anterior resulta que en un cierto momento el globo cae verticalmente, pero con suavidad, hasta llegar al suelo, debido a un problema técnico. Calcular la altura a la que volaba el globo, y la distacia a la que se encuentra el globo de Luis y de Tania, después de ese aterrizaje forzoso.

Solución:



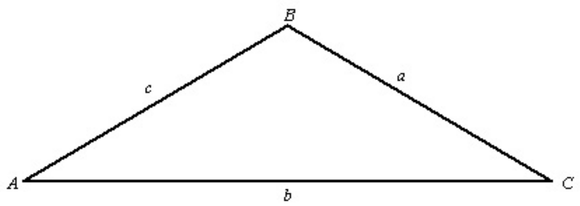
$$\left\{\begin{array}{l}\tan 35^{\text{o}}=\frac{h}{8-x}\\ \tan 20^{\text{o}}=\frac{h}{x}\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=5,25\,\text{Km de Luis o } 2,74\,\text{Km de Tania}\\ h=1,91\,\text{Km}\end{array}\right.$$

Problema 141 Resolver un triángulo no rectángulo del que se conocen: $a=12$ cm, $b=25$ cm y $C=36^{\text{o}}$.

Solución:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C\Longrightarrow c^2=12^2+25^2-2\cdot 12\cdot 25\cdot\cos 36^{\text{o}}\Longrightarrow c=16,84\ cm$$

$$a^2=b^2+c^2-2ab\cos A\Longrightarrow 12^2=25^2+16,84^2-2\cdot 25\cdot 16,84\cos A\Longrightarrow A=24^{\text{o}}45'42''$$

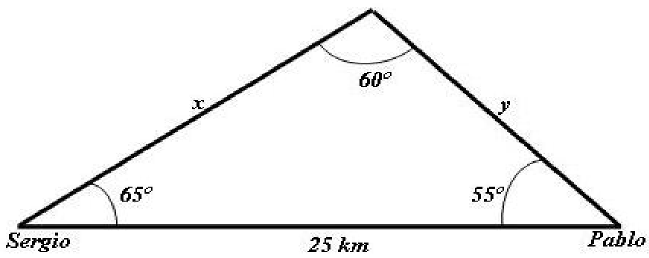


$$B = 180^o - (A + C) = 119^o 14' 18''$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} = 26,92 \Longrightarrow S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 88,166\, cm^2$$

Problema 142 El primer día de clase después de unas vacaciones los alumnos de 1º de Bachillerato se cuentan sus aventuras vacacionales. Entre estas historias hay alguna muy poco creìble, pero hay que demostrarlo. La más sorprendente fue la de los náufragos: Sergio y Pablo se encuentran separados por una distancia rectilínea de 25 Km en medio del mar. Están alojados en balsas salvavidas. La suerte se ha aliado con ellos y han sido avistados por una avioneta que, en estos momentos, se encuentra entre ellos y en esa línea recta. Sergio observa la avioneta con un ángulo de 65º mientras que Pablo la ve bajo un ángulo de 55º. Para analizar la situación se pide calcular la distancia que, en ese momento, hay desde cada uno de ellos a la avioneta.

Solución:



$$\alpha = 180^o - 120^o = 60^o$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

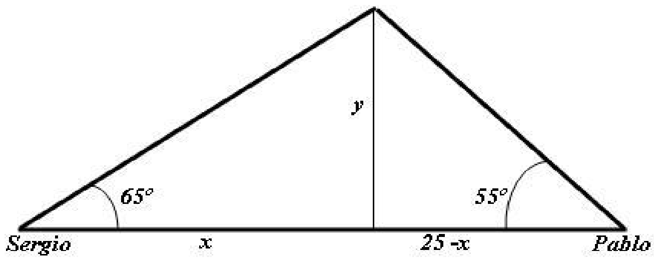
$$\frac{25}{\sin 60^o} = \frac{x}{\sin 55^o} \Longrightarrow x = 23,64\,\text{Km}$$

$$\frac{25}{\sin 60^o} = \frac{y}{\sin 65^o} \Longrightarrow y = 26,16\,\text{Km}$$

Problema 143 Seguimos con el enunciado del problema anterior y no tenemos en cuenta sus resultados. En un cierto momento la avioneta suelta un paquete de supervivencia (el único que lleva) que suponemos cae verticalmente entre estos dos alumnos. Para analizar la situación se pide calcular la altura desde la que la avioneta suelta el objeto y la distancia que tienen que recorrer Sergio y Pablo para llegar al paquete.

Con los datos obtenidos debemos preguntarnos: ¿Nos han contado una trola?

Solución:



$$\left\{\begin{array}{l}\tan 65^{\circ}=\frac{y}{x}\\ \tan 55^{\circ}=\frac{y}{25-x}\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=9,9916\,\text{Km de Sergio o } 15,0084\,\text{Km de Pablo}\\ y=21,431\,\text{Km}\end{array}\right.$$

Es una imaginativa trola.

2.2. Geometría analítica

2.2.1. Vectores

Problema 144 Hallar todos los vectores perpendiculares a $\overrightarrow{u} = (-3, -4)$ que tengan módulo 20.

Solución:
Sea $\overrightarrow{v} = (x, y)$ un vector perpendicular a $\overrightarrow{u} = (-3, -4)$. Lo primero que pensamos es que su producto escalar debe ser cero, es decir, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$, como el espacio es ortonormal, nos quedaría que $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (-3, -4) \cdot (x, y) = -3x - 4y = 0$
Es trivial comprobar que, en esta ecuación, para cada valor que apliquemos a una de las variables obtendríamos otro valor para la otra. Me voy a limitar a las soluciones enteras.
Una solución posible sería $x = 4$ e $y = -3$, es decir: $\overrightarrow{v} = (4, -3)$.
Otra solución posible sería $x = -4$ e $y = 3$, es decir: $\overrightarrow{v} = (-4, 3)$
Claro está, que estos vectores así obtenidos deben ser perpendiculares al vector $\overrightarrow{u}$, lo que nos queda es pasarlos a módulo 20. Para ello voy a seguir dos pasos, primero los pasaré a módulo 1 y luego los pasaré a módulo 20.
Para pasar $\overrightarrow{v}$ a módulo 1 aplicamos la siguiente fórmula: $v' = \frac{\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|}$
Obtendríamos los siguientes vectores:
$\overrightarrow{v_1'} = (\frac{4}{5}, \frac{-3}{5})$
$\overrightarrow{v_2'} = (\frac{-4}{5}, \frac{3}{5})$
Para pasarlos a módulo 20 lo único que tendremos que hacer es multiplicar por 20: y nos quedaría:
$\overrightarrow{w_1} = 20 \cdot (\frac{4}{5}, \frac{-3}{5}) = (16, -12)$
$\overrightarrow{w_2} = 20 \cdot (\frac{4}{5}, \frac{-3}{5}) = (-16, 12)$

Problema 145 Sean $A(-1, -2)$, $B(3, 1)$ y $C(4, 6)$, cuatro vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide:

1. Calcular el cuarto vértice D.
2. La longitud de sus lados.
3. Los ángulos que forman.
4. El centro.
5. Encontrar un vector de módulo 7 que sea perpendicular a $\overrightarrow{AB}$.

Solución:

1. $D = A + \overrightarrow{AD} = A + \overrightarrow{BC} = (-1, -2) + (1, 5) = (0, 3)$

2. $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16+9} = 5$, $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$

3. $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|} = \dfrac{19}{5\sqrt{26}} \Longrightarrow \alpha = 41^o49'12'', \quad \beta = 138^o10'48''$

4. Centro$\left(\dfrac{3}{2}, 2\right)$

5. $\overrightarrow{AB} = (4,3) \Longrightarrow (3,-4)$ es un vector perpendicular a él.

   $\overrightarrow{v} = \dfrac{(3,-4)}{|(3,-4)|} = \left(\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5}\right)$ tiene módulo 1 y es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$.

   $\overrightarrow{w} = 7\cdot\left(\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5}\right) = \left(\dfrac{21}{5}, -\dfrac{28}{5}\right)$ tiene módulo 7 y es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$; otro podría ser $\left(-\dfrac{21}{5}, \dfrac{28}{5}\right)$.

Problema 146 Sean $A(-1,-1)$, $B(3,-2)$ y $C(5,3)$ tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide:

1. Calcular el cuarto vértice D.
2. La longitud de sus lados.
3. Los ángulos que forman.
4. Su centro.
5. Encontrar un vector de módulo 9 que sea perpendicular a $\overrightarrow{AB}$.

Solución:

1. $D = A + \overrightarrow{BC} = (-1,-1) + (2,5) = (1,4)$.

2. $|\overrightarrow{AB}| = |(4,-1)| = \sqrt{17}$ y $|\overrightarrow{AD}| = |(2,5)| = \sqrt{29}$

3. $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|} = \dfrac{3}{\sqrt{17}\sqrt{29}} \Longrightarrow \alpha = 82^o14'5''$ y $\beta = 97^o45'54''$

4. $M\left(\dfrac{-1+5}{2}, \dfrac{-1+3}{2}\right) = M(2,1)$

5. Un vector perpendicular a $\overrightarrow{AB} = (4,-1)$ puede ser el vector $\overrightarrow{w} = (1,4)$ y tendremos:

   $$\overrightarrow{u} = \frac{9}{|\overrightarrow{w}|}\cdot\overrightarrow{w} = \left(\frac{9}{\sqrt{17}}, \frac{36}{\sqrt{17}}\right).$$

Problema 147 Sean $A(-1,0)$, $B(2,-3)$ y $C(4,6)$ tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide:

1. Calcular el cuarto vértice D.
2. La longitud de sus lados.
3. Los ángulos que forman.
4. Su centro.
5. Encontrar un vector de módulo 7 que sea perpendicular a $\overrightarrow{AB}$.

Solución:

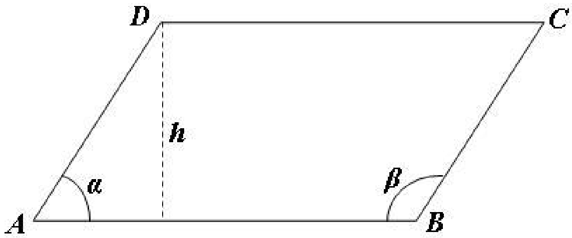
1. $D = A + \overrightarrow{BC} = (-1,0) + (2,9) = (1,9)$.
2. $|\overrightarrow{AB}| = |(3,-3)| = \sqrt{18}$ y $|\overrightarrow{AD}| = |(2,9)| = \sqrt{85}$
3. $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|} = \dfrac{-21}{\sqrt{18}\sqrt{85}} \Longrightarrow \alpha = 122^{o}28'17''$ y $\beta = 57^{o}31'43''$
4. $M\left(\dfrac{3}{2}, 3\right)$
5. Un vector perpendicular a $\overrightarrow{AB} = (3,-3)$ puede ser el vector $\overrightarrow{w} = (3,3)$ y tendremos:

   $$\overrightarrow{u} = \frac{7}{|\overrightarrow{w}|}\cdot\overrightarrow{w} = \left(\frac{21}{\sqrt{18}}, \frac{21}{\sqrt{18}}\right).$$

Problema 148 Sean $A(0,-1)$, $B(5,1)$ y $C(7,5)$ tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide:

1. Calcular el cuarto vértice D.
2. La longitud de sus lados.
3. Los ángulos que forman.
4. Su centro.
5. El punto simétrico de A respecto de C
6. Dos vectores perpendiculares al $\overrightarrow{AB}$ que tengan módulo 8.
7. Calcular la altura del paralelogramo sobre la base que determinan los puntos A y B.
8. Calocular el área del paralelogramo.
9. Calcular las rectas que determinan sus lados.
10. Calcular las rectas de sus diagonales. ¿Se cortaran en el punto que habíamos calculado anteriormente?

Solución:



1. $D = A + \overrightarrow{BC} = (0, -1) + (2, 4) = (2, 3)$.
2. $|\overrightarrow{AB}| = |(5, 2)| = \sqrt{29}$ y $|\overrightarrow{AD}| = |(2, 4)| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
3. $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \dfrac{18}{2\sqrt{5}\sqrt{29}} \Longrightarrow \alpha = 41^o38'1''$ y $\beta = 138^o21'59''$
4. $M\left(\dfrac{7}{2}, 2\right)$
5. $C = \dfrac{A + A'}{2} \Longrightarrow A' = 2C - A = (14, 11)$
6. $\overrightarrow{AB} = (5, 2)$ y $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{29} \Longrightarrow \overrightarrow{u} = \frac{8}{\sqrt{29}}(5, 2)$ es un vector con la misma dirección y sentido que el $\overrightarrow{AB}$, pero con módulo 8. Dos vectores perpendiculares a este y con el mismo módulo serán:
$$\overrightarrow{v_1} = \left(\frac{16}{\sqrt{29}}, -\frac{40}{\sqrt{29}}\right) \quad \overrightarrow{v_2} = \left(-\frac{16}{\sqrt{29}}, \frac{40}{\sqrt{29}}\right)$$
7. $$\sin\alpha = \frac{h}{|\overrightarrow{AD}|} \Longrightarrow h = |\overrightarrow{AD}| \cdot \sin\alpha = 2,97\ u$$
8. $S = |\overrightarrow{AB}| \cdot h = 15,99\ u^2$
9. $$\text{Puntos } A \text{ y } B\ \ r_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (5, 2) \\ A(0, -1) \end{array} \right. \Longrightarrow 2x - 5y - 5 = 0$$
$$\text{Puntos } A \text{ y } D\ \ r_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AD} = (2, 4) \\ A(0, -1) \end{array} \right. \Longrightarrow 2x - y - 1 = 0$$
$$\text{Puntos } B \text{ y } C\ \ r_3 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{BC} = (5, 2) \\ B(5, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow 2x - y - 9 = 0$$

$$\text{Puntos } C \text{ y } D \;\; r_4 : \begin{cases} \overrightarrow{DC} = (5,2) \\ D(2,3) \end{cases} \Longrightarrow 2x - 5y + 11 = 0$$

10.

$$d_1 : \begin{cases} \overrightarrow{AC} = (7,6) \\ A(0,-1) \end{cases} \Longrightarrow 6x - 7y - 7 = 0$$

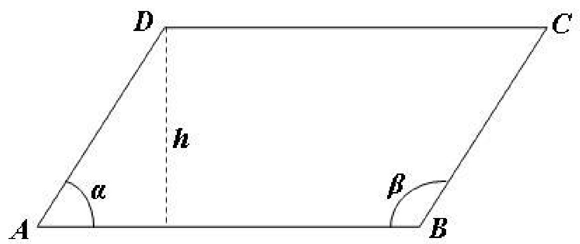
$$d_2 : \begin{cases} \overrightarrow{BD} = (-3,2) \\ D(2,3) \end{cases} \Longrightarrow 2x + 3y - 13 = 0$$

$$\begin{cases} 6x - 7y - 7 = 0 \\ 2x + 3y - 13 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 7/2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Problema 149 Sean $A(-1,-2)$, $B(3,1)$ y $C(5,7)$ tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide:

1. Calcular el cuarto vértice D.
2. La longitud de sus lados.
3. Los ángulos que forman.
4. Su centro.
5. La altura sobre el lado $\overline{AB}$.
6. Su área.
7. El punto simétrico de A respecto de C
8. Un vector con la misma dirección y sentido que $\overrightarrow{AB}$ con módulo 9.
9. Dividir el segmento $\overline{AC}$ en tres segmentos iguales.
10. Calcular un vector perpendicular a $\overrightarrow{BC}$

Solución:



1. $D = A + \overrightarrow{BC} = (-1, -2) + (2, 6) = (1, 4)$.

2. $|\overrightarrow{AB}| = |(4, 3)| = \sqrt{25} = 5$ y $|\overrightarrow{AD}| = |(2, 6)| = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

3. $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \dfrac{26}{10\sqrt{10}} \Longrightarrow \alpha = 34^{o}41'43''$ y $\beta = 145^{o}18'46''$

4. $M\left(2, \dfrac{5}{2}\right)$

5. $$\sin\alpha = \frac{h}{|\overrightarrow{AD}|} \Longrightarrow h = |\overrightarrow{AD}| \cdot \sin\alpha = 3,6\ u$$

6. $S = |\overrightarrow{AB}| \cdot h = 18\ u^2$

7. $C = \dfrac{A + A'}{2} \Longrightarrow A' = 2C - A = (11, 16)$

8. $\overrightarrow{AC} = (6, 9)$ y $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{117} = 3\sqrt{13} \Longrightarrow \overrightarrow{u} = \dfrac{9}{3\sqrt{13}}(6, 9) = \left(\dfrac{18}{\sqrt{13}}, \dfrac{27}{\sqrt{13}}\right)$ es un vector con la misma dirección y sentido que el $\overrightarrow{AC}$, pero con módulo 9.

9. $$\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = (2, 3), \quad \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = (4, 6)$$
$$A' = A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = (-1, -2) + (2, 3) = (1, 1)$$
$$A' = A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = (-1, -2) + (4, 6) = (3, 4)$$

10. $$\overrightarrow{BC} = (2, 6) \Longrightarrow \overrightarrow{u} = (6, -2)$$

Problema 150 Sean $A(-1, -1)$, $B(2, -2)$ y $C(4, 5)$ tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide:

1. Calcular el cuarto vértice D.
2. La longitud de sus lados.
3. Los ángulos que forman.
4. Decidir de que figura geométrica se trata.
5. Su centro.
6. La altura sobre el lado $\overline{AB}$.

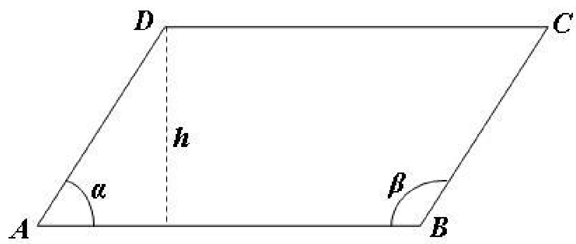
7. Su área.

8. El punto simétrico de A respecto de C

9. Un vector perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ con módulo 9.

10. Dividir el segmento $\overline{AC}$ en tres segmentos iguales.

Solución:



1. $D = A + \overrightarrow{BC} = (-1,-1) + (2,7) = (1,6)$.

2. $|\overrightarrow{AB}| = |(3,-1)| = \sqrt{10}$ y $|\overrightarrow{AD}| = |(2,7)| = \sqrt{53}$

3. $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|} = \dfrac{-1}{\sqrt{530}} \Longrightarrow \alpha = 92^{o}29'22''$ y $\beta = 87^{o}30'38''$

4. Se trata de un paralelogramo, pero no es una figura concreta.

5. $M\left(\dfrac{3}{2}, 2\right)$

6. $$\sin\alpha = \frac{h}{|\overrightarrow{AD}|} \Longrightarrow h = |\overrightarrow{AD}|\cdot\sin\alpha = 7,273\ u$$

7. $S = |\overrightarrow{AB}|\cdot h = 23\ u^2$

8. $C = \dfrac{A+A'}{2} \Longrightarrow A' = 2C - A = (9,11)$

9. $\overrightarrow{AB} = (3,-1) \perp \overrightarrow{u} = (1,3)$ y $|w| = \left(\dfrac{9}{\sqrt{10}}, \dfrac{27}{\sqrt{10}}\right)$ es un vector perpendicular al $\overrightarrow{AB}$, pero con módulo 9.

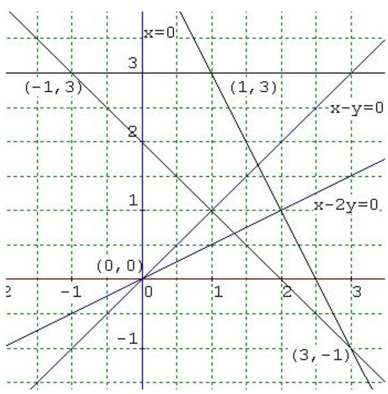
10.
$$\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \left(\frac{5}{3}, 2\right)$$
$$A_1 = A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = (-1,-1) + \left(\frac{5}{3}, 2\right) = \left(\frac{2}{3}, 1\right)$$
$$A_2 = A_1 + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \left(\frac{2}{3}, 1\right) + \left(\frac{5}{3}, 2\right) = \left(\frac{7}{3}, 3\right)$$
$$C = A_3 = A_2 + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \left(\frac{7}{3}, 3\right) + \left(\frac{5}{3}, 2\right) = (4,5)$$

2.2.2. Rectas

Problema 151 Dado el triángulo de vértices $A(1,3)$, $B(3,-1)$, $C(-1,3)$ halla la ecuación de sus tres mediatrices y comprueba que se cortan en un único punto, llamado circuncentro.
Solución:

Si queremos calcular la mediatriz que separa a dos puntos podemos pensar de la siguiente manera: *la mediatriz entre dos puntos es el conjunto de puntos (x,y) tales que equidistan de los dos.* Es decir , entre los puntos A y B la mediatriz será el conjunto de puntos $P(x,y)$ tales que $d(P,A) = d(P,B)$. Partiendo de este concepto es bastante sencillo la obtención de estas rectas.

Calculamos la mediatriz que hay entre A y B, es decir, $d(P,A) = d(P,B)$:
$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2}$$
$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = (x-3)^2 + (y+1)^2$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1$$
$$4x - 8y = 0 \implies x - 2y = 0$$



Calculamos la mediatriz que hay entre B y C, es decir, $d(P,B) = d(P,C)$:

$$\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2} = \sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}$$

$$(x-3)^2+(y+1)^2 = (x+1)^2+(y-3)^2$$

$$x^2-6x+9+y^2+2y+1 = x^2+2x+1+y^2-6y+9$$

$$-8x+8y=0 \implies x-y=0$$

Calculamos la mediatriz que hay entre C y A, es decir, $d(P,C) = d(P,A)$:

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2} = \sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}$$

$$(x+1)^2+(y-3)^2 = (x-1)^2+(y-3)^2$$

$$x^2+2x+1+y^2-6y+9 = x^2-2x+1+y^2-6y+9$$

$$4x=0 \implies x=0$$

Es decir, las mediatrices serían: $x-2y=0$, $x-y=0$ y $x=0$. Ahora buscamos el punto de intersección. En este caso es bastante sencillo encontrarle ya que una de las ecuaciones es $x=0$, y por simple sustitución comprobamos que el punto buscado(el circuncentro) es el origen de coordenadas $O(0,0)$.

Problema 152 sean $A(-2,-2)$, $B(5,1)$ y $C(1,5)$ los vértices de un triángulo, se pide:

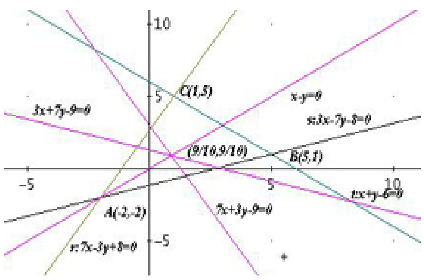
1. Las ecuaciones de las rectas que unen sus lados.

2. La longitud de sus lados.

3. Las ecuaciones de sus mediatrices.

4. El circuncentro.

Solución:



1.

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (3,7) \\ P_r(1,5) \end{cases} \Longrightarrow r : 7x - 3y + 8 = 0$$

$$s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (7,3) \\ P_s(5,1) \end{cases} \Longrightarrow s : 3x - 7y - 8 = 0$$

$$t : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (-4,4) \\ P_r(5,1) \end{cases} \Longrightarrow t : x + y - 6 = 0$$

2. $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$
   $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{49+9} = \sqrt{58}$
   $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$

3. La mediatriz del segmento $\overline{AC}$ es:

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-5)^2} \Longrightarrow 3x + 7y - 9 = 0$$

   La mediatriz del segmento $\overline{AB}$ es:

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-1)^2} \Longrightarrow 7x + 3y - 9 = 0$$

   La mediatriz del segmento $\overline{BC}$ es:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-1)^2} \Longrightarrow x - y = 0$$

4. El circuncentro será la solución del sistema

$$\begin{cases} 3x+ & 7y & -9 = 0 \\ x- & y & = 0 \end{cases} \Longrightarrow \left(\frac{9}{10}, \frac{9}{10}\right)$$

Problema 153 Calcula la distancia del punto $P(2,3)$ a la recta r en los siguientes casos:

1. $r : \ y = 3x - 2$
2. $r : \begin{cases} \text{x=} & \text{1+} & \text{2t} \\ \text{y=} & \text{2-} & \text{t} \end{cases}$
3. $r : \ 3x + 4y - 5 = 0$

Solución:

1. $y = 3x - 2 \Longrightarrow 3x - y - 2 = 0$ (Ecuación general de la recta)

$$d(P, r) = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) - 2|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$= 0,3162$

2.

$$\begin{cases} x= & 1+ & 2t \\ y= & 2- & t \end{cases} \Longrightarrow t = \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} \Longrightarrow -x + 1 = 2y - 4 \Longrightarrow$$

$x + 2y - 5 = 0$ (Ecuación general de la recta)

$$d(P, r) = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$= 1,3416$

3. $3x + 4y - 5 = 0$ (Ecuación general de la recta)

$$d(P, r) = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{13}{5} = 2,6$$

Problema 154 Calcula el ángulo formado por las rectas:

1.

$$r_1 : \; 3x - y + 1 = 0$$

$$s_1 : \; 2x + 3y + 4 = 0$$

2.

$$r_1 : \begin{cases} x= & 2+ & \lambda \\ y= & 2- & 3\lambda \end{cases} \quad r_2 : \; \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2}$$

Solución:

1. Como las rectas están definidas por su ecuación general, ya estamos en condiciones de aplicar la fórmula:

$$\cos\alpha = \frac{|u_1 \cdot u_1' + u_2 \cdot u_2'|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{u_1'^2 + u_2'^2}} = \frac{|3 \cdot 2 + (-1) \cdot 3|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{13}}$$

$= 0,2631 \;\; \Longrightarrow \alpha = 74^{\circ}44'42''$

2.

$$r_1: \left\{\begin{array}{lll} \text{x=} & 2+ & \lambda \\ \text{y=} & 2\text{-} & 3\lambda \end{array}\right. \Longrightarrow \lambda = \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-3} \Longrightarrow 3x + y - 8 = 0$$

(Ecuación general de la recta)

$$r_2: \ \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} \Longrightarrow 2x - 3y - 8 = 0$$

(Ecuación general de la recta)

$$\cos\alpha = \frac{|u_1 \cdot u_1' + u_2 \cdot u_2'|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{u_1'^2 + u_2'^2}} = \frac{|3\cdot 2 + 1\cdot(-3)|}{\sqrt{3^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{13}}$$

$$= 0,2631 \quad \Longrightarrow \alpha = 74^{\circ}44'42''$$

Problema 155 Los puntos $A(-2,-1)$, $B(1,4)$ y $C(3,1)$ forman un triángulo, se pide:

1. Calcular el circuncentro (punto en el que se cortan las mediatrices).
2. Calcular sus ángulos y la longitud de sus lados.
3. Calcular la altura del vertice B.

Solución:

1. Calculamos la mediatriz del lado $\overline{AB}$:

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} \Longrightarrow 3x + 5y - 6 = 0$$

Calculamos la mediatriz del lado $\overline{BC}$:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} \Longrightarrow 4x - 6y + 7 = 0$$

El circuncentro será la solución del sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x + 5y - 6 = 0 \\ 4x - 6y + 7 = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left(\frac{1}{38}, \frac{45}{38}\right)$$

2. *a*) Ahora calculamos sus lados:

$$\overrightarrow{AB} = (1,4) - (-2,-1) = (3,5) \Longrightarrow \overrightarrow{BA} = (-3,-5)$$

$$\overrightarrow{AC} = (3,1) - (-2,-1) = (5,2) \Longrightarrow \overrightarrow{CA} = (-5,-2)$$

$$\overrightarrow{BC} = (3,1) - (1,4) = (2,-3) \Longrightarrow \overrightarrow{BC} = (-2,3)$$

La longitud del lado $\overline{AB}$:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}u$$

La longitud del lado $\overline{AC}$:

$$|\overline{AC}| = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}u$$

La longitud del lado $\overline{AB}$:

$$|\overline{BC}| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}u$$

b) Ahora calculamos los ángulos: Sea α el ángulo que forman $\widehat{BAC}$:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \frac{15+10}{\sqrt{34}\sqrt{29}} = 0,7961 \Longrightarrow \alpha = 37^{o}14'5''$$

Sea β el ángulo que forman $\widehat{ABC}$:

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|} = \frac{-6+15}{\sqrt{34}\sqrt{13}} = 0,428086 \Longrightarrow \beta = 64^{o}39'14''$$

Sea γ el ángulo que forman $\widehat{BCA}$:

$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CB}|\cdot|\overrightarrow{CA}|} = \frac{10-6}{\sqrt{13}\sqrt{29}} = 0,2060 \Longrightarrow \gamma = 78^{o}6'41''$$

3. La altura será la distancia del punto B a la recta r que pasa por los puntos A y C:

$$r : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AC} = (3,1) - (-2,-1) = (5,2) \\ C(3,1) \end{array}\right. \Longrightarrow 2x - 5y - 1 = 0$$

$$d(B,r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|2\cdot 1 + (-5)4 + (-1)|}{\sqrt{4+25}} = \frac{19\sqrt{29}}{29}$$

Problema 156 Calcular el ángulo que forman las rectas

a) $r : \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+1}{3}, \quad s : 2x + y - 1 = 0$

b) $r : \left\{\begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \end{array}\right. \quad s : 3x + y + 1 = 0$

Solución:

a) $r : 3x + 2y - 1 = 0$, $s : 2x + y - 1 = 0$

$$\cos\alpha = \frac{6+2}{\sqrt{65}} = 0,992277 \Longrightarrow \alpha = 7^{o}7'32''$$

b) $r : x + y - 3 = 0$, $s : 3x + y + 1 = 0$

$$\cos\alpha = \frac{3+1}{\sqrt{20}} = 0,894427 \Longrightarrow \alpha = 26^{o}33'54''$$

Problema 157 Calcular la distancia del punto $A(3, -1)$ a las rectas:

a) $r : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{2}$

b) $r : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2\lambda \end{cases}$

c) $r : 2x + 3y - 3 = 0$

Solución:

a) $r : 2x - 3y - 8 = 0$

$$d(A, r) = \frac{|2\cdot 3 - 3\cdot(-1) - 8|}{\sqrt{4+9}} = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

b) $r : 2x + y - 2 = 0$

$$d(A, r) = \frac{|2\cdot 3 + 1\cdot(-1) - 2|}{\sqrt{4+1}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

c) $r : 2x + 3y - 3 = 0$

$$d(A, r) = \frac{|2\cdot 3 + 3\cdot(-1) - 3|}{\sqrt{4+9}} = 0$$

Problema 158 Expresa de todas las maneras que conozcas la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(1, 0)$ y $B(4, 5)$, calcula después el ángulo que forma con el eje de abcisas.

Solución:

Sea $\overrightarrow{AB} = (4, 5) - (1, 0) = (3, 5)$ tendremos:

- $r : (x, y) = (1, 0) + \lambda(3, 5)$ ecuación vectorial
- ecuación paramétrica

$$r : \begin{cases} x = & 1 + 3\lambda \\ y = & 5\lambda \end{cases}$$

- Ecuación continua
$$\frac{x-1}{3}=\frac{y}{5}$$
- $5x-3y-5=0$ ecuación general.
- $y=\frac{5}{3}x-\frac{5}{3}$ ecuación explícita.
- $y=\frac{5}{3}(x-1)$ ecuación punto pendiente.

$$m=\tan\alpha=\frac{5}{3}\Longrightarrow \alpha=59^{o}2'11''$$

Problema 159 Se pide:

1. Calcular la distancia del punto $A(3,7)$ a la recta $r:\left\{\begin{array}{l} x=1-\lambda\\ y=2+\lambda\end{array}\right.$
2. Calcular el ángulo que forman las rectas
$$r:\frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{2},\quad s:3x+y-1=0$$

Solución:

1. $r:x+y-3=0$, $d(A,r)=\frac{|3+7-3|}{\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$
2. $r:2x+y=0$, $s:3x+y-1=0$
$$\cos\alpha=\frac{6+1}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=\frac{7}{\sqrt{50}}\Longrightarrow \alpha=8^{o}7'48''$$

Problema 160 Dada la recta $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{2}$ encontrar los puntos de ella que distan 3 unidades del origen de coordenadas.

Solución:
$$\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{2}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=3+\lambda\\ y=-2+2\lambda\end{array}\right.$$
La circunferencia de centro el origen y radio 3 es $x^2+y^2=9$.
$$(3+\lambda)^2+(-2+2\lambda)^2=9\Longrightarrow \lambda=-2,\ \lambda=\frac{12}{5}$$
Los puntos son $(-1,6)$ y $\left(\frac{27}{5},\frac{14}{5}\right)$

Problema 161 Sean $A(-1,-2)$, $B(3,1)$ y $C(4,6)$, los vértices consecutivos de un triángulo. Se pide:

1. Las ecuaciones de las rectas que determinan sus lados.
2. Las ecuaciones de dos de sus mediatrices.
3. El circuncentro.

Solución:

1. r une A con B $r: 3x-4y-5=0$

   s une A con C $s: 8x-5y-2=0$

   t une B con C $t: 5x-y-14=0$

2. Entre A y B $8x+6y-5=0$

   Entre C y B $x+5y-21=0$

   Entre A y C $10x+16y-47=0$

3. El circuncentro es $\left(\dfrac{101}{34},\dfrac{163}{34}\right)$

Problema 162 Se pide:

1. Calcular la distancia del punto $A(2,-5)$ a la recta $r: \left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=-1+\lambda \end{array}\right.$
2. Calcular el ángulo que forman las rectas
$$r: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1} \text{ y } s: x-2y+1=0$$

Solución:

1. $r: \left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=-1+\lambda \end{array}\right. \Longrightarrow x-y-2=0$
$$d(A,r)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|2+5-2|}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$
2. Tenemos $r: x+2y+1=0$ y $s: x-2y+1=0$
$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|}=-\frac{3}{5}\Longrightarrow \alpha=126^{\mathrm{o}}52'11''$$

Problema 163 Sean $A(-1,0)$, $B(3,-1)$ y $C(0,5)$, los vértices consecutivos de un triángulo. Se pide:

1. Las ecuaciones de las rectas que determinan sus lados.
2. Las ecuaciones de dos de sus mediatrices.
3. El circuncentro.

Solución:

1. r une A con B $r: 5x - y + 5 = 0$

   s une A con C $s: x + 4y + 1 = 0$

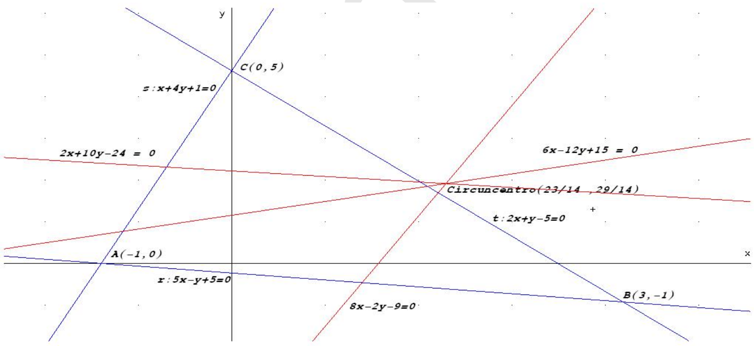
   t une B con C $t: 2x + y - 5 = 0$

2. Entre A y B $8x - 2y - 9 = 0$

   Entre C y B $6x - 12y + 15 = 0$

   Entre A y C $2x + 10y - 24 = 0$

3. El circuncentro es $\left(\frac{23}{14}, \frac{29}{14}\right)$



Problema 164 Se pide:

1. Calcular la distancia del punto $A(-1,-4)$ a la recta $r: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{1}$
2. Calcular el ángulo que forman las rectas

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + \lambda \end{cases} \quad \text{y} \quad s: x - 2y + 1 = 0$$

Solución:

1. $r : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{1} \Longrightarrow x - 2y + 5 = 0$

$$d(A, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-1 + 8 + 5|}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

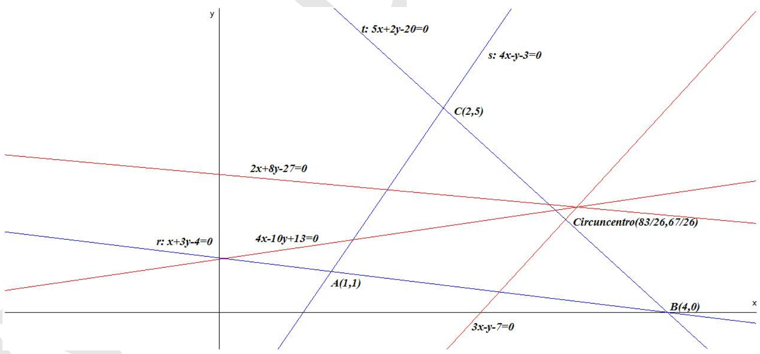
2. Tenemos $r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow x - y - 2 = 0$ y $s : x - 2y + 1 = 0$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|} = \frac{3}{\sqrt{10}} \Longrightarrow \alpha = 18^{\circ}26'1''$$

Problema 165 Sean $A(1, 1)$, $B(4, 0)$ y $C(2, 5)$, los vértices consecutivos de un triángulo. Se pide:

1. Las ecuaciones de las rectas que determinan sus lados.
2. Las ecuaciones de dos de sus mediatrices.
3. El circuncentro.

Solución:



1. r une A con B $r : x + 3y - 4 = 0$

   s une A con C $s : 4x - y - 3 = 0$

   t une B con C $t : 5x + 2y - 20 = 0$

2. Entre A y B $3x - y - 7 = 0$

   Entre C y B $4x - 10y + 13 = 0$

   Entre A y C $2x + 8y - 27 = 0$

3. El circuncentro es $\left(\frac{83}{26}, \frac{67}{26}\right)$

Problema 166 Sean $A(-1,1)$, $B(5,0)$ y $C(3,4)$, los vértices consecutivos de un triángulo. Se pide:

1. Las ecuaciones de las rectas que determinan sus lados.
2. Las ecuaciones de dos de sus mediatrices.
3. El circuncentro.

Solución:

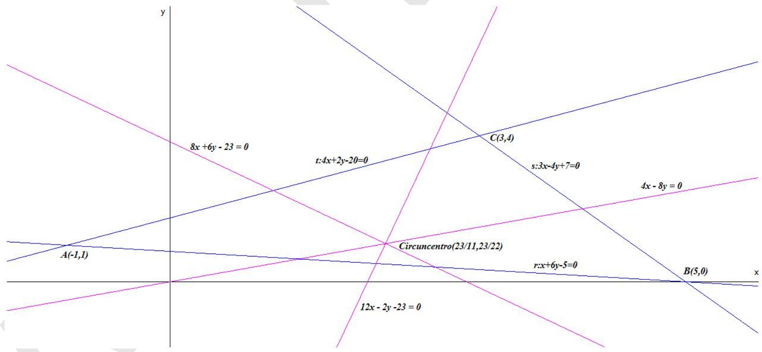
1. r une A con B $r : x + 6y - 5 = 0$

   s une A con C $s : 3x - 4y + 7 = 0$

   t une B con C $t : 2x + y - 10 = 0$
2. Entre A y B $12x - 2y - 23 = 0$

   Entre C y B $x - 2y = 0$

   Entre A y C $8x + 6y - 23 = 0$
3. El circuncentro es $\left(\frac{23}{11}, \frac{23}{22}\right)$



Problema 167 Encontrar todas las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(-1,3)$ y $B(5,2)$. Y calcular el ángulo que forma esta recta con el eje de abcisas.

Solución:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (6,-1) \\ A(-1,3) \end{cases}$$

- Vectorial: $(x, y) = (-1, 3) + \lambda(6, -1)$
- Paramétrica: $\begin{cases} x = -1 + 6\lambda \\ y = 3 - \lambda \end{cases}$
- Continua: $\dfrac{x+1}{6} = \dfrac{y-3}{-1}$
- General: $x + 6y - 17 = 0$
- Explícita: $y = -\dfrac{1}{6}x + \dfrac{17}{6}$
- Punto pendiente: $y - 3 = -\dfrac{1}{6}(x + 1)$
- Ángulo con el eje de abcisas: $m = \tan\alpha = -\dfrac{1}{6} \Longrightarrow \alpha = 170^{\circ}32'16''$

Problema 168 Dadas las rectas $r : 3x - y + 2 = 0$ y $s : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \end{cases}$, calcular el ángulo que forman.

Solución:

$$\begin{cases} r : 3x - y + 2 = 0 \Longrightarrow (3, -1) \\ s : x + y - 1 = 0 \Longrightarrow (1, 1) \end{cases} \Longrightarrow \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{20}} \Longrightarrow \alpha = 63^{\circ}26'1''$$

Problema 169 Calcular la distancia desde el punto $A(3, 1)$ a la recta $r : 3x - 8y - 5 = 0$

Solución:

$$d(A, r) = \frac{|9 - 8 - 5|}{\sqrt{9 + 64}} = \frac{4\sqrt{73}}{73}$$

Problema 170 Encontrar el punto simétrico de $A(1, -1)$ respecto de la recta $r : x + 3y - 2 = 0$.

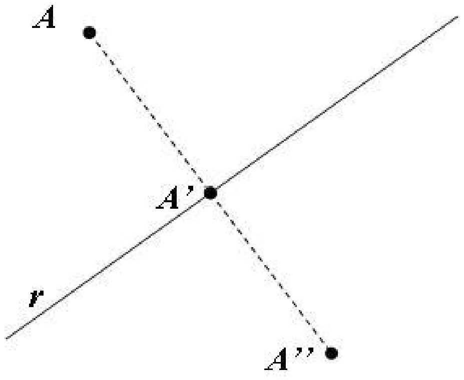
Solución:

- Calculamos una recta s perpendicular a r y que pase por A:

  $$3x - y + m = 0 \Longrightarrow 3 + 1 + m = 0 \Longrightarrow m = -4 \Longrightarrow 3x - y - 4 = 0$$

- Calculamos el punto de corte entre r y s:

  $$\begin{cases} r : x + 3y - 2 = 0 \\ s : 3x - y - 4 = 0 \end{cases} \Longrightarrow A'\left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)$$

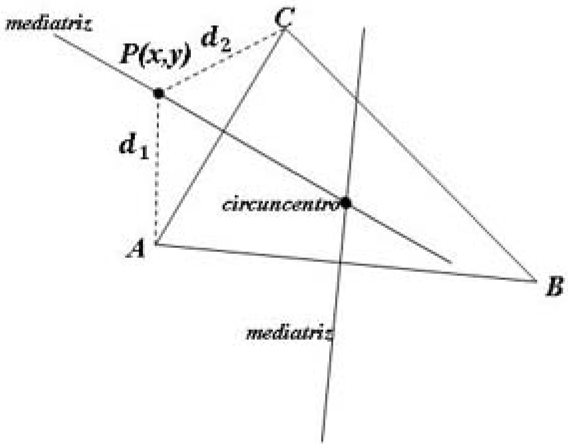


- El punto A' calculado es el punto medio entre el punto A y el punto A'' que tenemos que calcular:

$$\frac{A+A''}{2} = A' \Longrightarrow A'' = 2A' - A = \left(\frac{14}{5}, \frac{2}{5}\right) - (1,-1) = \left(\frac{9}{5}, \frac{7}{5}\right)$$

Problema 171 Si los puntos $A(1,0)$, $B(5,-2)$ y $C(4,6)$ tres vértices consecutivos de un triángulo, encontrar su circuncentro.

Solución:



- Mediatriz entre A y C:

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-6)^2} \Longrightarrow 6x + 12y - 51 = 0$$

- Mediatriz entre A y B:

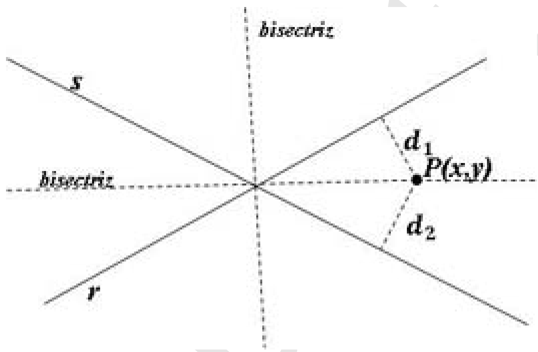
$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y+2)^2} \Longrightarrow 2x - y - 7 = 0$$

- Circuncentro:

$$\left\{\begin{array}{l} 6x + 12y - 51 = 0 \\ 2x - y - 7 = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left(\frac{9}{2}, 2\right)$$

Problema 172 Sean las rectas $r : 3x - y + 3 = 0$ y $s : x - 3y - 1 = 0$. Comprobar que se cortan y, en caso afirmativo, calcular las rectas bisectrices de sus ángulos.

Solución:



$$d(P, r) = d(P, s) \Longrightarrow \frac{|3x - y + 3|}{\sqrt{10}} = \frac{|x - 3y - 1|}{\sqrt{10}}$$

- $3x - y + 3 = x - 3y - 1 \Longrightarrow x + y + 2 = 0$
- $3x - y + 3 = -(x - 3y - 1) \Longrightarrow 2x - 2y + 1 = 0$

Problema 173 Encontrar todas las ecuaciones de la recta cuya ecuación general es $3x + y - 1 = 0$. Y calcular el ángulo que forma esta recta con el eje de abcisas.

Solución:

$$r : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, -3) \\ A(0, 1) \end{array}\right.$$

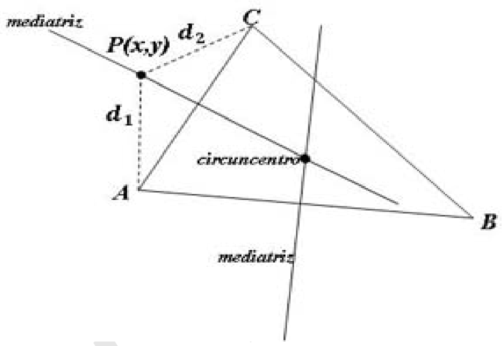
- Vectorial: $(x, y) = (0, 1) + \lambda(1, -3)$
- Paramétrica: $\left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 - 3\lambda \end{array}\right.$
- Continua: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y - 1}{-3}$

- General: $3x + y - 1 = 0$
- Explícita: $y = -3x + 1$
- Punto pendiente: $y - 1 = -3x$
- Ángulo con el eje de abcisas: $m = \tan\alpha = -\dfrac{1}{6} \Longrightarrow \alpha = 108^o 26' 6''$

Problema 174 Si los puntos $A(-1,0)$, $B(7,2)$ y $C(3,6)$ tres vértices consecutivos de un triángulo, se pide calcular:

1. Su circuncentro.
2. La altura de C sobre el lado $\overline{AB}$. (Distancia de C a la recta determinada por los puntos A y B.

Solución:



1. Calculamos dos de sus mediatrices:
   - Mediatriz entre A y B:
   $$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (y-2)^2} \Longrightarrow 4x + y - 13 = 0$$
   - Mediatriz entre A y C:
   $$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2} \Longrightarrow 2x + 3y - 11 = 0$$
   - Circuncentro:
   $$\left\{\begin{array}{l} 4x + y - 13 = 0 \\ 2x + 3y - 11 = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left(\frac{14}{5}, \frac{9}{5}\right)$$

2. Calculamos la recta que une A con B:

$$r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (8,2) \\ A(-1,0) \end{cases} \Longrightarrow r: x - 4y + 1 = 0$$

Calculo la distancia de $C(3,6)$ a la recta r:

$$d(C,r) = \frac{|3 - 24 + 1|}{\sqrt{1+16}} = \frac{20\sqrt{17}}{17}\, u$$

Problema 175 Sea el punto $A(3,6)$ y la recta $r: x - 2y + 5 = 0$. Se pide calcular:

1. Una recta paralela a r que pase por el punto A.
2. Una recta perpendicular a r que pase por el punto A.
3. El punto A'' simétrico de A respecto de la recta r.

Solución:

1. $x - 2y + \lambda = 0$ y como pasa por el punto $A \Longrightarrow 3 - 12 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 9$. La recta buscada es $x - 2y + 9 = 0$
2. $2x + y + \lambda = 0$ y como pasa por el punto $A \Longrightarrow 6 + 6 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -12$. La recta buscada es $2x + y - 12 = 0$
3. Calculamos A'' simétrico de A respecto de la recta r:
   - Calculamos una recta s perpendicular a r y que pase por A, calculada en el apartado anterior.
   - Calculamos el punto de corte entre r y s:

   $$\begin{cases} r: x - 2y + 5 = 0 \\ s: 2x + y - 12 = 0 \end{cases} \Longrightarrow A'\left(\frac{19}{5}, \frac{22}{5}\right)$$

   - El punto A' calculado es el punto medio entre el punto A y el punto A'' que tenemos que calcular:

   $$\frac{A + A''}{2} = A' \Longrightarrow A'' = 2A' - A = \left(\frac{38}{5}, \frac{44}{5}\right) - (3,6) = \left(\frac{23}{5}, \frac{14}{5}\right)$$

Problema 176 Dadas las rectas $r: x + 5y - 2 = 0$ y $s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \end{cases}$, se pide calcular:

1. Su punto de corte.

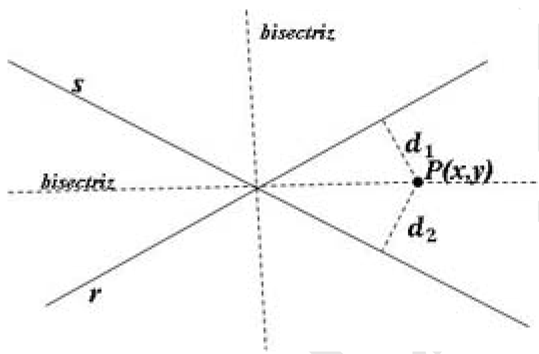
2. Ángulo que forman.
3. Sus bisectrices.

Solución:

1. $(1+\lambda)+5(2\lambda)-2=0 \Longrightarrow \lambda=\dfrac{1}{11} \Longrightarrow \left(\dfrac{12}{11}, \dfrac{2}{11}\right)$

2.

$$\left\{\begin{array}{l} r: x+5y-2=0 \Longrightarrow (1,5) \\ s: 2x-y-2=0 \Longrightarrow (2,-1) \end{array}\right. \Longrightarrow \cos\alpha = \frac{-3}{\sqrt{26}\sqrt{5}} \Longrightarrow \alpha = 105^{o}15'19''$$



3.

$$d(P,r)=d(P,s) \Longrightarrow \frac{|x+5y-2|}{\sqrt{26}} = \frac{|2x-y-2|}{\sqrt{5}}$$

- $x+5y-2=2,28(2x-y-2) \Longrightarrow 89x-182y=64$
- $x+5y-2=-2,28(2x-y-2) \Longrightarrow 139x+68y=164$

Problema 177 Encontrar todas las ecuaciones de la recta cuya ecuación general es $2x-3y+6=0$. Y calcular el ángulo que forma esta recta con el eje de abcisas.

Solución:

$$r: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(3,2) \\ A(0,2) \end{array}\right.$$

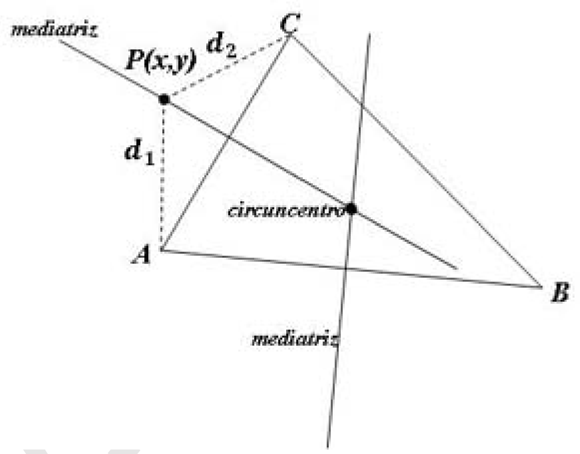
- Vectorial: $(x,y)=(0,2)+\lambda(3,2)$
- Paramétrica: $\left\{\begin{array}{l} x=3\lambda \\ y=2+2\lambda \end{array}\right.$
- Continua: $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-2}{2}$
- General: $2x-3y+6=0$

- Explícita: $y = \dfrac{2}{3}x + 2$
- Punto pendiente: $y - 2 = \dfrac{2}{3}x$
- Ángulo con el eje de abcisas: $m = \tan\alpha = -\dfrac{2}{3} \Longrightarrow \alpha = 33^o41'24''$

Problema 178 Si los puntos $A(-1,2)$, $B(4,-1)$ y $C(1,6)$ tres vértices consecutivos de un triángulo, se pide calcular:

1. Su circuncentro.
2. La altura de C sobre el lado $\overline{AB}$. (Distancia de C a la recta determinada por los puntos A y B.

Solución:



1. Calculamos dos de sus mediatrices:
   - Mediatriz entre A y B:
   $$\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y+1)^2} \Longrightarrow 5x - 3y - 6 = 0$$
   - Mediatriz entre A y C:
   $$\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-6)^2} \Longrightarrow x + 2y - 8 = 0$$
   - Circuncentro:
   $$\left\{\begin{array}{l} 5x - 3y - 6 = 0 \\ x + 2y - 8 = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left(\frac{36}{13}, \frac{34}{13}\right)$$

2. Calculamos la recta que une A con B:

$$r:\begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(5,-3) \\ A(-1,2) \end{cases} \Longrightarrow r: 3x+5y-7=0$$

Calculo la distancia de $C(1,6)$ a la recta r:

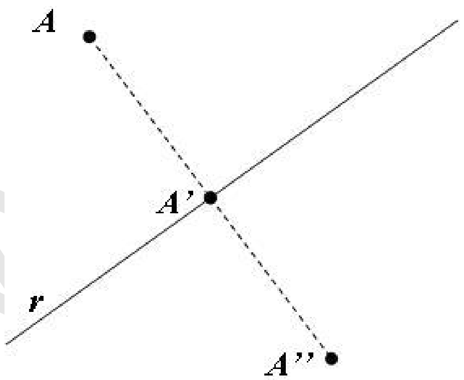
$$d(C,r)=\frac{|3+30-7|}{\sqrt{9+25}}=\frac{13\sqrt{34}}{17}\,u$$

Problema 179 Sea el punto $A(5,1)$ y la recta $r: 3x-y+2=0$. Se pide calcular:

1. Una recta paralela a r que pase por el punto A.
2. Una recta perpendicular a r que pase por el punto A.
3. El punto A'' simétrico de A respecto de la recta r.

Solución:

1. $3x-y+\lambda=0$ y como pasa por el punto $A \Longrightarrow 15-1+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=-14$. La recta buscada es $3x-y-14=0$
2. $x+3y+\lambda=0$ y como pasa por el punto $A \Longrightarrow 5+3+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=-8$. La recta buscada es $x+3y-8=0$
3. Calculamos A'' simétrico de A respecto de la recta r:



- Calculamos una recta s perpendicular a r y que pase por A, calculada en el apartado anterior.
- Calculamos el punto de corte entre r y s:

$$\begin{cases} r: 3x-y+2=0 \\ s: x+3y-8=0 \end{cases} \Longrightarrow A'\left(\frac{1}{5},\frac{13}{5}\right)$$

- El punto A' calculado es el punto medio entre el punto A y el punto A'' que tenemos que calcular:

$$\frac{A+A''}{2} = A' \Longrightarrow A'' = 2A' - A = \left(\frac{2}{5}, \frac{26}{5}\right) - (5,1) = \left(-\frac{23}{5}, \frac{21}{5}\right)$$

Problema 180 Dadas las rectas $r : x + y - 2 = 0$ y $s : \left\{\begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \end{array}\right.$, se pide calcular:

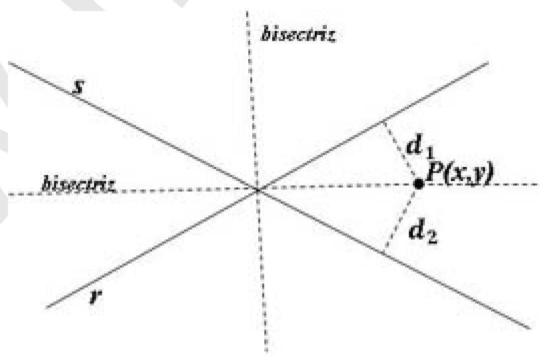
1. Su punto de corte.
2. Ángulo que forman.
3. Sus bisectrices.

Solución:

1. $(1 + 2\lambda) + (\lambda) - 2 = 0 \Longrightarrow \lambda = \dfrac{1}{3} \Longrightarrow \left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$

2.

$$\left\{\begin{array}{l} r : x + y - 2 = 0 \Longrightarrow (1,1) \\ s : x - 2y - 1 = 0 \Longrightarrow (1,-2) \end{array}\right. \Longrightarrow \cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{5}} \Longrightarrow \alpha = 108^{o}26'6''$$



3.

$$d(P,r) = d(P,s) \Longrightarrow \frac{|x+y-2|}{\sqrt{2}} = \frac{|x-2y-1|}{\sqrt{5}}$$

- $x + y - 2 = 0,63(x - 2y - 1) \Longrightarrow 37x + 226y - 137 = 0$
- $x + y - 2 = -0,63(x - 2y - 1) \Longrightarrow 163x - 26y - 263 = 0$

2.3. Cónicas

Problema 181 Calcula la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $3x^2 + 3y^2 + x - 5y - 2 = 0$ en el punto $P(-1, 0)$

Solución:

Primero calculamos el centro de la circunferencia, ya que si obtenemos este punto, podremos calcular el vector que partiendo de este punto llega al punto donde queremos hallar la tangente, y este vector será perpendicular a la recta tangente:

$$3x^2 + 3y^2 + x - 5y - 2 = 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 + \frac{1}{3} \cdot x - \frac{5}{3} \cdot y - \frac{2}{3} = 0 \Longrightarrow$$

$$m = -2 \cdot a \Longrightarrow \frac{1}{3} = -2 \cdot a \Longrightarrow a = -\frac{1}{6}$$

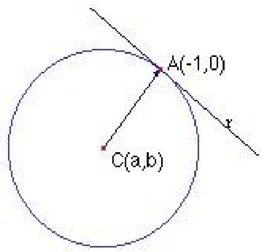
$$n = -2 \cdot b \Longrightarrow -\frac{5}{3} = -2 \cdot b \Longrightarrow b = \frac{5}{6}$$

Luego el centro de la circunferencia será $C(-\frac{1}{6}, \frac{5}{6})$

Esto quiere decir que un vector perpendicular a la recta que nos piden será el vector $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{u} = (-1, 0) - (-\frac{1}{6}, \frac{5}{6}) = (-\frac{5}{6}, -\frac{5}{6})$

Luego la ecuación general de la recta será de la forma $-\frac{5}{6}x - \frac{5}{6}y + Cte = 0$, y teniendo en cuenta que esta recta pasa por el punto $P(-1, 0)$, sustituyendo obtendríamos $-\frac{5}{6} \cdot (-1) - \frac{5}{6} \cdot 0 + Cte = 0 \Longrightarrow Cte = -\frac{5}{6}$

La recta pedida sería, por tanto, $-\frac{5}{6}x - \frac{5}{6}y + (-\frac{5}{6}) = 0 \Longrightarrow x + y + 1 = 0$



Problema 182 *(2 puntos)* Calcular la ecuación de la elipse de excentricidad $e = \dfrac{1}{4}$ y cuya distancia focal es 4.

Solución:

Tenemos que $2c = 4 \Longrightarrow c = 2$

$$e = \frac{1}{4} = \frac{c}{a} \Longrightarrow \frac{1}{4} = \frac{2}{a} \Longrightarrow a = 8$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow 64 = b^2 + 4 \Longrightarrow b^2 = 60$$

Luego la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{60}=1$$

Problema 183 Calcula la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(0,1)$, $B(2,0)$ y $C(2,2)$, y las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto C.

Solución:

La ecuación general de una circunferencia es $x^2+y^2+mx+ny+p=0$, sustituyendo los puntos tenemos:

$$\left\{\begin{array}{llll} & & n & +p=0\\ 4+ & 2m & & +p=0\\ 8+ & 2m & +2n & +p=0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} m=-\frac{5}{2}\\ n=-2\\ p=1\end{array}\right.$$

La ecuación queda de la siguiente manera:

$$x^2+y^2-\frac{5}{2}x-2y+1=0\Longrightarrow 2x^2+2y^2-5x-4y+2=0$$

Calculamos la recta tangente y normal en $C(2,2)$:

$$4xdx+4ydy-5dx-4dy=0\Longrightarrow(4x-5)dx+(4y-4)dy=0$$

$$(4y-4)dy=-(4x-5)dx\Longrightarrow y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{4x-5}{4y-4}\Longrightarrow m=-\frac{3}{4}$$

La recta tangente será: $y-2=-\frac{3}{4}(x-2)$

La recta normal será: $y-2=\frac{4}{3}(x-2)$

Problema 184 Encontrar el centro y el radio de las posibles circunferencias:

1. $x^2+y^2-10x+8y-4=0$
2. $x^2+y^2-2x-2y+15=0$

Solución:

1. $m=-2a=-10\Longrightarrow a=5$
   $n=-2b=8\Longrightarrow b=-4$
   $p=a^2+b^2-r^2\Longrightarrow r=\sqrt{45}$

2. $m=-2a=-2\Longrightarrow a=1$
   $n=-2b=-2\Longrightarrow b=1$
   $p=a^2+b^2-r^2\Longrightarrow r=\sqrt{-13}$. Luego no es una circunferencia.

Problema 185 Calcular la ecuación de una circunferencia que pase por los puntos $A(-1,1)$, $B(2,2)$ y $C(2,0)$.

Solución:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2- & m+ & n+ & p=0 \\ 8+ & 2m+ & 2n+ & p=0 \\ 4+ & 2m+ & & p=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} m=-\frac{4}{3} \\ n=-2 \\ p=-\frac{4}{3} \end{array}\right.$$

Problema 186 calcular la ecuación de una elipse de centro $C(0,0)$, cuyos focos son $F'(-4,0)$ y $F(4,0)$, y tiene una excentricidad de $0,8$.

Solución:

$$e=\frac{c}{a}\Longrightarrow a=\frac{4}{0,8}=5$$

$$a^2=b^2+c^2\Longrightarrow b^2=a^2-c^2=9$$

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1\Longrightarrow 9x^2+25y^2=225$$

Problema 187 Calcular el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ que cumplen que, la distancia de él al punto $A(1,1)$ es igual a la distancia de él a la recta $x+1=0$.

Solución:

$$d(P,A)=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$$

$$d(P,r)=x+1$$

$$d(P,A)=d(P,r)\Longrightarrow y^2-2y+1=4x\Longrightarrow x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}$$

Problema 188 Calcular las rectas tangente y normal a la curva

$$x^2+y^2-4x-y+3=0$$

en el punto $A(1,1)$.

Solución:

$$2xdx+2ydy-4dx-dy=0\Longrightarrow y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{2x-4}{2y-1}$$

$$m=2,\quad m'=-\frac{1}{2}$$

La recta tangente será: $y-1=2(x-1)$

La recta normal será: $y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$

Problema 189 Calcular la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(1,0)$, $B(5,1)$ y C(0,3).

Solución:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 1 & + & m & & & + & p=0 \\ 26 & + & 5m & + & n & + & p=0 \\ 9 & & & + & 3n & + & p=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} m=-\frac{67}{13} \\ n=-\frac{57}{13} \\ p=\frac{54}{13} \end{array}\right.$$

La circunferencia será: $13x^2+13y^2-67x-57y+54=0$.

Problema 190 De una hipérbola se conoce su eje principal que vale 10 y tiene una excentricidad $e=1,4$. Encontrar sus focos, su ecuación general, sus asíntotas y su dibujo aproximado.

Solución:

$$a=5,\quad c=7,\quad b^2=24,\quad b=\sqrt{24}$$

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1\Longrightarrow 24x^2+25y^2=600$$

$$y=\frac{\sqrt{24}}{5}x,\quad y=-\frac{\sqrt{24}}{5}x$$

Problema 191 Encontrar el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$, que cumplen que, la distancia de ellos a la recta $x-y-1=0$ y la distancia de ellos al punto $A(-1,0)$, es siempre la misma. Identifica por definición de que figura geométrica se trata y encuentra una las rectas tangente y normal a ella en el punto $(-8,1)$.

Solución:

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\frac{x-y-1}{\sqrt{2}}\Longrightarrow x^2+y^2+2xy-6x-2y+1=0$$

Por definición sería una parábola.

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{2x+2y+6}{2x+2y-2}\Longrightarrow m=-\frac{1}{2}$$

$$y-1=-\frac{1}{2}(x+8)\text{ tangente},\quad y-1=2(x+8)\text{ normal}$$

Problema 192 Dada una elipse de focos $(-3,0)$ y $(3,0)$ con una excentricidad $e=3/5$, encontrar la ecuación de una circunferencia cuyo diámetro coincida con el eje mayor y su centro es el el punto en el que corta esta elipse y el eje de ordenadas (OY).

Solución:

$$e=\frac{c}{a}\Longrightarrow a=5\Longrightarrow b=4$$

El centro será: $C(0,4)$ y el radio $r=5$

$$x^2+y^2-8y-9=0$$

Problema 193 Dada la recta $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}$ encontrar los puntos de ella que distan 5 unidades del origen de coordenadas.

Solución:

La ecuación de una circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 5 es $x^2+y^2-25=0$. Además $r:\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=-1-\lambda \end{cases}$, sustituyendo estos valores en la circunferencia tenemos $\lambda^2+6\lambda-23=0 \Longrightarrow \lambda=1,627105745$ y $\lambda=-2,827105745$. Sustituyendo estos valores en la recta obtenemos los puntos:

$$(4{,}254211490, -2{,}627105745) \text{ y } (-4{,}654211489, 1{,}827105744)$$

Problema 194 Calcular la ecuación de una circunferencia que pase por los puntos $A(-1,-1)$, $B(2,0)$ y $C(0,5)$

Solución:

Dada la ecuación general de una circunferencia: $x^2+y^2+mx-ny+p=0$, imponemos que pase por los puntos dados y nos queda

$$\begin{cases} m+n-p-2=0 \\ 2m+p+4=0 \\ 5n+p+25=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} m=\dfrac{11}{17} \\ \\ n=-\dfrac{67}{17} \\ \\ p=-\dfrac{90}{17} \end{cases}$$

La circunferencia buscada es: $x^2+y^2+\dfrac{11}{17}x-\dfrac{67}{17}y-\dfrac{90}{17}=0$

Problema 195 Dada una elipse de focos $(-4,0)$ y $(4,0)$ con una excentricidad $e=4/5$, encontrar la ecuación de una circunferencia cuyo diámetro coincida con el eje mayor y su centro es el punto en el que corta esta elipse y el eje de abcisas (OX).

Solución:

$$e=\frac{c}{a}\Longrightarrow a=5$$

El centro será: $C(5,0)$ y el radio $r=5$

$$(x-5)^2+y^2=25\Longrightarrow x^2+y^2-10x=0$$

Problema 196 De una hipérbola se conoce su eje principal que vale 8 y tiene de excentricidad 1,5. Encontrar sus focos, su ecuación general, sus asíntotas y su dibujo aproximado.

Solución:

$$a = 4, \ \ e = \frac{c}{a} \Longrightarrow c = 6$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow b^2 = 20, \ \ b = 2\sqrt{5}$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1 \Longrightarrow 20x^2 - 16y^2 = 320$$

$$\text{Asíntotas} : y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Problema 197 Encontrar el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$, que cumplan que, la distancia de ellos a la recta $x + y = 0$ y la distancia de ellos al punto$A(2, 0)$, es siempre la misma. Identifica de que figura se trata y encuentra las rectas tangente y normal a ella en el punto $(1, \sqrt{5})$.

Solución:

Por definición se trata de una parábola

$$d(P, r) = \frac{x + y}{\sqrt{2}}, \ \ |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

$$\frac{x + y}{\sqrt{2}} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} \Longrightarrow x^2 + y^2 - 2xy - 8x + 8 = 0$$

$$(2y-2x)\partial y = -(2x-2y-8)\partial x \Longrightarrow y' = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2x - 2y - 8}{2y - 2x} \Longrightarrow m = \sqrt{5}+2$$

$$\text{Tangente} : y - \sqrt{5} = (\sqrt{5} + 2)\sqrt{5}(x - 1)$$

$$\text{Normal} : y - \sqrt{5} = -\frac{1}{\sqrt{5} + 2}(x - 1)$$

Problema 198 Dada la recta $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{2}$ encontrar los puntos de ella que distan 5 unidades del origen de coordenadas.

Solución:

La ecuación de una circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 5 es $x^2+y^2-25 = 0$. Además $r : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \end{cases}$, sustituyendo estos valores en la circunferencia tenemos $2\lambda^2 + 2\lambda - 20 = 0 \Longrightarrow \lambda = 2$ y $\lambda = -2$. Sustituyendo estos valores en la recta obtenemos los puntos:

$$(4, 3) \ \text{y} \ \ (0, -5)$$

Problema 199 Calcular la ecuación de una circunferencia que pase por los puntos $A(2,2)$, $B(1,0)$ y $C(0,3)$

Solución:

Dada la ecuación general de una circunferencia: $x^2+y^2+mx-ny+p=0$, imponemos que pase por los puntos dados y nos queda

$$\left\{\begin{array}{c} 2m+2n+p+8=0 \\ m+p+1=0 \\ 3n+p+9=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} m=-1 \\ n=-3 \\ p=0 \end{array}\right.$$

La circunferencia buscada es: $x^2+y^2-x-3y=0$

Problema 200 De una elipse horizontal y centrada en el origen se conoce su excentricidad 0,5 y el semieje mayor que es 2 cm. Calcular sus focos, vértices, ejes, distancia focal y ecuación.

Solución:

$$e=\frac{c}{a}\Longrightarrow c=1$$

$$a^2=b^2+c^2\Longrightarrow b=\sqrt{3}$$

Vértices: $A(2,0)$, $A'(-2,0)$, $B(0,\sqrt{3})$ y $B'(0,-\sqrt{3})$.

Focos: $F(1,0)$ y $F'(-1,0)$, y distancia focal= 2 cm

Eje mayor= 4 cm. y eje menor= $2\sqrt{3}$ cm.

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\Longrightarrow 3x^2+4y^2-12=0$$

Problema 201 De una hipérbola horizontal y centrada en el origen se conoce su excentricidad 1,5 y el semieje real que es 2 cm. Calcular sus focos, vértices, ejes, distancia focal, asíntotas y ecuación.

Solución:

$$e=\frac{c}{a}\Longrightarrow c=3$$

$$c^2=a^2+b^2\Longrightarrow b=\sqrt{5}$$

Vértices: $A(2,0)$, $A'(-2,0)$, $B(0,\sqrt{5})$ y $B'(0,-\sqrt{5})$.

Focos: $F(3,0)$ y $F'(-3,0)$, y distancia focal= 6 cm

Eje real= 4 cm. y eje imaginario= $2\sqrt{5}$ cm.

Asíntotas: $y = \dfrac{\sqrt{5}}{2}\,x$ e $y = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}\,x$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1 \Longrightarrow 5x^2 - 4y^2 - 20 = 0$$

Problema 202 Encontrar el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$, que cumplan que, la distancia de ellos a la recta $x - y = 0$ y la distancia de ellos al punto $A(1, 0)$, es siempre la misma. Identifica de que figura se trata y encuentra las rectas tangente y normal a ella para $x = 1$.

Solución:

Por definición se trata de una parábola

$$d(P, r) = \frac{x - y}{\sqrt{2}}, \quad |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

$$\frac{x - y}{\sqrt{2}} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \Longrightarrow x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 2 = 0$$

$$x = 1 \Longrightarrow y^2 + 2y - 1 = 0 \Longrightarrow y = -2,41, \quad y = 0,41$$

$$(2y+2x)\partial y = -(2x+2y-4)\partial x \Longrightarrow y' = \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{2x + 2y - 4}{2y + 2x} = -\frac{x + y - 2}{y + x}$$

En el punto $(1; -2,41)$: $m = 2,41$

$$\text{Tangente}: y + 2,41 = 2,41(x - 1)$$

$$\text{Normal}: y + 2,41 = -0,41(x - 1)$$

En el punto $(1; 0,41)$: $m = -0,41$

$$\text{Tangente}: y - 0,41 = -0,41(x - 1)$$

$$\text{Normal}: y - 0,41 = 2,41(x - 1)$$

Problema 203 De una elipse horizontal y centrada en el origen se conoce su excentricidad 0,25 y el semieje mayor que es 8 cm. Calcular sus focos, vértices, ejes, distancia focal y ecuación.

Solución:

$$e = \frac{c}{a} \Longrightarrow c = 2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow b = \sqrt{60}$$

Vértices: $A(8, 0)$, $A'(-8, 0)$, $B(0, \sqrt{60})$ y $B'(0, -\sqrt{60})$.

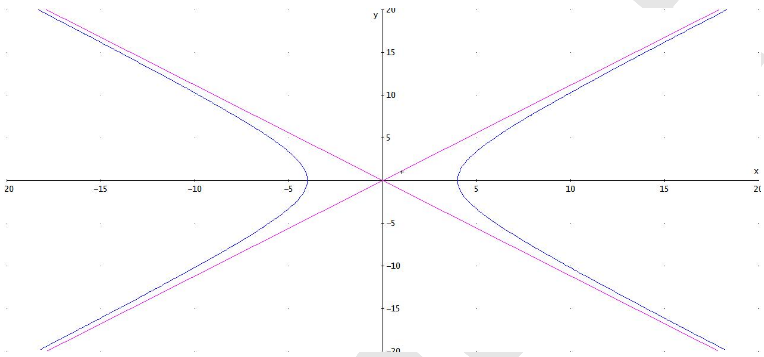
Focos: $F(2,0)$ y $F'(-2,0)$, y distancia focal= 4 cm

Eje mayor= 16 cm. y eje menor= $2\sqrt{60}$ cm.

$$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{60}=1 \Longrightarrow 15x^2+16y^2-960=0$$

Problema 204 De una hipérbola horizontal y centrada en el origen se conoce su excentricidad 1,5 y el semieje real que es 4 cm. Calcular sus focos, vértices, ejes, distancia focal, asíntotas y ecuación.

Solución:



$$e=\frac{c}{a} \Longrightarrow c=6$$

$$c^2=a^2+b^2 \Longrightarrow b=2\sqrt{5}$$

Vértices: $A(4,0)$, $A'(-4,0)$, $B(0,2\sqrt{5})$ y $B'(0,-2\sqrt{5})$.

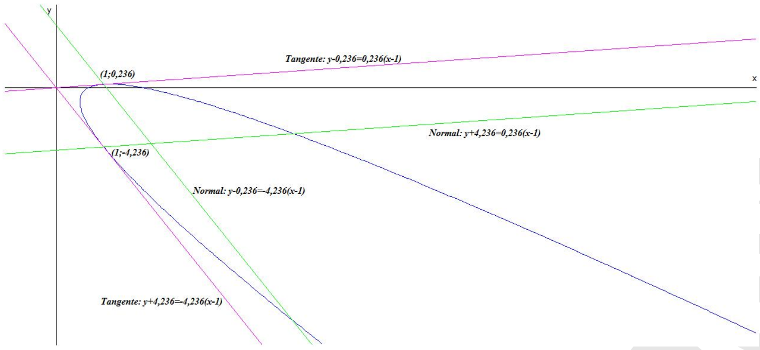
Focos: $F(6,0)$ y $F'(-6,0)$, y distancia focal= 12 cm

Eje real= 8 cm. y eje imaginario= $4\sqrt{5}$ cm.

Asíntotas: $y=\frac{\sqrt{5}}{2}\,x$ e $y=-\frac{\sqrt{5}}{2}\,x$

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1 \Longrightarrow 5x^2-4y^2-80=0$$

Problema 205 Encontrar el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$, que cumplan que, la distancia de ellos a la recta $x-2y=0$ y la distancia de ellos al punto $A(1,0)$, es siempre la misma. Identifica de que figura se trata y encuentra las rectas tangente y normal a ella para $x=1$.



Solución:
Por definición se trata de una parábola

$$d(P,r)=\frac{x-2y}{\sqrt{5}},\quad |\overrightarrow{AP}|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

$$\frac{x-2y}{\sqrt{5}}=\sqrt{(x-1)^2+y^2}\Longrightarrow 4x^2+y^2+4xy-10x+5=0$$

$$x=1\Longrightarrow y^2+4y-1=0\Longrightarrow y=-4,236,\quad y=0,236$$

$$(2y+4x)\partial y=-(8x+4y-10)\partial x\Longrightarrow y'=\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{8x+4y-10}{2y+4x}=-\frac{4x+2y-5}{2x+y}$$

En el punto $(1;-4,236)$: $m=-4,236$

$$\text{Tangente}: y+4,236=-4,236(x-1)$$

$$\text{Normal}: y+4,236=0,236(x-1)$$

En el punto $(1;0,236)$: $m=0,236$

$$\text{Tangente}: y-0,236=0,236(x-1)$$

$$\text{Normal}: y-0,236=-4,236(x-1)$$

Problema 206 Un cuerpo extraño a nuestra constelación ha irrumpido de forma violenta en ella, penetrando con una velocidad vertiginosa. Diferentes organismos internacionales dedicados al estudio de la astronomía se pusieron en contacto con el observatorio de las Islas Canarias (en el Teide) , desde donde se dio la alarma de este suceso. Dos jóvenes astrónomos , antiguos alumnos del colegio Villaeuropa, era los guardianes del cielo. La comunicación que dieron a la NASA fué bastante precisa; se trata de un cometa que arrastra en su cola un gran cantidad de meteoritos de diferentes tamaños. No existiría ningún riesgo para la Tierra si pasase a un distancia mayor de 2 (unidades astronómicas). También han comprobado que los puntos que recorre este cometa equidistan de la recta $r: x+y=0$ y del punto $F(1,0)$.

Precisan también que cuando la Tierra se encuentre en el punto $P'(2,1)$ será cuando estaremos más cerca del cometa.
La situación ya la tenían clara, el estudio de cónicas de 1º de Bachillerato les bastaba para hacer un primer cálculo de aproximación. Su antiguo y pesado profesor les preguntaría:

1. ¿Que curva describe el cometa?
2. Calcular su ecuación general.
3. Calcular las rectas tangente y normal a esta curva en $x = 2$
4. ¿La Tierra se encuentra en peligro?

Solución:

1. Se trata de una parábola.
2. $$d(P,r) = |\overrightarrow{FP}| \Longrightarrow \frac{x+y}{\sqrt{2}} = \sqrt{(x-1)^2+y^2} \Longrightarrow x^2+y^2-4x-2xy+2 = 0$$
3. $$y^2 - 4y - 2 = 0 \Longrightarrow y = 4,45, \;\; y = -0{,}45$$
   $$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{x-y-2}{y-x}$$
   En el punto $(2; 4,45) \Longrightarrow m = 1,8$:
   Recta Tangente: $y - 4,5 = 1,8(x-2)$ y la recta Normal: $y - 4,5 = 0,56(x-2)$

   En el punto $(2; -0,45) \Longrightarrow m = 0,18$:
   Recta Tangente: $y + 0,45 = 0,18(x-2)$ y la recta Normal: $y + 0,45 = -5,56(x-2)$
4. En el punto de abcisa $x = 2$ la Tierra se encuentra en la ordenada $y = 1$, es decir, cuando el cometa pase por el punto $(2; -0,45)$ la distancia será $1 - (-0,45) = 1,45 < 2$ y, por tanto, en peligro.

Problema 207 Calcular la ecuación de una circunferencia que pasa por los puntos $A(3,-1)$, $B(1,0)$ y $C(0,2)$. Obtener su centro y su radio.

Solución:
$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$$
$$r : \left\{ \begin{array}{c} 3m - n + p = -10 \\ m + p = -1 \\ 2n + p = -4 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m = -7 \\ n = -5 \\ p = 6 \end{array} \right. \Longrightarrow x^2 + y^2 - 5x - 7y + 6 = 0$$

$$\begin{cases} -2a = -5 \Longrightarrow a = 5/2 \\ -2b = -7 \Longrightarrow b = 7/2 \\ 6 = (5/2)^2 + (7/2)^2 - r^2 \Longrightarrow r = \frac{5\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Problema 208 De una elipse horizontal centrada en el origen se conoce su excentricidad $e = \dfrac{1}{8}$ y su eje mayor de 24 cm. Se pide:

1. Calcular la longitud de sus ejes, la distancia focal, sus vértices y sus focos.
2. Calcular su ecuación general.

Solución:

1. $a = 12$
$$e = \frac{1}{8} = \frac{c}{12} \Longrightarrow c = \frac{3}{2}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow b^2 = \frac{567}{4} \Longrightarrow b = \frac{\sqrt{567}}{2} = \frac{9}{2}\sqrt{7}$$
Eje Mayor: 24 cm, Eje Menor: $9\sqrt{7}$ cm, Distancia Focal: 3 cm

Vértices: $A(12, 0)$, $A'(-12, 0)$, $B\left(0, \frac{9}{2}\sqrt{7}\right)$ y $B'\left(0, -\frac{9}{2}\sqrt{7}\right)$

Focos: $F(3/2, 0)$ y $F'(-3/2, 0)$

2. $$\frac{x^2}{144} + \frac{4y^2}{567} = 1 \Longrightarrow 63x^2 + 64y^2 = 9072$$

Problema 209 Sea la recta $r : 2x + y - 3 = 0$ y sea el punto $P(1, 1)$. Encontrar los puntos de la recta r que se encuentran a una distancia igual a 5 del punto P.

Solución:

Construimos una circunferencia de centro P y radio 5 y luego calculamos los puntos de corte de esta circunferencia con la recta r.

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 25, \quad r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, -2) \\ P_r(0, 3) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - 2\lambda \end{cases}$$

$$(\lambda - 1)^2 + (2 - 2\lambda)^2 = 25 \Longrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 4 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3,236 \\ \lambda_2 = -1,236 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 3,236 \\ \lambda_2 = -1,236 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} P'(3,236; -3,472) \\ P''(-1,236; 5,472) \end{cases}$$

Problema 210 Sea la recta $r : \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{-1}$. Encontrar los puntos de la recta r que se encuentran a una distancia igual a 3 del origen de coordenadas O.

Solución:

Construimos una circunferencia de centro O y radio 3 y luego calculamos los puntos de corte de esta circunferencia con la recta r.

$$x^2 + y^2 = 9, \ \ r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, -1) \\ P_r(-1, 1) \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \end{cases}$$

$$(\lambda - 1)^2 + (1 - \lambda)^2 = 9 \Longrightarrow 2\lambda^2 = 7 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1,870828693 \\ \lambda_2 = -1,870828693 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1,870828693 \\ \lambda_2 = -1,870828693 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} P'(0,8708286929; -0,8708286929) \\ P''(-2,870828693; 0,8708286930) \end{cases}$$

Problema 211 De una elipse horizontal centrada en el origen se conoce su excentricidad $e = \dfrac{1}{2}$ y su distancia focal 4 cm. Se pide:

1. Calcular la longitud de sus ejes, la distancia focal, sus vértices y sus focos.
2. Calcular su ecuación general.

Solución:

1. $2c = 4 \Longrightarrow c = 2$
$$e = \frac{1}{2} = \frac{2}{a} \Longrightarrow a = 4$$
$$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow b^2 = 12 \Longrightarrow b = 2\sqrt{3}$$
Eje Mayor: 16 cm, Eje Menor: $4\sqrt{3}$ cm, Distancia Focal: 4 cm

   Vértices: $A(4, 0)$, $A'(-4, 0)$, $B\left(0, 2\sqrt{3}\right)$ y $B'\left(0, -2\sqrt{3}\right)$

   Focos: $F(2, 0)$ y $F'(-2, 0)$

2. $$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1 \Longrightarrow 3x^2 + 4y^2 = 48$$

Problema 212 Sean los puntos $A(1, 0)$, $B(5, -2)$ y $C(4, 6)$ tres vértices consecutivos de un triángulo. Se pide:

1. La ecuación de la circunferencia circunscrita.

2. El circuncentro.

Solución:

1.
$$x^2+y^2+mx+ny+p=0$$
$$r:\left\{\begin{array}{c}-m-n+p=-2\\3m+p=-9\\2n+p=-4\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}m=-19/11\\n=-1/11\\p=-42/11\end{array}\right. \Longrightarrow x^2+y^2-\frac{19}{11}x-\frac{1}{11}y-\frac{42}{11}=0 \Longrightarrow$$
$$11x^2+11y^2-19x-y-42=0$$

2. Tenemos:

   - Mediatriz entre A y B:
   $$\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x-3)^2+y^2} \Longrightarrow 8x+2y-7=0$$
   - Mediatriz entre A y C:
   $$\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}=\sqrt{x^2+(y-2)^2} \Longrightarrow x+3y-2=0$$
   - Circuncentro:
   $$\left\{\begin{array}{l}8x+2y-7=0\\x+3y-2=0\end{array}\right. \Longrightarrow \left(\frac{19}{22},\frac{1}{22}\right)$$

Problema 213 Se está trazando una autovía y Luis se encuentra preocupado porque su casa se encuentra en la zona de construcción. Para resolver su incertidumbre se dirige a la oficinas del ingeniero de caminos que lleva el proyecto. Ante un mapa topográfico le enseña el proyecto, la carretera se ha dibujado teniendo en cuenta que cualquier punto de la curva equidista de la casa de Luis, que se encuentra en el punto $F(1,2)$, y la recta $r: x-y=0$. También se informa de que su casa tiene que tener una separación de la autovía superior a 500 metros por los ruidos.

Su antiguo y pesado profesor le preguntaría:

1. ¿Que curva describe el autovía?
2. Calcular su ecuación general.
3. Calcular las rectas tangente y normal a esta curva en $x=1$
4. ¿Hay algún motivo de preocupación?

(Nota: los valores de los puntos y representación de las rectas viene dado en kilómetros)

Solución:

1. Se trata de una parábola.

2. $$d(P,r) = |\overrightarrow{FP}| \Longrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{2}} = \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} \Longrightarrow$$
$$x^2+y^2-4x-8y+2xy+10=0$$

3. $$y^2-6y+7=0 \Longrightarrow y=4,41, \;\; y=1,59$$
$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{x+y-2}{y+x-4}$$

   En el punto $(1;4,41) \Longrightarrow m=-2,42$:
   Recta Tangente: $y-4,41=-2,42(x-1)$

   Recta Normal: $y-4,41=0,41(x-1)$

   En el punto $(1;1,59) \Longrightarrow m=0,42$:
   Recta Tangente: $y-1,59=0,42(x-1)$

   Recta Normal: $y-1,59=-2,39(x-2)$

4. La casa está en el punto $F(1,2)$ y la carretera pasa por el punto $(1;1,59)$, la distancia entre estos dos puntos es de 0,41 kilómetros, luego hay motivos de preocupación.

Problema 214 Calcular la ecuación de una circunferencia que pasa por los puntos $A(0,-1)$, $B(2,0)$ y $C(1,3)$. Obtener su centro y su radio.

Solución:
$$x^2+y^2+mx+ny+p=0$$
$$r:\left\{\begin{array}{c} -n+p=-1\\ 2m+p=-4\\ m+3n+p=-10 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} m=-3/7\\ n=-15/7\\ p=-22/7 \end{array}\right. \Longrightarrow$$
$$x^2+y^2-\frac{3}{7}x-\frac{15}{7}y-\frac{22}{7}=0 \Longrightarrow 7x^2+7y^2-3x-15y-22=0$$
$$\left\{\begin{array}{l} -2a=-3/7 \Longrightarrow a=3/14\\ -2b=-15/7 \Longrightarrow b=15/14\\ 22/7=(3/14)^2+(15/14)^2-r^2 \Longrightarrow r=\frac{5\sqrt{34}}{14} \end{array}\right.$$

Problema 215 De una elipse horizontal centrada en el origen se conoce su excentricidad $e = \dfrac{1}{8}$ y su eje mayor de 6 cm. Se pide:

1. Calcular la longitud de sus ejes, la distancia focal, sus vértices y sus focos.

2. Calcular su ecuación general.

Solución:

1. $a = 3$

$$e = \frac{1}{8} = \frac{c}{3} \Longrightarrow c = \frac{3}{8}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow b^2 = \frac{567}{64} \Longrightarrow b = \frac{\sqrt{567}}{8} = \frac{9}{8}\sqrt{7}$$

Eje Mayor: 6 cm, Eje Menor: $\dfrac{9}{4}\sqrt{7}$ cm, Distancia Focal: $\dfrac{3}{4}$ cm

Vértices: $A(3,0)$, $A'(-3,0)$, $B\left(0, \dfrac{9}{4}\sqrt{7}\right)$ y $B'\left(0, -\dfrac{9}{4}\sqrt{7}\right)$

Focos: $F(3/8, 0)$ y $F'(-3/8, 0)$

2.

$$\frac{x^2}{9} + \frac{64y^2}{567} = 1 \Longrightarrow 63x^2 + 64y^2 = 567$$

Problema 216 Sea la recta $r : 3x - y + 2 = 0$ y sea el punto $P(0,1)$. Encontrar los puntos de la recta r que se encuentran a una distancia igual a $\sqrt{7}$ del punto P.

Solución:

Construimos una circunferencia de centro P y radio $\sqrt{7}$ y luego calculamos los puntos de corte de esta circunferencia con la recta r.

$$x^2 + (y-1)^2 = 7, \;\; r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,3) \\ P_r(0,2) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 2 + 3\lambda \end{array} \right.$$

$$\lambda^2 + (1 + 3\lambda)^2 = 7 \Longrightarrow 5\lambda^2 + 3\lambda - 3 = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 0,53 \\ \lambda_2 = -1,13 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 0,53 \\ \lambda_2 = -1,13 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} P'(0,53; 3,59) \\ P''(-1,13; -1,39) \end{array} \right.$$

Problema 217 Calcular la ecuación de una circunferencia que pasa por los puntos $A(0,-2)$, $B(3,0)$ y $C(1,4)$. Obtener su centro y su radio.

Solución:

$$x^2+y^2+mx+ny+p=0$$

$$r:\left\{\begin{array}{c} -2n+p=-4\\ 3m+p=-9\\ m+4n+p=-17 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} m=-1/4\\ n=-17/8\\ p=-33/4 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$x^2+y^2-\frac{6}{7}x-\frac{17}{7}y-\frac{45}{7}=0 \Longrightarrow 7x^2+7y^2-6x-17y-45=0$$

$$\left\{\begin{array}{l} m=-2a=-1/4 \Longrightarrow a=-1/8\\ n=-2b=-17/8 \Longrightarrow b=-17/16\\ p=-33/4=a^2+b^2-r^2 \Longrightarrow r=\dfrac{\sqrt{2405}}{16}=3,065 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\text{Centro}=\left(-\frac{1}{8},-\frac{17}{16}\right),\ \ r=\frac{\sqrt{2405}}{16}=3,065$$

Problema 218 Sea la recta $r:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{1}$ y sea el punto $P(3,3)$. Encontrar los puntos de la recta r que se encuentran a una distancia igual a 5 del punto P.

Solución:

Construimos una circunferencia de centro P y radio $\sqrt{7}$ y luego calculamos los puntos de corte de esta circunferencia con la recta r.

$$(x-3)^2+(y-3)^2=25,\ \ r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(2,1)\\ P_r(1,3) \end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=1+2\lambda\\ y=3+\lambda \end{array}\right.$$

$$(-2+2\lambda)^2+\lambda^2=25 \Longrightarrow 5\lambda^2-8\lambda-21=0 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1=3\\ \lambda_2=-1,4 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1=3\\ \lambda_2=-1,4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} P'(7,6)\\ P''(-1,8;1,6) \end{array}\right.$$

Problema 219 Calcular la recta tangente a la circunferencia $x^2+y^2-4x-4y-6=0$ en el punto P(3,1).

Solución:

La circunferencia tiene de centro $C(2,2)$ y radio $r=\sqrt{2}$. El vector $\overrightarrow{CP}=(1,-1)$ es perpendicular a la recta tangente, luego:

$$x-y+\lambda=0 \Longrightarrow 3-1+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=-2$$

La recta tangente es: $x - y - 2 = 0$

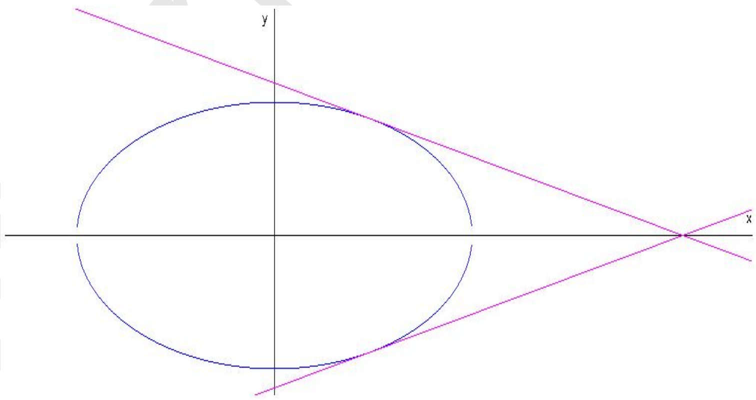
Problema 220 Sea $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ la ecuación de una elipse horizontal. Encontrar todos los datos que la definen y su ecuación general.
Solución:

$$a^2 = 3 \Longrightarrow a = \sqrt{3}, \quad b^2 = 2 \Longrightarrow b = \sqrt{2}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow c = 1 \quad e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Eje Mayor= $2a = 2\sqrt{3}$
Eje Menor= $2b = 2\sqrt{2}$
Distancia Focal= $2c = 2$
Excentricidad= $e = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
Vértices: $A(\sqrt{3}, 0)$, $A'(-\sqrt{3}, 0)$, $B'(0, \sqrt{2})$, $B(0, \sqrt{2})$
Focos: $F(1, 0)$, $F'(-1, 0)$
Ecuación general: $2x^2 + 3y^2 = 6$

Problema 221 De una elipse horizontal conocemos su eje menor que mide 4 cm y tiene una excentricidad $e = \dfrac{1}{4}$. Calcular los datos que la definen, su ecuación general y las tangentes a esta cónica en los puntos de abcisa $x = 1$.
Solución:



$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{4} \Longrightarrow a = 4c$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow 16c^2 = 4 + c^2 \Longrightarrow c = \sqrt{\frac{4}{15}} = \frac{2}{\sqrt{15}}$$

$$a = 4c = \frac{8}{\sqrt{15}}$$

Eje Mayor= $2a = \frac{16}{\sqrt{15}}$
Eje Menor= $2b = 4$
Distancia Focal= $2c = \frac{4}{\sqrt{15}}$
Excentricidad= $e = \dfrac{1}{4}$
Vértices: $A\left(\dfrac{16}{\sqrt{15}}, 0\right)$, $A'\left(-\dfrac{16}{\sqrt{15}}, 0\right)$, $B'(0,2)$, $B(0,-2)$
Focos: $F\left(\dfrac{2}{\sqrt{15}}, 0\right)$, $F'\left(-\dfrac{2}{\sqrt{15}}, 0\right)$
Ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{64/15} + \frac{y^2}{4} = 1 \Longrightarrow \frac{15x^2}{64} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Ecuación general: $15x^2 + 16y^2 = 64$

Si $x = 1 \Longrightarrow y = \pm\frac{7}{4}$

$$30xdx + 32ydy = 0 \Longrightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{30x}{32y}$$

En el punto $P_1\left(1, \dfrac{7}{4}\right) \Longrightarrow m = -\dfrac{15}{28}$

$$\text{Tangente} : y - \frac{7}{4} = -\frac{15}{28}(x-1)$$

En el punto $P_2\left(1, -\dfrac{7}{4}\right) \Longrightarrow m = \dfrac{15}{28}$

$$\text{Tangente} : y + \frac{7}{4} = \frac{15}{28}(x-1)$$

Problema 222 Nuestro amigo Pablo ha pasado una temporada con los aborígenes australianos. Dice que es un auténtico experto en el lanzamiento del bumerang. Quiere hacer una demostración lanzándolo alrededor de Gloria, su compañera de clase. Gloria se había situado alejada de él en el punto $A(2,1)$ (hace falta tener mucho valor, yo no me pondría). El boomerang lanzado sigue una trayectoria curva, de forma que la distancia desde Gloria al boomerang es siempre igual a la distancia del boomerang a la recta $r : x - y = 0$. Se pide:

1. Identifica de que curva se trata.

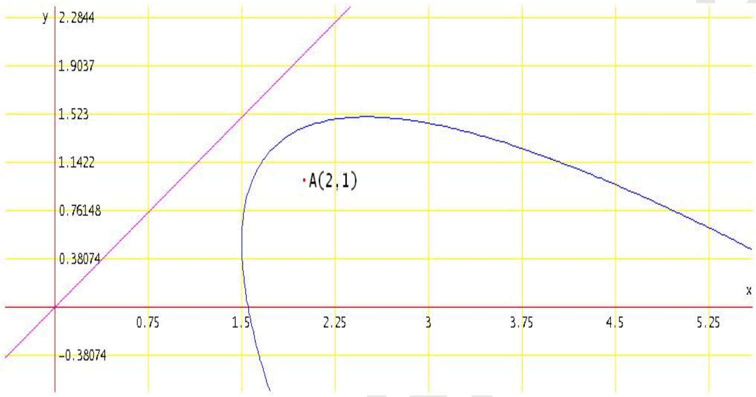
2. Calcular la ecuación de esta curva.

3. ¿Se encuentra Gloria en peligro de ser golpeada por este artefacto sabiendo que las aspas del boomerang miden 50 cm? La escala del plano en las que hemos tomado las medidas esta determinada por cuadrados de 50×50 cm.

Solución:

1. Se trata de una parábola por definición.

2. Sea $P(x,y)$ un punto de esa parábola, se tiene que cumplir:



$$|\overrightarrow{AP}| = d(P,r)$$

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} = \frac{|x-y|}{\sqrt{2}} \Longrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2 = \frac{(x-y)^2}{2}$$

$$\Longrightarrow x^2+y^2+2xy-8x-4y+10=0$$

3. Gloria se encuentra en peligro ya que la parábola tiene que pasar entre ella y la recta directriz::

$$d(A,r) = \frac{|2-1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071067811$$

En centímetros sería: $0,7071067811 \times 50 = 35{,}35533905$ cm, por lo que las aspas la golpearían.

2.4. Números complejos

Problema 223 Halla todas las raices de la raiz cúbica de 27.
Solución:
Primero escribimos 27 como si fuese un número complejo, es decir, $z = 27 = 27 + 0 \cdot i$, y calculamos su módulo y su argumento:
$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{27^2 + 0^2} = 27, \quad r = 27$
$\tan\alpha = \frac{b}{a} = \frac{0}{27} = 0 \implies \alpha = 0$
Luego el número complejo en forma polar será $z = 27_{0^o}$, y a partir de él vamos a calcular sus raices cúbicas:
$\sqrt[3]{27} = (\sqrt[3]{27})_{\frac{0+2n\pi}{3}} = 3_{\frac{0+2n\pi}{3}}$, donde $n = 0, 1, 2$
Cuando $n = 0 \implies z_1 = 3_{0^o} = 3(\cos 0^o + i \cdot \sin 0^o) = 3$
Cuando $n = 1 \implies z_2 = 3_{120^o} = 3(\cos 120^o + i \cdot \sin 120^o) = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$
Cuando $n = 2 \implies z_3 = 3_{240^o} = 3(\cos 240^o + i \cdot \sin 240^o) = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$

Problema 224 Calcular:

1. $(2 - 4\,i)(1 + i)$
2. $\dfrac{3 - i}{5 + 2\,i}$
3. $(4 + i)^2$

Solución:

1. $(2 - 4\,i)(1 + i) = 6 - 2i$
2. $\dfrac{3 - i}{5 + 2\,i} = \dfrac{13}{29} - \dfrac{11}{29}\,i$
3. $(4 + i)^2 = 15 + 8\,i$

Problema 225 calcular y pasar a forma polar y paramétrica

1. $\dfrac{2_{60^o}}{3_{15^o}}$
2. $4_{40^o} \cdot 3_{80^o}$
3. $(5_{40^o})^5$

Solución:

1. $\dfrac{2_{60^o}}{3_{15^o}} = \left(\dfrac{2}{3}\right)_{45^o} = \dfrac{2}{3}(\cos 45^o + i\ \sin 45^o) = \dfrac{\sqrt{2}}{3} + \dfrac{\sqrt{2}}{3}\,i$
2. $4_{40^o} \cdot 3_{80^o} = 12_{120^o} = 12(cos 120^o + i\ \sin 120^o) = -6 + 6\sqrt{3}\,i$
3. $(5_{40^o})^5 = 5^5_{200^o} = 5^5(\cos 200^o + i\ \sin 200^o) = -2936,5 - 1068,8\,i$

Problema 226 Calcular $\sqrt[4]{z}$ donde $z = 1 - 3\,i$

Solución:

$$z = 1 - 3\,i = \sqrt{10}_{288,43}$$

$$\sqrt[4]{1 - 3\,i} = (\sqrt{10})^{1/4}_{\frac{288,43 + k\cdot 360^{\text{o}}}{4}}$$

$$\left\{\begin{array}{l} k = 0 \Longrightarrow 10^{1/8}_{72,11^{\text{o}}} = 10^{1/8}(\cos 72,11^{\text{o}} + i\,\sin 72,11^{\text{o}}) = 0,409 + 1,27\,i \\ k = 1 \Longrightarrow 10^{1/8}_{162,11^{\text{o}}} = 10^{1/8}(\cos 162,11^{\text{o}} + i\,\sin 162,11^{\text{o}}) = -1,27 + 0,41\,i \\ k = 2 \Longrightarrow 10^{1/8}_{252,11^{\text{o}}} = 10^{1/8}(\cos 252,11^{\text{o}} + i\,\sin 252,11^{\text{o}}) = -0,41 - 1,27\,i \\ k = 3 \Longrightarrow 10^{1/8}_{342,11^{\text{o}}} = 10^{1/8}(\cos 342,11^{\text{o}} + i\,\sin 342,11^{\text{o}}) = 1,27 - 0,41\,i \end{array}\right.$$

Problema 227 Resolver la ecuación: $z^2 - z + 2 = 0$

Solución:

$$z^2 - z + 2 = 0 \Longrightarrow z = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}\,i$$

Problema 228 Resolver la ecuación: $z^3 + 1 = 0$.

Solución:

$$z^3 = -1 \Longrightarrow z = \sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1_{180^{\text{o}}}} = 1_{\frac{180^{\text{o}} + k\cdot 360^{\text{o}}}{3}}$$

$$\left\{\begin{array}{l} k = 0 \Longrightarrow 1_{60^{\text{o}}} = \cos 60^{\text{o}} + i\,\sin 60^{\text{o}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i \\ k = 1 \Longrightarrow 1_{180^{\text{o}}} = \cos 180^{\text{o}} + i\,\sin 180^{\text{o}}) = -1 \\ k = 2 \Longrightarrow 1_{300^{\text{o}}} = \cos 300^{\text{o}} + i\,\sin 300^{\text{o}}) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i \end{array}\right.$$

Problema 229 Calcular:

1. $(-1 + i)\cdot(2 + 3i)$, $\dfrac{5 + i}{-1 + i}$
2. Si $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 5 + 2i$ y $z_3 = 3 + i$ son tres números complejos, calcular $z = 2z_1 - 3\overline{z_2} + 5z_3$
3. $(2 - i)^{10}$

Solución:

1. $(-1 + i)\cdot(2 + 3i) = -5 - i$, $\dfrac{5 + i}{-1 + i} = -2 - 3i$
2. Si $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 5 + 2i$ y $z_3 = 3 + i$ son tres números complejos, calcular $z = 2z_1 - 3\overline{z_2} + 5z_3 = 4 + 9i$

3. $(2-i)^{10} \Longrightarrow |z| = \sqrt{5}$ y $\tan\alpha = -\dfrac{1}{2}$; al estar en el cuarto cuadrante será $\alpha = 333^{o}26'5''$. Por tanto tenemos que $2-i = \sqrt{5}_{333^{o}26'5''}$:

$$(2-i)^{10} = (\sqrt{5}_{333^{o}26'5''}) = 5^5_{94^{o}20'58''} = 5^5(\cos 94^{o}20'58'' + i\sin 94^{o}20'58'')$$

Problema 230 Resolver la ecuación $z^4 + 16i = 0$ donde z es un número complejo.

Solución:

$$z^4 = -16i \Longrightarrow z = \sqrt[4]{-16i}$$

$$-16i \Longrightarrow \begin{cases} |-16i| = 16 \\ \tan\alpha = -\frac{-16}{0} = -\infty \Longrightarrow \alpha = 270^{o} \end{cases} \Longrightarrow z = \sqrt[4]{16}_{\frac{270^{o}+k\cdot 360^{o}}{4}}$$

$$z = \begin{cases} \text{si } k=0 \Longrightarrow z = 2_{67^{o}30'} = 2(\cos 67^{o}30' + i\sin 67^{o}30^{o}) = 0,765 + i\cdot 1,848 \\ \text{si } k=0 \Longrightarrow z = 2_{157^{o}30'} = 2(\cos 157^{o}30' + i\sin 157^{o}30') = -1,848 + i\cdot 0,765 \\ \text{si } k=0 \Longrightarrow z = 2_{247^{o}30'} = 2(\cos 247^{o}30' + i\sin 247^{o}30') = -0,765 - i\cdot 1,848 \\ \text{si } k=0 \Longrightarrow z = 2_{337^{o}30'} = 2(\cos 337^{o}30' + i\sin 337^{o}30') = 1,848 - i\cdot 0,765 \end{cases}$$

Problema 231 Si $z = 3-4i$, y $w = -2+i$ calcular:

1. $z+w$, $z\cdot w$ y z/w.
2. z^9
3. las raices de $\sqrt[4]{w}$

Solución:

1. $z+w = 1-3i$, $z\cdot w = -2+11i$ y $\dfrac{z}{w} = -2+i$.
2. $z = 5_{306^{o}52'12''} \Longrightarrow z^9 = 5^9_{241^{o}49'45''} = 5^9(\cos 241^{o}49'45'' + i\sin 241^{o}49'45'')$
3. $w = \sqrt{5}_{153^{o}26'6''}$:

$$\sqrt[4]{w} = \begin{cases} \sqrt[6]{5}_{38^{o}21'32''} = \sqrt[6]{5}(\cos 38^{o}21'32'' + i\sin 38^{o}21'32'') \\ \sqrt[6]{5}_{128^{o}21'32''} = \sqrt[6]{5}(\cos 128^{o}21'32'' + i\sin 128^{o}21'32'') \\ \sqrt[6]{5}_{218^{o}21'32''} = \sqrt[6]{5}(\cos 218^{o}21'32'' + i\sin 218^{o}21'32'') \\ \sqrt[6]{5}_{308^{o}21'32''} = \sqrt[6]{5}(\cos 308^{o}21'32'' + i\sin 308^{o}21'32'') \end{cases}$$

Problema 232 Si $z = 2-4i$, y $w = -1+i$ calcular:

1. $z+w$, $z\cdot w$ y z/w.
2. z^9
3. las raices de $\sqrt[4]{w}$

Solución:

1. $z + w = 1 - 3i$, $z \cdot w = 2 + 6i$ y $\dfrac{z}{w} = -3 + i$.

2. $z = \sqrt{20}_{296^{\circ}33'54''} \Longrightarrow z^9 = (\sqrt{20})^9_{149^{\circ}5'6''} = (\sqrt{20})^9(\cos 149^{\circ}5'6'' + i \sin 149^{\circ}5'6'')$

3. $w = \sqrt{2}_{135^{\circ}}$:

$$\sqrt[4]{w} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[8]{2}_{33^{\circ}45'} = \sqrt[8]{2}(\cos 33^{\circ}45' + i \sin 33^{\circ}45') \\ \sqrt[8]{2}_{123^{\circ}45'} = \sqrt[8]{2}(\cos 123^{\circ}45' + i \sin 123^{\circ}45') \\ \sqrt[8]{2}_{213^{\circ}45'} = \sqrt[8]{2}(\cos 213^{\circ}45' + i \sin 213^{\circ}45') \\ \sqrt[8]{2}_{303^{\circ}45'} = \sqrt[8]{2}(\cos 303^{\circ}45' + i \sin 303^{\circ}45') \end{array} \right.$$

Problema 233 Sean $z_1 = 3-2i$ y $z_2 = -1+4i$. Calcular: z_1+z_2, $z_1 \cdot z_2$ y $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Solución:

- $z_1 + z_2 = 2 + 2i$
- $z_1 \cdot z_2 = 5 + 14i$
- $\dfrac{z_1}{z_2} = -\dfrac{11}{17} - \dfrac{10}{17}i$

Problema 234 Resolver la ecuación $z^3 - 2i = 0$

Solución:

$$z^3 - 2i = 0 \Longrightarrow z = \sqrt[3]{2i} = \sqrt[3]{(2)_{\pi/2}} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[3]{2}_{30^{\circ}} = \sqrt[3]{2}(\cos 30^{\circ} + i \sin 30^{\circ}) \\ \sqrt[3]{2}_{150^{\circ}} = \sqrt[3]{2}(\cos 150^{\circ} + i \sin 150^{\circ}) \\ \sqrt[3]{2}_{270^{\circ}} = \sqrt[3]{2}(\cos 270^{\circ} + i \sin 270^{\circ}) \end{array} \right.$$

Problema 235 Sean $z_1 = 2+i$ y $z_2 = -1+2i$. Calcular: z_1+z_2, $z_1 \cdot z_2$ y $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Solución:

- $z_1 + z_2 = 1 + 3i$
- $z_1 \cdot z_2 = -4 + 3i$
- $\dfrac{z_1}{z_2} = -i$

Problema 236 Resolver la ecuación $z^4 + 1 - i = 0$

Solución:

$$z^4 + 1 - i = 0 \Longrightarrow z = \sqrt[4]{-1+i} = \sqrt[8]{(2)_{135^{\circ}}} =$$

$$\begin{cases} \sqrt[8]{2}_{\frac{135^o+0^o}{4}} = \sqrt[8]{2}(\cos 33^o45' + i\sin 33^o45') \\ \\ \sqrt[8]{2}_{\frac{135^o+360^o}{4}} = \sqrt[8]{2}(\cos 123^o45' + i\sin 123^o45') \\ \\ \sqrt[8]{2}_{\frac{135^o+720^o}{4}} = \sqrt[8]{2}(\cos 213^o45' + i\sin 213^o45') \\ \\ \sqrt[8]{2}_{\frac{135^o+1080^o}{4}} = \sqrt[8]{2}(\cos 303^o45' + i\sin 303^o45') \end{cases}$$

Problema 237 Dados los números complejos $z_1 = 3 + 2i$ y $z_2 = 5 - i$. Se pide calcular:

1. $z_1 + z_2$ y $z_1 - z_2$
2. $z_1 \cdot z_2$
3. $\dfrac{z_1}{z_2}$

Solución:

1. $z_1 + z_2 = 8 + i$ y $z_1 - z_2 = -2 + 3i$
2. $z_1 \cdot z_2 = 17 + 7i$
3. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$

Problema 238 Resolver la siguiente ecuación de segundo grado:

$$z^2 + z + 2 = 0$$

Solución:

$$z^2 + z + 2 = 0 \Longrightarrow z = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{7}}{2}i \\ \\ -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{7}}{2}i \end{cases}$$

Problema 239 Calcular las raices de $\sqrt[3]{3-4i}$

Solución:

$$z = 3 - 4i = 5_{306^o52'12''} = 5(\cos 306^o52'12'' - i\sin 306^o52'12'')$$

$$\sqrt[3]{z} = \begin{cases} \sqrt[3]{5}_{\frac{306^o 52' 12'' + 0\cdot 360^o}{3}} = \sqrt[3]{5}_{102^o 17' 24''} = \sqrt[3]{5}(\cos 102^o 17' 24'' - i \sin 102^o 17' 24'') \\ \sqrt[3]{5}_{\frac{306^o 52' 12'' + 1\cdot 360^o}{3}} = \sqrt[3]{5}_{222^o 17' 24''} = \sqrt[3]{5}(\cos 222^o 17' 24'' - i \sin 222^o 17' 24'') \\ \sqrt[3]{5}_{\frac{306^o 52' 12'' + 2\cdot 360^o}{3}} = \sqrt[3]{5}_{342^o 17' 24''} = \sqrt[3]{5}(\cos 342^o 17' 24'' - i \sin 342^o 17' 24'') \end{cases}$$

Capítulo 3

Ánalisis

3.1. Representaciones gráficas

Problema 240 Calcular

Sea la función

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2x - 15}$$

1. Estudiar el dominio, puntos de corte, intervalos de crecimiento y decrecimiento, y determinar sus extremos relativos.

2. Calcular sus asíntotas.

3. Con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar la gráfica de la función.

Solución:

1. Consta de varios apartados:

   a) **Dominio:** $Dom f(x) = R - \{-5, 3\}$

   b) **Puntos de Corte:**
      - Con el eje OY: $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$
      - Con el eje OX: $f(x) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$

   c) **Simetría:** La función no es ni par ni impar

   $$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 + 2(-x) - 15} = \frac{-x^3}{x^2 - 2x - 15} \neq \pm f(x)$$

   d) **Monotonía:**

   $$f'(x) = \frac{x^2(x^2 + 4x - 45)}{(x^2 + 2x - 15)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = -9,\ x = 5$$

Para estudiar el signo de $f'(x)$ observamos que tan sólo basta con estudiar el signo de $x^2+4x-45$ pues los otros factores están elevados al cuadrado y, por tanto, son siempre positivos.

	$(-\infty,-9)$	$(-9,5)$	$(5,+\infty)$
$x+9$	$-$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
	crece	decrece	crece

e) **Extremos relativos:** A la vista del apartados anterior observamos que en el punto de abcisa $x=-9$ la función pasa de crecer a decrecer y, por tanto, se trata de un **máximo**, que corresponde al punto $(-9;-15,19)$. Si observamos ahora el punto de abcisa $x=5$ la función pasa de decrecer a crecer y, por tanto, estamos ante un **mínimo**, que corresponde al punto $(5;6,25)$

2. **Asíntotas:**

- **Verticales:**

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow -5^-}\frac{x^3}{x^2+2x-15}=-\infty \\ \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow -5^+}\frac{x^3}{x^2+2x-15}=+\infty \end{array}\right. \Longrightarrow x=-5$$

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 3^-}\frac{x^3}{x^2+2x-15}=-\infty \\ \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 3^+}\frac{x^3}{x^2+2x-15}=+\infty \end{array}\right. \Longrightarrow x=3$$

- **Horizontales:**

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^3}{x^2+2x-15}=\infty \Longrightarrow \text{No hay Horizontales}$$

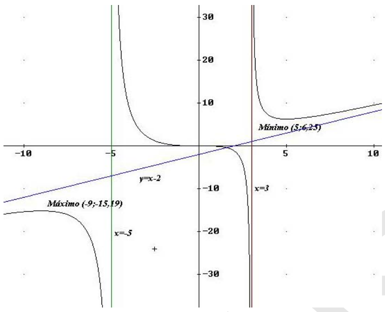
- **Oblicuas:** La recta $y=mx+n$ es una asíntota oblicua si

$$m=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^3}{x^3+2x^2-15x}=1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x) - nx) = \lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+2x-15} - x\right) =$$
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-2x^2+15}{x^2+2x-15} = -2$$

La recta $y = x - 2$ es una asíntota Oblicua.

3. **Representación Gráfica de la función:** Con los datos obtenidos hasta ahora es suficiente para hacer una representación gráfica bastante precisa de la función que nos ocupa.



Problema 241

Dada la función $f(x) = x^3 - 2x + 1$ y la recta $y = 2x + 1$

1. Calcular los extremos relativos de $f(x)$.
2. Estudiar la concavidad de $f(x)$.
3. Dibujar las gráficas de la función, de la recta, y señalar el recinto que encierran.
4. Calcular el área de dicho recinto.
5. Calcular la recta tangente y la recta normal a $f(x)$ en el punto de abcisa $x = 2$.

Solución:

1. **Extremos relativos:**

$$f'(x) = 3x^2 - 2 = 0 \Longrightarrow x = -\frac{\sqrt{6}}{3},\ x = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$f''(x) = 6x \Longrightarrow \begin{cases} f''\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = -2\sqrt{6} < 0 \Longrightarrow \text{Mínimo } \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{9+4\sqrt{6}}{9}\right) \\ \\ f''\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = 2\sqrt{6} > 0 \Longrightarrow \text{Máximo } \left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{9+4\sqrt{6}}{9}\right) \end{cases}$$

2. **Concavidad:**
Observando la derivada $f''(x) = 6x$ nos damos cuenta que $f''(x) > 0$ en el intervalo $(0, +\infty)$ y, por tanto, en este intervalo la función será convexa. Por el contrario, $f''(x) < 0$ en el intervalo $(-\infty, 0)$ y, por tanto, en este intervalo la función es cóncava.

3. **Dibujo de las gráficas:**
De la función $f(x)$:

   a) **Dominio:** $Dom f(x) = R$

   b) **Puntos de Corte:**

   - Con el eje OY: $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 1 \Longrightarrow (0, 0)$
   - Con el eje OX: $f(x) = 0 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow (-1,618033988; 0),\ (0,6180339887; 0),\ (1, 0)$$

   c) **Simetría:** La función no es ni par ni impar

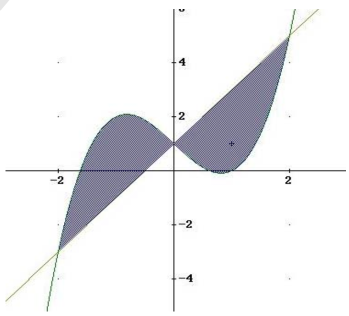
$$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x) + 1 = -x^3 + 2x + 1 \neq \pm f(x)$$

   d) **Monotonía:** No es necesaria

   e) **Asíntotas:** No hay

De la recta $y = 2x + 1$:

Con dos puntos de ella tendremos suficiente, por ejemplo el $(0, 1)$ y el $(-1/2, 0)$.



4. **Cálculo del área:**
Para calcular el área de este recinto calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$x^3 - 2x + 1 = 2x + 1 \Longrightarrow x = -2,\ x = 2,\ x = 0$$

Tendremos que calcular el área en el intervalo $[-2,0]$ y luego en el intervalo $[0,-2]$. Calculamos la integral

$$\int (x^3 - 2x + 1 - 2x - 1)\,dx = \int (x^3 - 4x)\,dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + C$$

En el intervalo $[-2,0]$:

$$\int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\,dx = \left.\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0} = 4$$

En el intervalo $[0,2]$:

$$\int_{0}^{2} (x^3 - 4x)\,dx = \left.\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{0}^{2} = -4$$

La razón por la que el área en este caso es negativa es porque la recta está por encima de la función, tendremos que coger su valor absoluto y nos queda:

Área= $|4| + |-4| = 8$ u^2.

5. **Cálculo de la tangente y la normal:** Para calcular la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ calculamos su derivada primera

$$f'(x) = 3x^2 - 2 \Longrightarrow m = f'(2) = 10$$

Por otra parte $f(2) = 5$ y tendremos que la ecuación de la **recta tangente** es

$$y - 5 = 10(x - 2)$$

y la ecuación de la **recta normal** es

$$y - 5 = -\frac{1}{10}(x - 2)$$

Problema 242

Sea la función
$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + x - 12}$$

1. Estudiar el dominio, puntos de corte, intervalos de crecimiento y decrecimiento, y determinar sus extremos relativos.
2. Calcular sus asíntotas.
3. Con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar la gráfica de la función.

Solución:

1. Consta de varios apartados:

   a) **Dominio:** $Dom f(x) = R - \{-4, 3\}$

   b) **Puntos de Corte:**

   - Con el eje OY: $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$
   - Con el eje OX: $f(x) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$

   c) **Simetría:** La función no es ni par ni impar

   $$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 + (-x) - 12} = \frac{-x^3}{x^2 - x - 12} \neq \pm f(x)$$

   d) **Monotonía:**

   $$f'(x) = \frac{x^2(x^2 + 2x - 36)}{(x^2 + x - 12)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = -7,08,\ x = 5,08$$

   Para estudiar el signo de $f'(x)$ observamos que tan sólo basta con estudiar el signo de $x^2 + 2x - 36$ pues los otros factores están elevados al cuadrado y, por tanto, son siempre positivos.

	$(-\infty, -7,08)$	$(-7,08, 5,08)$	$(5,08, +\infty)$
$x + 7,08$	$-$	$+$	$+$
$x - 5,08$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
	crece	decrece	crece

   e) **Extremos relativos:** A la vista del apartados anterior observamos que en el punto de abcisa $x = -7,08$ la función pasa de crecer a decrecer y, por tanto, se trata de un **máximo**, que corresponde al punto $(-7,08; -11,43)$. Si observamos ahora el punto de abcisa $x = 5,08$ la función pasa de decrecer a crecer y, por tanto, estamos ante un **mínimo**, que corresponde al punto $(5,08; 6,94)$

2. **Asíntotas:**

   - **Verticales:**

   $$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow -4^-} \dfrac{x^3}{x^2 + x - 12} = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -4^+} \dfrac{x^3}{x^2 + x - 12} = +\infty \end{array}\right. \Longrightarrow x = -4$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 4^-} \dfrac{x^3}{x^2+x-12} = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 4^+} \dfrac{x^3}{x^2+x-12} = +\infty \end{array}\right. \Longrightarrow x = 3$$

- **Horizontales:**

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^3}{x^2+x-12} = \infty \Longrightarrow \text{No hay Horizontales}$$

- **Oblicuas:** La recta $y = mx + n$ es una asíntota oblicua si

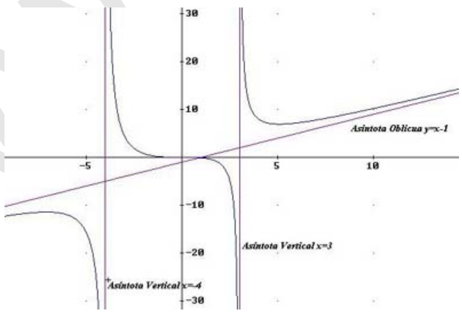
$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^3}{x^3+x^2-12x} = 1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - nx) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+x-12} - x\right) =$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{-x^2+12}{x^2+x-12} = -1$$

La recta $y = x - 1$ es una asíntota Oblicua.

3. **Representación Gráfica de la función:** Con los datos obtenidos hasta ahora es suficiente para hacer una representación gráfica bastante precisa de la función que nos ocupa.



Problema 243 Sea la función

$$f(x) = \frac{x}{x^2+4}$$

Se pide:

1. Calcular el área que encierra esta función el eje OX, las rectas $x = 0$ y $x = 1$.
2. Calcular Las rectas tangente y normal a la función en el punto de abcisa $x = 1$.

Solución:

1.

$$\int \frac{x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + C$$

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+4|\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{4}\right)$$

2.

$$f'(x) = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2};\quad m = f'(1) = \frac{3}{25};\quad f(1) = \frac{1}{5}$$

La recta tangente es $y - \frac{1}{5} = \frac{3}{25}(x-1) \Longrightarrow 3x - 2y + 2 = 0$.

La recta normal es $y - \frac{1}{5} = -\frac{25}{3}(x-1) \Longrightarrow 125x + 15y - 128 = 0$.

Problema 244 Dada la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2-4}}$$

1. Calcular su dominio
2. Calcular sus asíntotas.

Solución:

1. Por ser una raiz, tiene que ser

$$\frac{x^2-1}{x^2-4} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-2)} \geq 0$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x^2-1}{x^2-4}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Luego $Dom f = (-\infty,-2) \cup [-1,1] \cup (2,\infty)$

2. **Asíntotas verticales:**

$$\lim_{x\longrightarrow 2^+}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2-4}}=\left[\sqrt{\frac{3}{0^+}}\right]=+\infty\Longrightarrow x=2$$

$$\lim_{x\longrightarrow -2^-}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2-4}}=\left[\sqrt{\frac{3}{0^+}}\right]=+\infty\Longrightarrow x=-2$$

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow \infty}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2-4}}=1\Longrightarrow y=1$$

Asíntotas oblicuas: No hay, ya que hemos encontrado horizontales.

Problema 245 Representar gráficamente la función $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

Solución:

1. **Dominio:** $Dom f = R-\{1\}$

2. **Puntos de Corte:**

   - Con el eje OY:

   $$x=0\Longrightarrow f(0)=0\Longrightarrow (0,0)$$

   - Con el eje OX:

   $$f(x)=0\Longrightarrow \frac{x^3}{(x-1)^2}=0\Longrightarrow x=0\Longrightarrow (0,0)$$

3. **Simetrias:**

$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x-1)^2}=-\frac{x^3}{(x+1)^2}\Longrightarrow \text{ni par ni impar}$$

4. **Asíntotas:**

   - **Verticales:**

$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1^+}\frac{x^3}{(x-1)^2}=\left[\frac{1}{0^+}\right]=+\infty\\[2ex] \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1^-}\frac{x^3}{(x-1)^2}=\left[\frac{1}{0^+}\right]=+\infty\end{array}\right.\Longrightarrow x=1$$

- **Horizontales:**

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty \Longrightarrow \text{no hay}$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$\left\{\begin{array}{l} m = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{\frac{x^3}{(x-1)^2}}{x} = 1 \\ \\ n = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{x^3}{(x-1)^2} - x \right) = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow y = x+2$$

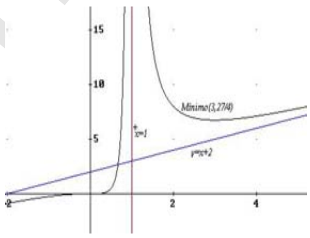
5. **Extremos:**

$$f'(x) = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0, \ \ x = 3$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, +\infty)$
$x - 1$	$-$	$+$	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
	crece	decrece	crece

En el punto $\left(3, \dfrac{27}{4}\right)$ la función tiene un mínimo.

6. **Dibujo de la gráfica:**



Problema 246 Dada la función $f(x) = \dfrac{2x^2}{x-1}$ Calcular:

1. Dominio.
2. Puntos de corte con los ejes.
3. Simetrías.
4. Asíntotas.
5. Representación gráfica aproximada.

Solución:

1. $Dom\, f = R - \{1\}$

2. Con el eje OY : $x = 0 \Longrightarrow (0, 0)$

   Con el eje OX : $f(x) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$.

3. $$f(-x) = \frac{2x^2}{-x-1}$$

   Luego ni es par ni es impar.

4. - **Verticales:** $x = 1$

     $$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

     $$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

   - **Horizontales:**

     $$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \infty$$

     Luego no hay

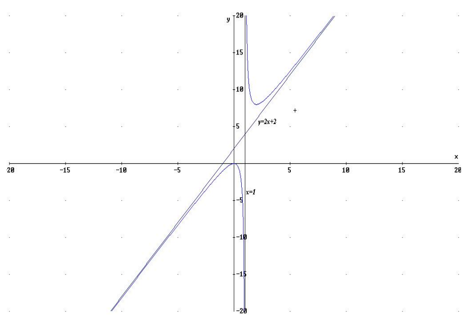
   - **Oblicuas:** $y = mx + n$

     $$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 - x} = 2$$

     $$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{2x^2}{x - 3} - 2x \right) = 2$$

     $$y = 2x + 2$$

5.



Problema 247 Dada la función $f(x) = \dfrac{2x-3}{x^2-3x}$ Calcular:

1. Dominio.
2. Puntos de corte con los ejes.
3. Simetrías.
4. Asíntotas.
5. Monotonia.
6. Máximos y Mínimos.
7. Representación gráfica aproximada.
8. Calcular el área encerrada por $f(x)$, las rectas $x = 1$, $x = 2$ y el eje OX.
9. Calcular la recta tangente y normal a $f(x)$ en $x = 2$

Solución:

1. $Dom\, f = R - \{0, 3\}$
2. Con el eje OY : No tiene

   Con el eje OX : $f(x) = 0 \Longrightarrow (3/2, 0)$.
3. $$f(-x) = \frac{-2x-3}{(-x)^2+3x}$$

   Luego ni es par ni es impar.
4. - **Verticales:** $x = 3$ y $x = 0$

   $$\lim_{x\longrightarrow 3^+} f(x) = \frac{3}{0^+} = -\infty$$

   $$\lim_{x\longrightarrow 3^-} f(x) = \frac{3}{0^-} = +\infty$$

   $$\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

   $$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

   - **Horizontales:**

   $$\lim_{x\longrightarrow \infty} f(x) = 0 \Longrightarrow y = 0$$

- **Oblicuas:** No Hay

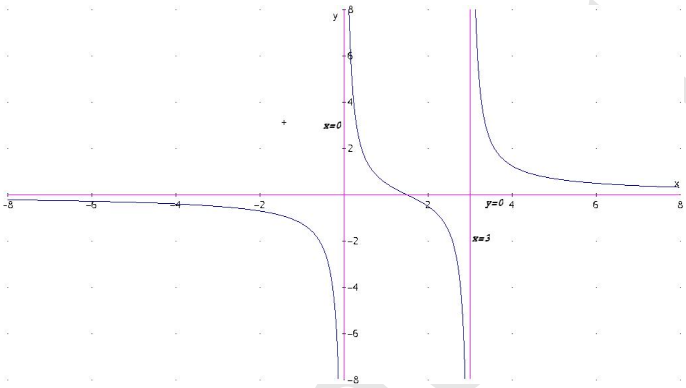
5.

$$f'(x) = \frac{-2x^2 + 6x - 9}{(x^2 - 3x)^2} < 0$$

La función es siempre decreciente y por tanto no tiene ni máximos ni mínimos.

6. No tiene.

7. Representación:



8.

$$\int_1^{3/2} \frac{2x-3}{x^2-3x}\, dx + \int_{3/2}^{2} \frac{2x-3}{x^2-x}\, dx =$$

$$\ln|x^2-3x|\Big]_1^{3/2} + \ln|x^2-3x|\Big]_{3/2}^{2} = 2\ln\left(\frac{9}{8}\right) = 0,2355660712$$

9.

$$f'(2) = -\frac{5}{4}, \quad f(2) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{tangente}: \ y - \frac{1}{2} = -\frac{5}{4}(x-2)$$

$$\text{normal}: \ y - \frac{1}{2} = \frac{4}{5}(x-2)$$

Problema 248 Dada la función $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x}$ Calcular:

1. Dominio.

2. Puntos de corte con los ejes.

3. Simetrías.
4. Asíntotas.
5. Monotonia.
6. Máximos y Mínimos.
7. Representación gráfica aproximada.
8. Calcular el área encerrada por $f(x)$, las rectas $x = 2$, $x = 3$ y el eje OX.
9. Calcular la recta tangente y normal a $f(x)$ en $x = 2$

Solución:

1. $Dom\, f = R - \{0, 1\}$
2. Con el eje OY : No tiene

   Con el eje OX : $f(x) = 0 \Longrightarrow (1/2, 0)$.
3. $$f(-x) = \frac{-2x - 1}{(-x)^2 - x}$$

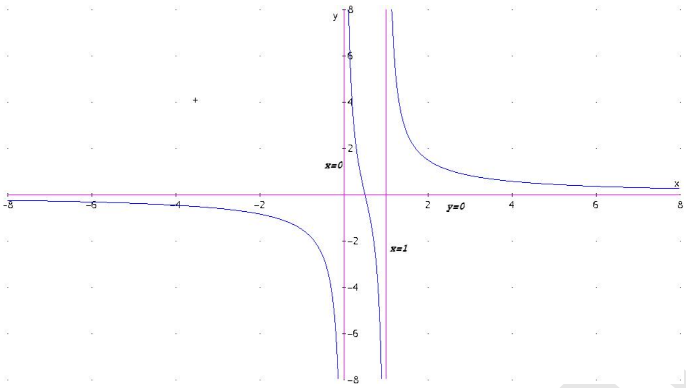
   Luego ni es par ni es impar.
4. - **Verticales:** $x = 1$ y $x = 0$

     $$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$
     $$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$
     $$\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$
     $$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$
   - **Horizontales:**
     $$\lim_{x\longrightarrow \infty} f(x) = 0 \Longrightarrow y = 0$$
   - **Oblicuas:** No Hay
5. $$f'(x) = \frac{-2x^2 + 2x - 1}{(x^2 - x)^2} < 0$$

   La función es siempre decreciente y por tanto no tiene ni máximos ni mínimos.

6. No tiene.

7. Representación:



8.

$$\int_2^3 \frac{2x-1}{x^2-x}\, dx = \ln|x^2-x|\Big]_2^3 = \ln 3$$

9.

$$f'(2) = -\frac{5}{4}, \quad f(2) = \frac{3}{2}$$

$$\text{tangente}: \ y - \frac{3}{2} = -\frac{5}{4}(x-2)$$

$$\text{normal}: \ y - \frac{3}{2} = \frac{4}{5}(x-2)$$

Problema 249 Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ Calcular:

1. Dominio.
2. Puntos de corte con los ejes.
3. Simetrías.
4. Asíntotas.
5. Monotonia.
6. Máximos y Mínimos.
7. Curvatura y puntos de inflexión
8. Representación gráfica aproximada.

Solución:

1. $Dom\, f = R - \{-1, 1\}$
2. Con el eje OY : $(0,0)$

   Con el eje OX : $f(x) = 0 \Longrightarrow (0,0)$.
3. $$f(-x) = -\frac{x^3}{x^2-1}$$

   Luego es impar.
4. - **Verticales:** $x = 1$ y $x = -1$

     $$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

     $$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

     $$\lim_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = \frac{-1}{0^-} = -\infty$$

     $$\lim_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = \frac{-1}{0^+} = +\infty$$

   - **Horizontales:**

     $$\lim_{x\longrightarrow \infty} f(x) = \infty$$

     Luego no hay
   - **Oblicuas:** $y = mx + n$

     $$m = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3-x} = 1$$

     $$n = \lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = 0$$

     $$y = x$$
5. $$f'(x) = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} = 0$$

$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$+$	$-$	$+$
creciente	decreciente	creciente

6. Máximo en el punto $\left(-\sqrt{3}, -\dfrac{(\sqrt{3})^3}{2}\right)$

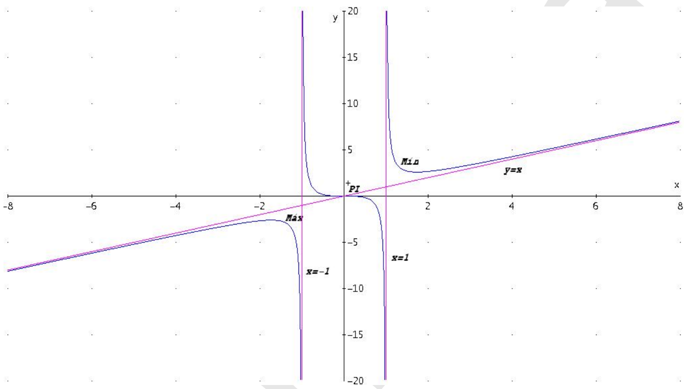
   Mínimo en el punto $\left(\sqrt{3}, \dfrac{(\sqrt{3})^3}{2}\right)$

7.

$$f''(x) = \frac{x(2x^2+6)}{(x^2-1)^3}$$

$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$-$	$+$	$-$	$+$
cóncava	convexa	cóncava	convexa

En $x = -1$ y en $x = 1$ la función tiene asíntotas y, por tanto, no pueden ser puntos de inflexión.



Problema 250 Dada la función $f(x) = \dfrac{4x^2}{x-2}$ Calcular:

1. Dominio.
2. Puntos de corte con los ejes.
3. Simetrías.
4. Asíntotas.
5. Monotonia.
6. Máximos y Mínimos.
7. Curvatura y puntos de inflexión
8. Representación gráfica aproximada.

Solución:

1. $Dom\, f = R - \{2\}$

2. Con el eje OY : $(0,0)$

   Con el eje OX : $f(x) = 0 \Longrightarrow (0,0)$.

3. $$f(-x) = \frac{x^2}{-x-2}$$

   Luego no es ni par ni impar.

4. - **Verticales:** $x =$

     $$\lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \frac{16}{0^+} = +\infty$$

     $$\lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \frac{16}{0^-} = -\infty$$

   - **Horizontales:**

     $$\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \infty$$

     Luego no hay

   - **Oblicuas:** $y = mx + n$

     $$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{4x^2}{x^2-2x} = 4$$

     $$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{4x^2}{x^2-2x} - 4x\right) = 8$$

     $$y = 4x + 8$$

5. $$f'(x) = \frac{x(4x-16)}{(x-2)^2} = 0$$

$(-\infty, 0)$	$(0,4)$	$(4,\infty)$
$+$	$-$	$+$
creciente	decreciente	creciente

6. Máximo en el punto $(0,0)$

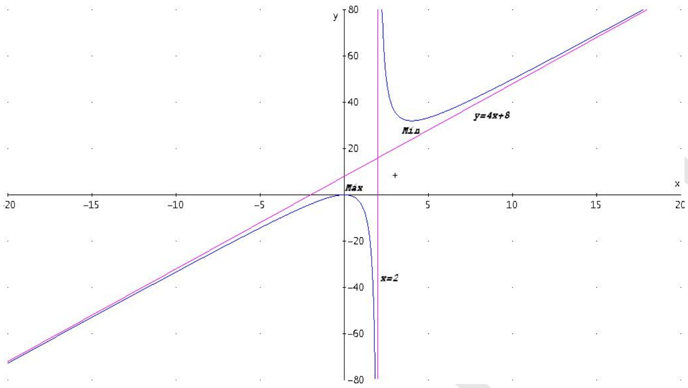
   Mínimo en el punto $(4,32)$

7.

$$f''(x) = \frac{32}{(x-2)^3}$$

$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$-$	$+$
cóncava	convexa

En $x = -1$ y en $x = 1$ la función tiene asíntotas y, por tanto, no pueden ser puntos de inflexión, si lo será $x = 0$.



Problema 251 Dada la función $f(x) = 3x^4 - 20x^3 - 6x^2 + 60x - 1$ Calcular:

1. Monotonia.
2. Máximos y Mínimos.
3. Curvatura

Solución:

1.

$$f'(x) = 12x^3 - 60x^2 - 12x + 60 = (x-1)(x+1)(x-5)$$

$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 5)$	$(5, \infty)$
$-$	$+$	$-$	$+$
decrece	crece	decrece	crece

Máximo en $x = 1$, Mínimos en $x = -1$ y $x = 5$

2.

$$f''(x) = 36x^2 - 120x - 12 \Longrightarrow x = 3,43; \;\; x = -0,09$$

$(-\infty, -0,09)$	$(-0,09, 3,43)$	$(3,43, \infty)$
$+$	$-$	$+$
convexa	cóncava	convexa

$$f'''(x) = 72x - 120 \Longrightarrow f'''(-0,09) \neq 0, \;\; f'''(3,43) \neq 0 \Longrightarrow$$

$x = -0{,}09$ y $x = 3,43$ son puntos de inflexión.

Problema 252 Dada la función $f(x) = x^4 - 14x^3 + 24x - 1$ Calcular:

1. Monotonia.
2. Máximos y Mínimos.
3. Curvatura

Solución:

1.

$$f'(x) = 4x^3 - 28x + 24 = (x+3)(x-1)(x-2)$$

$(-\infty, -3)$	$(-3, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
$-$	$+$	$-$	$+$
decrece	crece	decrece	crece

Máximo en $x = 1$, Mínimos en $x = -3$ y $x = 2$

2.

$$f''(x) = 12x^2 - 28 \Longrightarrow x = 1,53; \;\; x = -1,53$$

$(-\infty, -1,53)$	$(-1,53; 1,53)$	$(1,53; \infty)$
$+$	$-$	$+$
convexa	cóncava	convexa

$$f'''(x) = 24x \Longrightarrow f'''(-1,53) \neq 0, \;\; f'''(1,53) \neq 0 \Longrightarrow$$

$x = -1,53$ y $x = 1,53$ son puntos de inflexión.

Problema 253 Estudiar la monotonía, máximos y mínimos de las siguientes funciones

1. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 2}$
2. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$

Solución:

1.

$$f'(x) = \frac{x(x+4)}{(x+2)^2} = 0 \Longrightarrow x = -4, \; x = 0$$

	$(-\infty, -4)$	$(-4, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

Luego en el punto $(-4, -9)$ la función tiene un máximo, y el punto $(0, -1)$ la función tiene un mínimo.

2.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Longrightarrow x = -1, \;\; x = 3$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

Luego en el punto $(-1, 12)$ la función tiene un máximo, y el punto $(3, -20)$ la función tiene un mínimo.

$$f''(x) = 6x - 6 \Longrightarrow \begin{cases} f''(-1) = -12 > 0 \Longrightarrow \text{Máximo} \\ f''(3) = 12 < 0 \Longrightarrow \text{Mínimo} \end{cases}$$

Problema 254 Dadas la curva: $y = \dfrac{x^2+1}{x-2}$, calcule:

1. Corte con los ejes y domino de definición.
2. Simetría.
3. Asíntotas.
4. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
5. Extremos.
6. Curvatura y puntos de Inflexión.
7. Representación aproximada.

Solución:

1.

$$y = \frac{x^2+1}{x-2}$$

- Corte con el eje OX hacemos $y = 0$ y no hay.
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, -1/2)$.
- $Dom(f) = R - \{2\}$

2. Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 2$

$$\lim_{x \longrightarrow 2} \frac{x^2+1}{x-2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{x^2+1}{x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} \frac{x^2+1}{x-2} = +\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^2+1}{x-2}=\infty$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^2+1}{x^2-2x}=1$$

$$n=\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-2}-x\right)=2$$

$$y=x+2$$

3.

$$y'=\frac{x^2-4x-1}{(x-2)^2}=0\Longrightarrow x=2-\sqrt{5}\quad x=2+\sqrt{5}$$

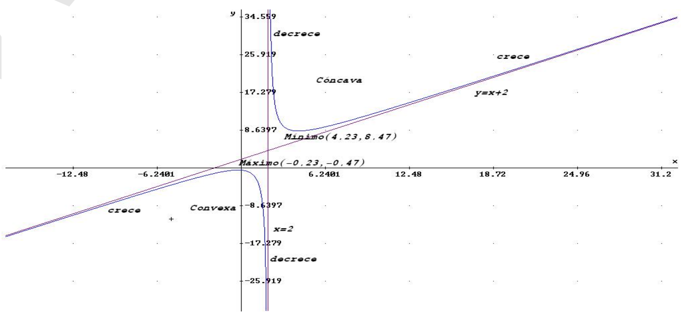
	$(-\infty, 2-\sqrt{5})$	$(2-\sqrt{5}, 2+\sqrt{5})$	$(2+\sqrt{5}, +\infty)$
y'	$+$	$-$	$+$
y	crece	decrece	crece

4. La función tiene un máximos en el punto $(-0{,}23, -0{,}47)$ y un mínimo en $(4{,}23, 8{,}47)$.

5. $y''=\dfrac{10}{(x-2)^3}\neq 0$ La función no tiene puntos de inflexión.

	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
y''	$-$	$+$
y	convexa	cóncava

6. Representación



Problema 255 Dadas la curva: $y=\dfrac{x^2+1}{x+2}$, calcule:

1. Corte con los ejes y domino de definición.
2. Simetría.
3. Asíntotas.
4. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
5. Extremos.
6. Curvatura y puntos de Inflexión.
7. Representación aproximada.

Solución:

1.

$$y = \frac{x^2+1}{x+2}$$

- Corte con el eje OX hacemos $y = 0$ y no hay.
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 1/2)$.
- $Dom(f) = R - \{-2\}$

2. Asíntotas:

- **Verticales:** $x = -2$

$$\lim_{x\longrightarrow -2} \frac{x^2+1}{x+2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -2^-} \frac{x^2+1}{x+2} = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -2^+} \frac{x^2+1}{x+2} = +\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x+2} = \infty$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x^2+2x} = 1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x+2} - x \right) = -2$$

$$y = x - 2$$

3.

$$y' = \frac{x^2+4x-1}{(x+2)^2} = 0 \Longrightarrow x = -2-\sqrt{5} \quad x = -2+\sqrt{5}$$

	$(-\infty, -2-\sqrt{5})$	$(-2-\sqrt{5}, -2+\sqrt{5})$	$(-2+\sqrt{5}, +\infty)$
y'	$+$	$-$	$+$
y	crece	decrece	crece

4. La función tiene un máximos en el punto $(-4{,}236, -8{,}472)$ y un mínimo en $(0{,}236, 0{,}472)$.

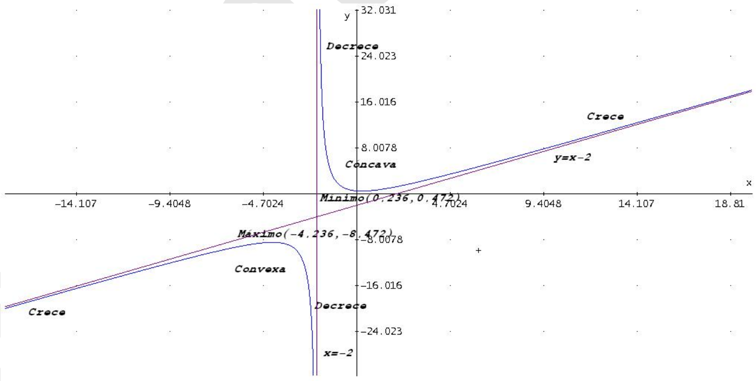
5.

$$y'' = \frac{10}{(x+2)^3} \neq 0$$

La función no tiene puntos de inflexión.

	$(-\infty, -2)$	$(-2, +\infty)$
y''	$-$	$+$
y	convexa	cóncava

6. Representación



Problema 256 Dadas la curva: $f(x) = \dfrac{x^3+3}{x^2}$, calcule:

1. Corte con los ejes y domino de definición.

2. Simetría.

3. Asíntotas.

4. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

5. Extremos.
6. Curvatura y puntos de Inflexión.
7. Representación aproximada.
8. Área encerrada entre la función, el eje de abcisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.
9. Encontrar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a esta gráfica en el punto de abcisa $x = 1$

Solución:

1.
$$f(x) = \frac{x^3+3}{x^2}$$

- Corte con el eje OX hacemos $y = 0 \Longrightarrow x^3+3 = 0 \Longrightarrow x = -\sqrt[3]{3}$.
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow$ No hay.
- $Dom(f) = R - \{0\}$

2. $f(-x) \neq f(x) \Longrightarrow$ No es PAR.

   $f(-x) \neq -f(x) \Longrightarrow$ No es IMPAR.

3. Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 0$
$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x^3+3}{x^2} = \pm\infty$$
$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{x^3+3}{x^2} = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty$$
$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{x^3+3}{x^2} = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty$$
- **Horizontales:** No hay
$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^3-1}{x^2} = \infty$$
- **Oblicuas:** $y = mx + n$
$$m = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^3+3}{x^3} = 1$$
$$n = \lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\frac{x^3+3}{x^2} - x\right) = 0$$
$$y = x$$

4.

$$f'(x) = \frac{x^3 - 6}{x^3} = 0 \Longrightarrow x = \sqrt[3]{6}$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \sqrt[3]{6})$	$(\sqrt[3]{6}, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	crece	decrece	crece

Crece: $(-\infty, 0) \cup (\sqrt[3]{6}, \infty)$

Decrece: $(0, \sqrt[3]{6})$

5. La función tiene un mínimo en el punto $(1{,}817120592, 2{,}725680889)$ donde pasa de decrecer a crecer, en el punto donde $x = 0$ la función pasa de crecer a decrecer, pero no es ni máximo ni mínimo, ya que la recta $x = 0$ es una asíntota.

6.

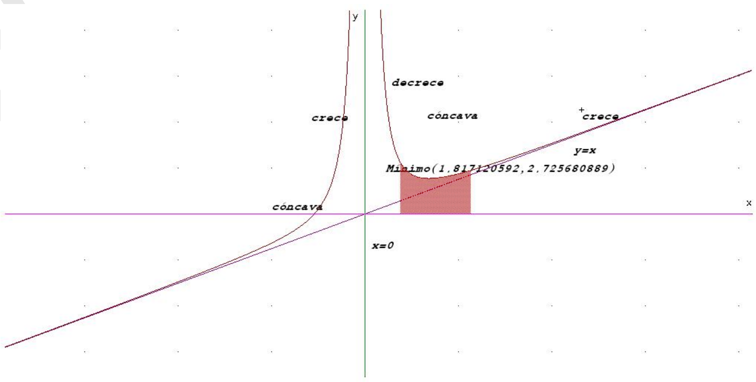
$$f''(x) = \frac{18}{x^4} \neq 0$$

Luego no hay puntos de inflexión.

Como el numerador es siempre positivo, y el denominador es siempre positivo, la segunda derivada es siempre positiva. En conclusión, la función es cóncava en todo su dominio.

Convexa: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

7. Representación



8.

$$F(x)=\int_1^3\frac{x^3+3}{x^2}\,dx=\int\left(x+\frac{3}{x^2}\right)\,dx=\left.\frac{x^2}{2}-\frac{3}{x}\right]_1^3=6\,u^2$$

9.

$$x=1\Longrightarrow f(1)=4,\;\; m=f'(1)=-5$$

$$y-4=-5(x-1)\ \text{ tangente},\;\; y-4=\frac{1}{5}(x-1)\ \text{ normal}$$

Problema 257 Dadas la curva: $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2-1}$, calcule:

1. Corte con los ejes y domino de definición.
2. Simetría.
3. Asíntotas.
4. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
5. Extremos.
6. Curvatura y puntos de Inflexión.
7. Representación aproximada.
8. Encontrar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a esta gráfica en el punto de abcisa $x=2$

Solución:

1.

$$f(x)=\frac{x^2+3}{x^2-1}$$

- Corte con el eje OX hacemos $y=0\Longrightarrow x^2+3=0\Longrightarrow$ No tiene soluciós, luego no hay puntos de corte con el eje de abcisas.
- Corte con el eje OY hacemos $x=0\Longrightarrow$ $(0,-3)$.
- $Dom(f)=R-\{-1,1\}$

2. $f(-x)=f(x)\Longrightarrow$ Es PAR.

3. Asíntotas:

- **Verticales:**

  $x = -1$:
  $$\begin{cases} \lim_{x\longrightarrow -1^-} \dfrac{x^2+3}{x^2-1} = \left[\dfrac{4}{0^+}\right] = +\infty \\ \\ \lim_{x\longrightarrow -1^+} \dfrac{x^2+3}{x^2-1} = \left[\dfrac{4}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$$
  $x = 1$:
  $$\begin{cases} \lim_{x\longrightarrow 1^-} \dfrac{x^2+3}{x^2-1} = \left[\dfrac{4}{0^-}\right] = -\infty \\ \\ \lim_{x\longrightarrow -1^+} \dfrac{x^2+3}{x^2-1} = \left[\dfrac{4}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$
  ]

- **Horizontales:** $y = 1$
  $$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2+3}{x^2-1} = 1$$

- **Oblicuas:** No hay al haber horizontales

4.
$$f'(x) = -\frac{8x}{(x^2-1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	crece	decrece

Crece: $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$

Decrece: $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

5. La función tiene un máximo en el punto $(0, -3)$ donde pasa de crecer a decrecer.

6.
$$f''(x) = \frac{8(3x^2+1)}{(x^2-1)^3} \neq 0$$

Luego no hay puntos de inflexión.

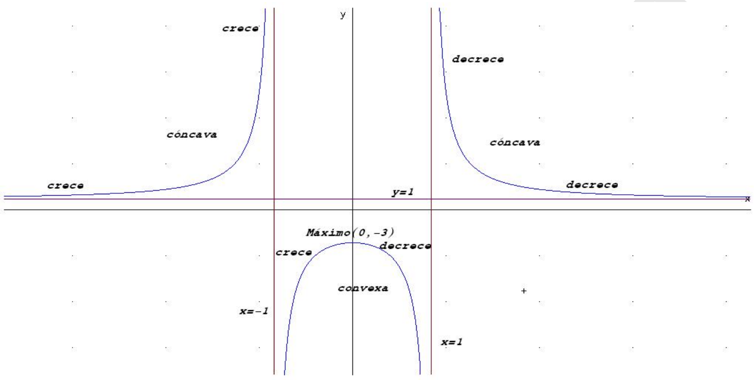
Como el numerador es siempre positivo, tendremos que estudiar el signo del denominador.

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	cóncava	convexa	cóncava

Convexa: $(-1,1)$

Cóncava: $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

7. Representación



8.

$$x=2\Longrightarrow f(2)=\frac{7}{3},\ \ m=f'(2)=-\frac{16}{9}$$

$$y-\frac{7}{3}=-\frac{16}{9}(x-2)\ \text{tangente},\ \ y-\frac{7}{3}=\frac{9}{16}(x-2)\ \text{normal}$$

Problema 258 Dadas la curva: $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}$, calcule:

1. Corte con los ejes y domino de definición.
2. Simetría.
3. Asíntotas.
4. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
5. Extremos.
6. Curvatura y puntos de Inflexión.

7. Representación aproximada.

Solución:

1.

$$y = \frac{x^2-1}{x^2}$$

- Corte con el eje OX hacemos $y = 0 \Longrightarrow (1,0),\ (-1,0)$.
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow$ No hay.
- $Dom(f) = R - \{0\}$
- $f(-x) = \frac{(-x)^2-1}{(-x)^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = f(x) \Longrightarrow$ la función es par, simétrica respecto al eje OY.

2. Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 0$

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x^2-1}{x^2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{x^2-1}{x^2} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{x^2-1}{x^2} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty$$

- **Horizontales:** $y = 1$, ya que

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2-1}{x^2} = 1$$

- **Oblicuas:** No hay, ya que existen asíntotas horizontales.

3.

$$y' = \frac{2}{x^3} \neq 0$$

No hay ni máximos ni mínimos

	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$
y'	$-$	$+$
y	decrece	crece

Crece en el intervalo $(0,\infty)$ y Decrece en el itervalo $(-\infty,0)$.

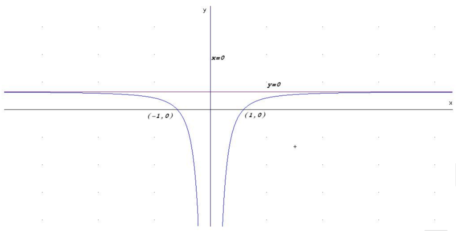
4. La función no tiene ni máximos ni mínimos.

5.

$$y'' = \frac{-6}{x^4} \neq 0$$

La función no tiene puntos de inflexión y es siempre negativa. La función es Convexa en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

6. Representación



Problema 259 Dadas la curva: $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$, calcule:

1. Corte con los ejes y domino de definición.
2. Simetría.
3. Asíntotas.
4. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
5. Extremos.
6. Curvatura y puntos de Inflexión.
7. Representación aproximada.

Solución:

1.

$$y = \frac{x+1}{x}$$

- Corte con el eje OX hacemos $y = 0 \Longrightarrow\ (-1, 0)$.
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow$ No hay.
- $Dom(f) = R - \{0\}$
- $f(-x) = \frac{-x+1}{-x} \Longrightarrow$ la función no es par ni impar.

2. Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x+1}{x} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{x+1}{x} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{x+1}{x} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

- **Horizontales:** $y = 1$, ya que

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

- **Oblicuas:** No hay, ya que existen asíntotas horizontales.

3.

$$y' = \frac{-1}{x^2} \neq 0$$

No hay ni máximos ni mínimos. Como la primera derivada es siempre negativa, la función decrece en todo el dominio de f, es decir, en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

4.

$$y'' = \frac{2}{x^3} \neq 0$$

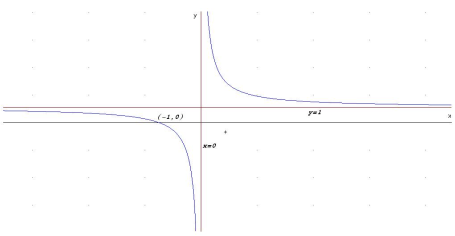
La función no tiene puntos de inflexión. La función es Convexa en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
y'	$-$	$+$
y	convexa	cóncava

La función es Convexa en el intervalo $(-\infty, 0)$

La función es Cóncava en el intervalo $(0, \infty)$.

5. Representación



Problema 260 Sean la función real de variable real
$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{x-1}$$
Se pide estudiar:

1. Dominio de f.
2. Puntos de corte.
3. Signo de la función en las distintas regiones en las que está definida.
4. Simetría.
5. Asíntotas.
6. Monotonía y extremos relativos.
7. Curvatura y puntos de inflexión.
8. Representación gráfica.
9. Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 3$.
10. Calcular el área del recinto limitado por la curva el eje de abcisas y las rectas $x = 2$ y $x = 4$.

Solución:

1. Dominio de f: $\text{Dom}(f) = R - \{1\}$
2. Puntos de corte:

   Con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow y = -4 \Longrightarrow (0, -4)$

   Con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x = 2 \Longrightarrow (2, 0)$

3. Signo de la función: $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x-1} \geq 0 \Longrightarrow$

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$

4. Simetría:
$$\left\{ \begin{array}{l} f(-x) = \dfrac{(-x-2)^2}{-x-1} = -\dfrac{(x+2)^2}{x+1} \\ \\ f(-x) \neq f(x) \text{ y } f(-x) \neq -f(x) \end{array} \right.$$
   La función no es ni par ni impar

5. Asíntotas:

   - Verticales: $x = 1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} \dfrac{(x-2)^2}{x-1} = \left[\dfrac{1}{0^-}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} \dfrac{(x-2)^2}{x-1} = \left[\dfrac{1}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

   - Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{(x-2)^2}{x-1} = \infty$$

   - Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{(x-2)^2}{x^2-x} = 1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{(x-2)^2}{x-1} - x\right) = -3$$

$$y = x - 3$$

6. Monotonía y extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0, \ \ x = 2$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo: $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

La función es decreciente en el intervalo: $(0, 1) \cup (1, 2)$

La función presenta un Máximo en el punto $(0, -4)$ y un Mínimo en el $(2, 0)$.

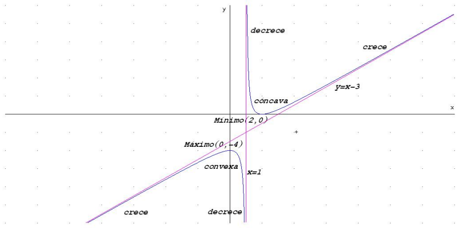
7. Curvatura y puntos de inflexión:

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} \neq 0$$

Como $f''(x)$ es distinta de cero para cualquier valor de x no hay puntos de inflexión.

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

8. Representación gráfica:



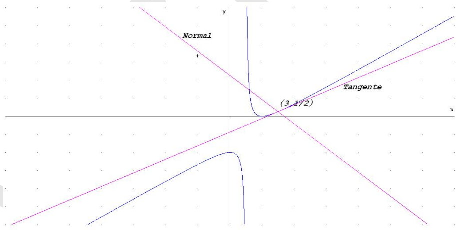
9. Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 3$:

   Como $f(3) = 1/2$ las rectas pasan por el punto $(3, 1/2)$.

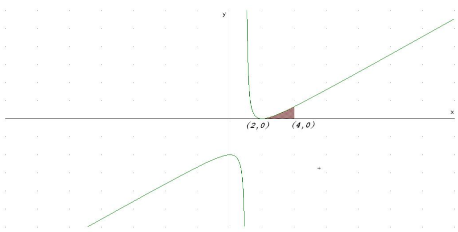
   Como $m = f'(3) = 3/4$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente}: \ y - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}(x-3)$$

$$\text{Recta Normal}: \ y - \frac{1}{2} = -\frac{4}{3}(x-3)$$



10. Calcular el área del recinto limitado por la curva el eje de abcisas y las rectas $x = 2$ y $x = 4$:



$$S=\int_2^4\frac{(x-2)^2}{x-1}\,dx=\left[\frac{x^2}{2}-3x+\ln|x-1|\right]_2^4=\ln 3$$

Problema 261 Sean la función real de variable real

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$$

Se pide estudiar:

1. Dominio de f.
2. Puntos de corte.
3. Signo de la función en las distintas regiones en las que está definida.
4. Simetría.
5. Asíntotas.
6. Monotonía y extremos relativos.
7. Curvatura y puntos de inflexión.
8. Representación gráfica.
9. Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x=3$.

Solución:

1. Dominio de f: $\mathrm{Dom}(f)=R-\{-1,1\}$
2. Puntos de corte:

   Con el eje OY hacemos $x=0\Longrightarrow y=-1\Longrightarrow (0,-1)$

   Con el eje OX no tiene
3. Signo de la función: $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\geq 0\Longrightarrow$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

4. Simetría:

$$f(-x)=\frac{(-x)^2+1}{(-x)^2-1}=f(x)$$

   La función es PAR.

5. Asíntotas:

   - Verticales: $x = 1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = \left[\dfrac{1}{0^-}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = \left[\dfrac{1}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

   $x = -1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} = \lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = \left[\dfrac{1}{0^+}\right] = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} = \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = \left[\dfrac{1}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$$

   - Horizontales: $y = 1$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1$$

   - Oblicuas: No hay

6. Monotonía y extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{-4x}{(x^2-1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo: $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$

La función es decreciente en el intervalo: $(0, 1) \cup (1, \infty)$

La función presenta un Máximo en el punto $(0, -1)$.

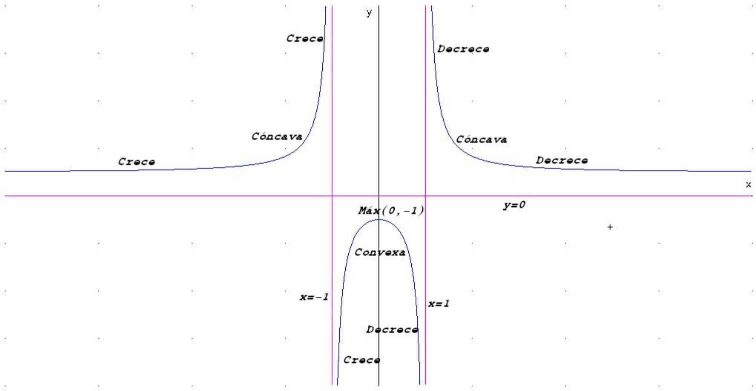
7. Curvatura y puntos de inflexión:

$$f''(x) = \frac{4(3x^2+1)}{(x^2-1)^3} \neq 0$$

Como $f''(x)$ es distinta de cero para cualquier valor de x no hay puntos de inflexión.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	cóncava $\smile$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

8. Representación gráfica:



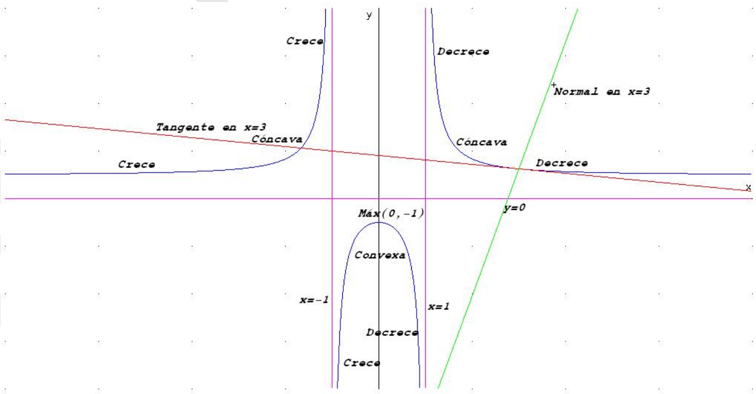
9. Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 3$:

   Como $f(3) = 5/4$ las rectas pasan por el punto $(3, 5/4)$.

   Como $m = f'(3) = -3/16$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente}: \; y - \frac{5}{4} = -\frac{3}{16}(x-3)$$

$$\text{Recta Normal}: \; y - \frac{5}{4} = \frac{16}{3}(x-3)$$



Problema 262 Sean la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

Se pide estudiar:

1. Dominio de f.
2. Puntos de corte.
3. Signo de la función en las distintas regiones en las que está definida.
4. Simetría.
5. Asíntotas.
6. Monotonía y extremos relativos.
7. Curvatura y puntos de inflexión.
8. Representación gráfica.
9. Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 3$.

Solución:

1. Dominio de f: $\text{Dom}(f) = R$
2. Puntos de corte:

   Con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow y = -1 \Longrightarrow (0, -1)$

   Con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow \frac{x^2-1}{x^2+1} = 0$ y tenemos los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$
3. Signo de la función: $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \geq 0 \Longrightarrow$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

4. Simetría:
$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^2 + 1} = f(x)$$
   La función es PAR.
5. Asíntotas:
   - Verticales: No tiene
   - Horizontales: $y = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

- Oblicuas: No hay

6. Monotonía y extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2-1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo: $(-\infty, 0)$

La función es creciente en el intervalo: $(0, \infty)$

La función presenta un Mínimo en el punto $(0, -1)$.

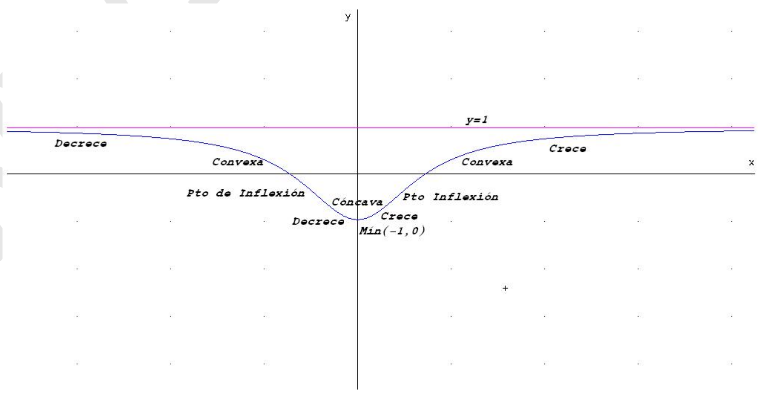
7. Curvatura y puntos de inflexión:

$$f''(x) = \frac{4(1-3x^2)}{(x^2+1)^3} = 0 \Longrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

	$(-\infty, -\sqrt{3}/3)$	$(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$	$(\sqrt{3}/3, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$	convexa $\frown$

Tenemos dos puntos de Inflexión en $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{2}\right)$

8. Representación gráfica:



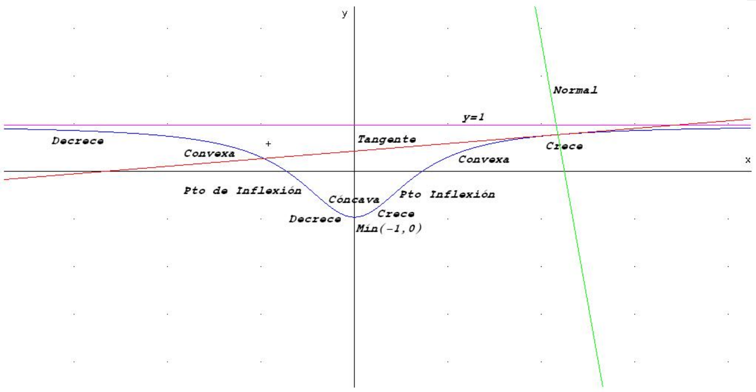
9. Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 3$:

Como $f(3) = 4/5$ las rectas pasan por el punto $(3, 4/5)$.

Como $m = f'(3) = 3/25$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente}: \; y - \frac{4}{5} = \frac{3}{25}(x-3)$$

$$\text{Recta Normal}: \; y - \frac{4}{5} = -\frac{25}{3}(x-3)$$



Problema 263 Sea la función $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$. Se pide:

1. Dominio.
2. Puntos de corte.
3. Signo.
4. Simetrías.
5. Asíntotas.
6. Monotonía y extremos.
7. Curvatura y puntos de inflexión.
8. Representación aproximada de la gráfica.
9. Rectas tangente y normal a la gráfica en $x = 2$.

Solución:

1. Dominio de f: $\text{Dom}(f) = R - \{1\}$

2. Puntos de corte:

   Con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow y = 0 \Longrightarrow (0, 0)$

   Con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow \frac{x}{x-1} = 0$ y tenemos el punto $(0, 0)$

3. Signo de la función: $f(x) = \dfrac{x}{x-1} \geq 0 \Longrightarrow$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

4. Simetría:
$$f(-x) \neq f(x) \quad f(-x) \neq -f(x)$$
   La función no es ni PAR ni IMPAR.

5. Asíntotas:

   - Verticales: $x = 1$
$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{x}{x-1} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$
$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{x}{x-1} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$
   - Horizontales: $y = 1$
$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x}{x-1} = 1$$
   - Oblicuas: No hay

6. Monotonía y extremos relativos:
$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0 \text{ siempre}$$
   La función es decreciente en el intervalo: $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

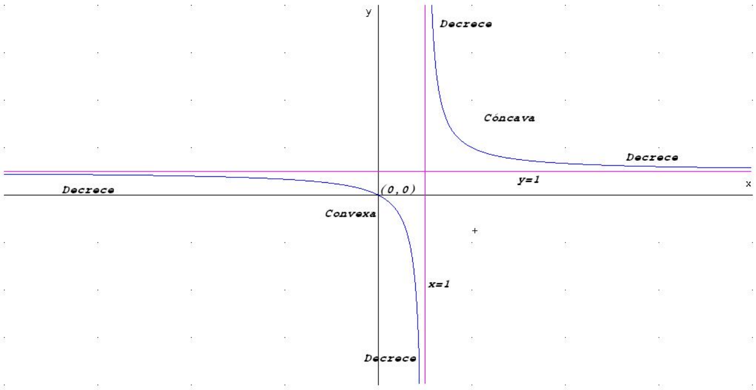
   La función no tiene ni máximos ni mínimos.

7. Curvatura y puntos de inflexión:
$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} \neq 0 \text{ siempre}$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

   No hay puntos de Inflexión.

8. Representación gráfica:



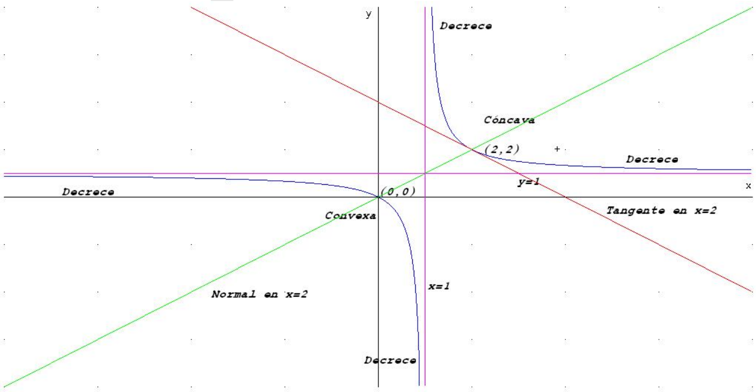
9. Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 2$:

Como $f(2) = 2$ las rectas pasan por el punto $(2, 2)$.

Como $m = f'(2) = -1$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente}: \ y - 2 = -(x - 2) \Longrightarrow x + y - 4 = 0$$

$$\text{Recta Normal}: \ y - 2 = x - 2 \Longrightarrow x - y = 0$$



Problema 264 Dadas la curva: $f(x) = \dfrac{2x-1}{(x+2)^2}$, calcule:

1. Corte con los ejes.

2. Dominio de definición.
3. Signo de la función.
4. Simetría.
5. Asíntotas.
6. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
7. Extremos.
8. Curvatura y puntos de Inflexión.
9. Representación aproximada.
10. Encontrar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a esta gráfica en el punto de abcisa $x = 2$

Solución:

1.

$$f(x) = \frac{2x-1}{(x+2)^2}$$

- Corte con el eje OX hacemos $y = 0 \Longrightarrow 2x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1/2 \Longrightarrow (1/2, 0)$.
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, -1/4)$.

2. $Dom(f) = R - \{-2\}$
3.

	$(-\infty, 1/2)$	$(1/2, +\infty)$
$f(x)$	$-$	$+$

4. $f(-x) \neq \pm f(x) \Longrightarrow$ No hay simetrías.
5. Asíntotas:

- **Verticales:**

  $x = -2$:
  $$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow -2^-} \frac{2x-1}{(x+2)^2} = \left[\frac{-5}{0^+}\right] = -\infty \\ \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow -2^+} \frac{2x-1}{(x+2)^2} = \left[\frac{-5}{0^+}\right] = -\infty \end{array}\right.$$

- **Horizontales:** $y = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{2x-1}{(x+2)^2} = 0$$

- **Oblicuas:** No hay al haber horizontales

6.

$$f'(x) = -\frac{2(3-x)}{(x+2)^3} = 0 \Longrightarrow x = 3$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 3)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decrece	crece	decrece

Crece: $(-2, 3)$
Decrece: $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$

7. La función tiene un máximo en el punto $(3, 1/5)$ donde pasa de crecer a decrecer.

8.

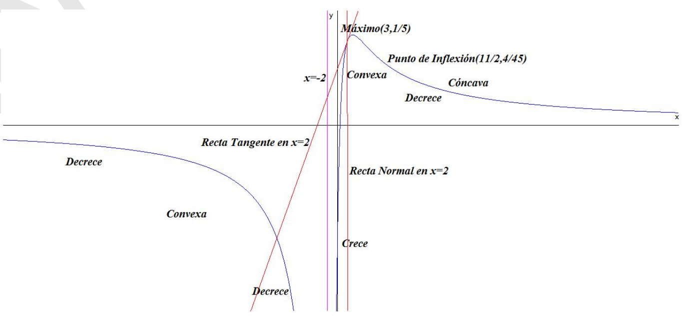
$$f''(x) = \frac{2(2x-11)}{(x^2+2)^4} = 0 \Longrightarrow x = \frac{11}{2}$$

Como el denominador es siempre positivo, tendremos que estudiar el signo del numerador.

	$(-\infty, 11/2)$	$(11/2, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa	cóncava

Convexa: $(-\infty, -2) \cup (-2, 11/2)$
Cóncava: $(11/2, \infty)$ Hay un punto de inflexión en el punto $(11/2, 4/45)$.

9. Representación



10.

$$x = 2 \Longrightarrow f(2) = \frac{3}{16}, \quad m = f'(2) = \frac{1}{32}$$

$$y - \frac{3}{16} = \frac{1}{32}(x-2) \text{ tangente}, \quad y - \frac{3}{16} = -32(x-2) \text{ normal}$$

Problema 265 Dadas la curva: $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-2}$, calcule:

1. Corte con los ejes.
2. Dominio de definición.
3. Signo de la función.
4. Simetría.
5. Asíntotas.
6. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
7. Extremos.
8. Curvatura y puntos de Inflexión.
9. Representación aproximada.
10. Encontrar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a esta gráfica en el punto de abcisa $x = 3$

Solución:

1.

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-2}$$

- Corte con el eje OX hacemos $y = 0 \Longrightarrow x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \mp 1 \Longrightarrow (-1, 0), \quad (1, 0)$.
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 1/2)$.

2. $Dom(f) = R - \{2\}$

3.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 2)$	$(2 + \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

4. $f(-x) \neq \pm f(x) \Longrightarrow$ No hay simetrías.

5. Asíntotas:

   - **Verticales:**

     $x = 2$:
     $$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} \dfrac{x^2-1}{x-2} = \left[\dfrac{3}{0^+}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} \dfrac{x^2-1}{x-2} = \left[\dfrac{3}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

   - **Horizontales:** No Hay
     $$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2-1}{x-2} = \infty$$

   - **Oblicuas:** $y = mx + n$
     $$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2-1}{x^2-2x} = 1$$
     $$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x^2-1}{x-2} - x\right) = 2$$
     $$y = x + 2$$

6.
$$f'(x) = \frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2} = 0 \Longrightarrow x^2-4x+1 = 0 \Longrightarrow x = 2+\sqrt{3} = 3,732, \;\; x = 2-\sqrt{3} = 0,268$$

	$(-\infty, 2-\sqrt{3})$	$(2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$	$(2+\sqrt{3}, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Crece	Decrece	Crece

Crece: $(-\infty, 2-\sqrt{3}) \cup (2+\sqrt{3}, +\infty)$

Decrece: $(2-\sqrt{3}, 2) \cup (2, 2+\sqrt{3})$

7. La función tiene un máximo en el punto $(0,268; 0,536)$ donde pasa de crecer a decrecer y un mínimo en el punto $(3,732; 7,464)$ donde pasa de decrecer a crecer.

8.
$$f''(x) = \frac{6}{(x-2)^3} \neq 0 \Longrightarrow \text{No hay puntos de inflexión}$$

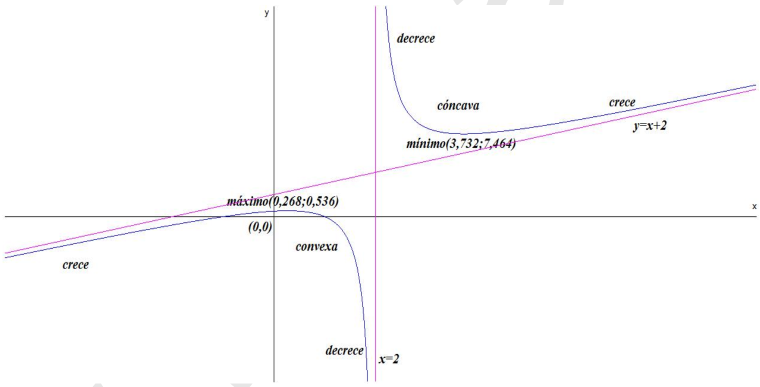
Como el numerador es siempre positivo, tendremos que estudiar el signo del denominador.

	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa	cóncava

Convexa: $(-\infty, 2)$

Cóncava: $(2, \infty)$

9. Representación



10.

$$x = 3 \Longrightarrow f(3) = 8, \;\; m = f'(3) = -2$$

$$y - 8 = -2(x - 3) \text{ tangente}, \;\; y - 8 = \frac{1}{2}(x - 3) \text{ normal}$$

Problema 266 Dadas la curva: $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 4}$, calcule:

1. Corte con los ejes.
2. Dominio de definición.
3. Signo de la función.
4. Simetría.

5. Asíntotas.
6. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
7. Extremos.
8. Curvatura y puntos de Inflexión.
9. Representación aproximada.
10. Encontrar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a esta gráfica en el punto de abcisa $x = 3$

Solución:

1.

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x^2-4}$$

- Corte con el eje OX hacemos $y = 0 \Longrightarrow x^2 + 2 = 0 \Longrightarrow$ no hay.
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, -1/2)$.

2. $Dom(f) = R - \{\pm 2\}$
3.

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2 + \infty)$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

4. $f(-x) = f(x) \Longrightarrow$ Es PAR.
5. Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 2$ y $x = -2$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} \dfrac{x^2+2}{x^2-4} = \left[\dfrac{6}{0^-}\right] = -\infty \\[2ex] \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} \dfrac{x^2+2}{x^2-4} = \left[\dfrac{6}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow -2^-} \dfrac{x^2+2}{x^2-4} = \left[\dfrac{6}{0^+}\right] = +\infty \\[2ex] \lim\limits_{x\longrightarrow -2^+} \dfrac{x^2+2}{x^2-4} = \left[\dfrac{6}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$$

- **Horizontales:** $y = 1$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2+2}{x^2-4} = 1$$

- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

6.

$$f'(x) = -\frac{12x}{(x^2-4)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	Crece	Decrece

Crece: $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$
Decrece: $(0, 2) \cup (2, +\infty)$

7. La función tiene un máximo en el punto $(0, -1/2)$ donde pasa de crecer a decrecer.

8.

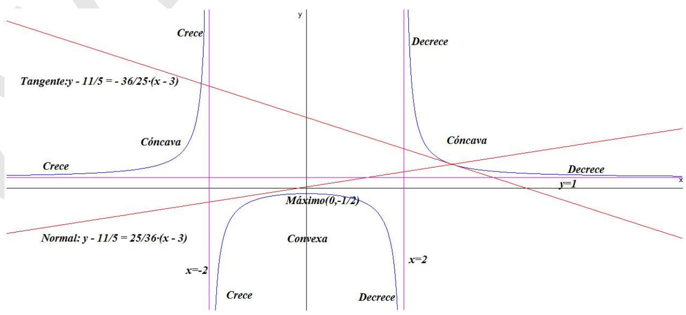
$$f''(x) = \frac{12(3x^2+4)}{(x^2-4)^3} \neq 0 \Longrightarrow \text{No hay puntos de inflexión}$$

Como el numerador es siempre positivo, tendremos que estudiar el signo del denominador.

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, +\infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	cóncava	convexa	cóncava

Cóncava: $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$
Convexa: $(-2, 2)$

9. Representación



10.

$$x = 3 \Longrightarrow f(3) = \frac{11}{5}, \quad m = f'(3) = -\frac{36}{25}$$

$$y - \frac{11}{5} = -\frac{36}{25}(x-3) \text{ tangente}, \quad y - \frac{11}{5} = \frac{25}{36}(x-3) \text{ normal}$$

Problema 267 Dadas la curva: $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$, calcule:

1. Corte con los ejes.
2. Dominio de definición.
3. Signo de la función.
4. Simetría.
5. Asíntotas.
6. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
7. Extremos.
8. Curvatura y puntos de Inflexión.
9. Representación aproximada.
10. Encontrar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a esta gráfica en el punto de abcisa $x = 1$

Solución:

1.
$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$$

   - Corte con el eje OX hacemos $y = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow (0,0)$.
   - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0,0)$.

2. $Dom(f) = R - \{-1\}$
3.

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f(x)$	$-$	$+$

4. $f(-x) \neq \pm f(x) \Longrightarrow$ No hay simetrías.
5. Asíntotas:

   - **Verticales:**

   $x = -1$:
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} \dfrac{x^3}{(x+1)^2} = \left[\dfrac{-1}{0^+}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} \dfrac{x^3}{(x+1)^2} = \left[\dfrac{-1}{0^+}\right] = -\infty \end{cases}$$

- **Horizontales:** No Hay

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^3}{(x+1)^2}=\infty$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^3}{x^3+2x^2+x}=1$$

$$n=\lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+2x+1}-x\right)=-2$$

$$y=x-2$$

6.

$$f'(x)=-\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}=0\Longrightarrow x=0,\ \ x=-3$$

	$(-\infty,-3)$	$(-3,-1)$	$(-1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Crece	Decrece	Crece

Crece: $(-\infty,-3)\cup(-1,\infty)$

Decrece: $(-3,-1)$

7. La función tiene un máximo en el punto $(-3,-27/4)$ donde pasa de crecer a decrecer, en $x=0$ no hay ni máximo ni mínimo, porque no cambia la monotonía.

8.

$$f''(x)=\frac{6x}{(x+1)^4}=0\Longrightarrow x=0$$

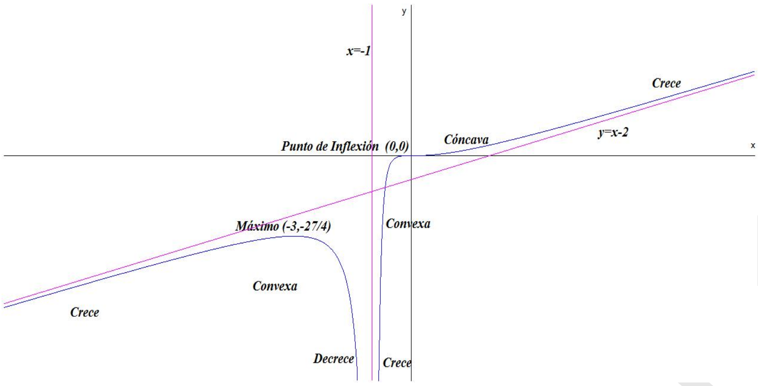
Como el denominador es siempre positivo, tendremos que estudiar el signo del numerador.

	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa	cóncava

Convexa: $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$

Cóncava: $(0,\infty)$

9. Representación



10.

$$x = 1 \Longrightarrow f(1) = \frac{1}{4}, \;\; m = f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$y - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}(x-1) \;\text{ tangente, }\; y - \frac{1}{4} = -2(x-1) \;\text{ normal}$$

Problema 268 Dadas la curva: $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2}$, calcule:

1. Corte con los ejes.
2. Dominio de definición.
3. Signo de la función.
4. Simetría.
5. Asíntotas.
6. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
7. Extremos.
8. Curvatura y puntos de Inflexión.
9. Representación aproximada.
10. Encontrar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a esta gráfica en el punto de abcisa $x = 1$

Solución:

1.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

- Corte con el eje OX hacemos $y = 0 \Longrightarrow x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow$ $(-1, 0), \quad (1, 0)$.
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow$ No Hay.

2. $Dom(f) = R - \{0\}$

3.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1 + \infty)$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

4. $f(-x) = f(x) \Longrightarrow$ Es PAR.

5. Asíntotas:

- **Verticales:**

  $x = 0$:
  $$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \dfrac{x^2 - 1}{x^2} = \left[\dfrac{-1}{0^+}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \dfrac{x^2 - 1}{x^2} = \left[\dfrac{-1}{0^+}\right] = -\infty \end{cases}$$

- **Horizontales:** $y = 1$

  $$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2} = 1$$

- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

6.

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} \neq 0 \Longrightarrow \text{No hay extremos}$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Decrece	Crece

Decrece: $(-\infty, 0)$

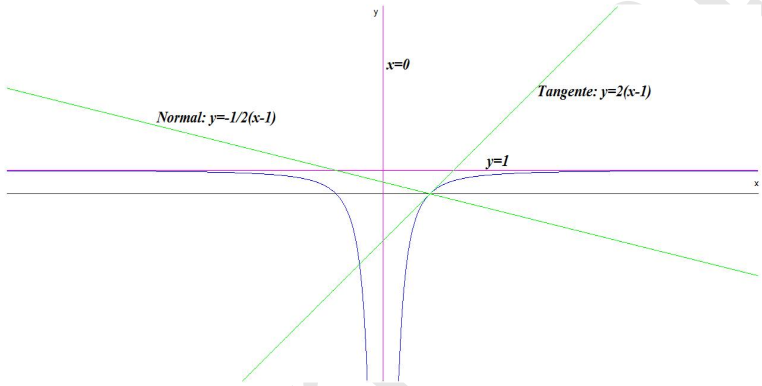
Crece: $(0, +\infty)$

7. No hay ni máximos ni mínimos.
8. $$f''(x) = -\frac{6}{x^4} \neq 0 \Longrightarrow \text{No hay puntos de inflexión}$$

   Tenemos que $f''(x) < 0$ siempre, luego es convexa en todo el dominio.

   Convexa: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

9. Representación



10. $$x = 1 \Longrightarrow f(1) = 0, \;\; m = f'(1) = 2$$

    $$y = 2(x-1) \;\text{ tangente, }\; y = -\frac{1}{2}(x-1) \;\text{ normal}$$

Problema 269 Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ Calcular:

1. Dominio.
2. Puntos de corte con los ejes.
3. Su signo.
4. Simetrías.
5. Asíntotas.
6. Monotonia.

7. Máximos y Mínimos.
8. Curvatura y puntos de inflexión
9. Representación gráfica aproximada.
10. Rectas tangente y normal en el punto de abcisa $x = 2$
11. Área comprendida entre la función y las rectas $x = -1/2$, $x = 1/2$ e $y = 0$.

Solución:

1. $Dom\, f = R - \{-1, 1\}$
2. Con el eje OY : $(0, 0)$
   Con el eje OX : $f(x) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$.
3.

$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$-$	$+$	$-$	$+$

4.
$$f(-x) = -\frac{x^3}{x^2 - 1}$$
   Luego es impar.
5.
   - **Verticales:** $x = 1$ y $x = -1$
   $$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$
   $$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$
   $$\lim_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$
   $$\lim_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$
   - **Horizontales:**
   $$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \infty$$
   Luego no hay
   - **Oblicuas:** $y = mx + n$
   $$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3 - x} = 1$$
   $$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = 0$$
   $$y = x$$

6.

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} = 0$$

$(-\infty,-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$	$(\sqrt{3},\infty)$
$+$	$-$	$+$
creciente	decreciente	creciente

7. Máximo en el punto $\left(-\sqrt{3}, -\frac{(\sqrt{3})^3}{2}\right)$

   Mínimo en el punto $\left(\sqrt{3}, \frac{(\sqrt{3})^3}{2}\right)$

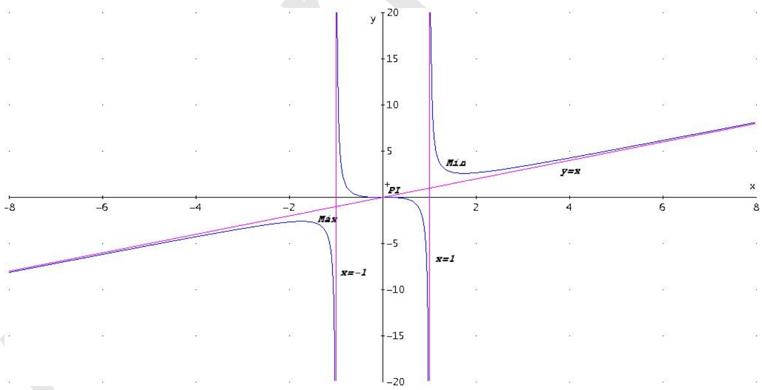
8.

$$f''(x) = \frac{x(2x^2+6)}{(x^2-1)^3}$$

$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$-$	$+$	$-$	$+$
convexa	cóncava	convexa	cóncava

En $x=-1$ y en $x=1$ la función tiene asíntotas y, por tanto, no pueden ser puntos de inflexión.

9. Representación:



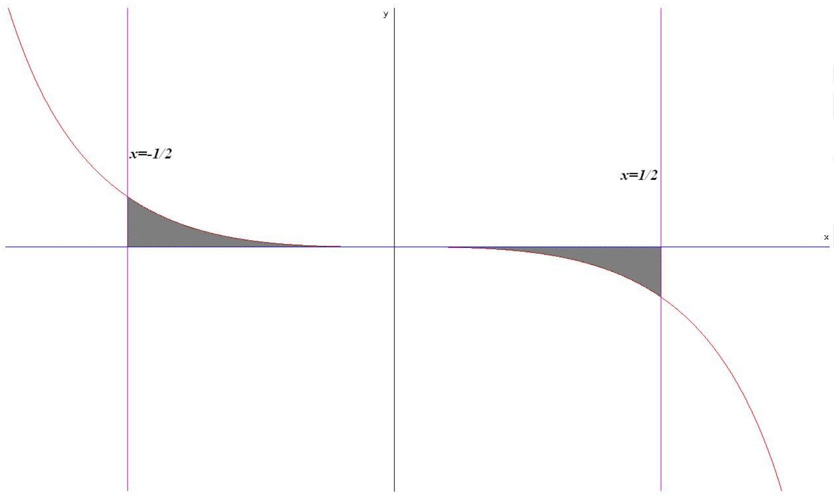
10.

$$x = 2 \Longrightarrow f(2) = \frac{8}{3}, \quad m = f'(2) = \frac{4}{9}$$

Recta Tangente: $y - \frac{8}{3} = \frac{4}{9}(x-2)$

Recta Normal: $y - \frac{8}{3} = -\frac{9}{4}(x-2)$

11. Área:



$$F(x) = \int \frac{x^3}{x^2-1}\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{\ln(x^2-1)}{2} + C$$

$$\int_{-1/2}^{0} \frac{x^3}{x^2-1}\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{\ln(x^2-1)}{2}\bigg]_{-1/2}^{0} = -\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\ln\frac{5}{4} = 0,018841$$

$$S = 2 \cdot 0,018841 = 0,03768207\ u^2$$

Problema 270 Sean la función real de variable real

$$f(x) = \frac{(x-3)^2}{x-2}$$

Se pide estudiar:

1. Dominio de f.
2. Puntos de corte.
3. Signo de la función en las distintas regiones en las que está definida.
4. Simetría.
5. Asíntotas.
6. Monotonía y extremos relativos.
7. Curvatura y puntos de inflexión.
8. Representación gráfica.

9. Calcular las posibles rectas tangentes a f que sean paralelas a la recta $y = -3x + 1$
10. Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 0$.
11. Calcular el área del recinto limitado por la curva el eje de abcisas y las rectas $x = 3$ y $x = 4$.

Solución:

1. Dominio de f: $\mathrm{Dom}(f) = R - \{2\}$
2. Puntos de corte:

   Con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow y = -9/2 \Longrightarrow (0, -9/2)$

   Con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x = 3 \Longrightarrow (3, 0)$

3. Signo de la función: $f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{x-2} \geq 0 \Longrightarrow$

	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$

4. Simetría:
$$\begin{cases} f(-x) = \dfrac{(-x-3)^2}{-x-2} = -\dfrac{(x+3)^2}{x+2} \\ \\ f(-x) \neq f(x) \text{ y } f(-x) \neq -f(x) \end{cases}$$
   La función no es ni par ni impar

5. Asíntotas:
   - Verticales: $x = 2$
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} = \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} \dfrac{(x-2)^2}{x-1} = \left[\dfrac{1}{0^-}\right] = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} = \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} \dfrac{(x-2)^2}{x-1} = \left[\dfrac{1}{0^+}\right] = +\infty \end{cases}$$
   - Horizontales: No hay
$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{(x-3)^2}{x-2} = \infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{(x-3)^2}{x^2-2x} = 1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{(x-3)^2}{x-2} - x\right) = -4$$

$$y = x - 4$$

6. Monotonía y extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2} = 0 \Longrightarrow x = 1,\ \ x = 3$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo: $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$

La función es decreciente en el intervalo: $(0, 2) \cup (2, 3)$

La función presenta un Máximo en el punto $(1, -4)$ y un Mínimo en el $(3, 0)$.

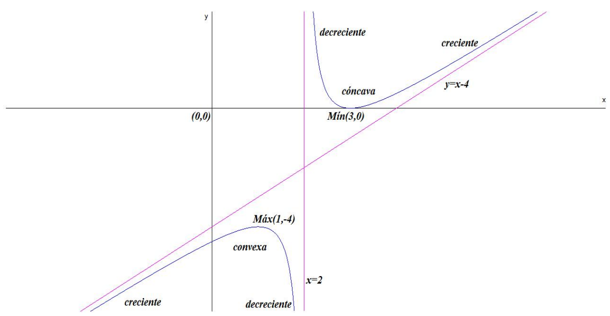
7. Curvatura y puntos de inflexión:

$$f''(x) = \frac{2}{(x-2)^3} \neq 0$$

Como $f''(x)$ es distinta de cero para cualquier valor de x no hay puntos de inflexión.

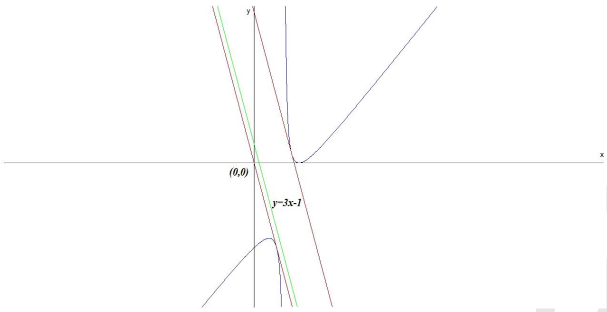
	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\frown$	cóncava $\smile$

8. Representación gráfica:



9.
$$m = f'(a) \Longrightarrow -3 = \frac{(a-1)(a-3)}{(a-2)^2} \Longrightarrow a = \frac{3}{2}, \ a = \frac{5}{2}$$

Si $a = \frac{3}{2}$ tenemos: $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{2} \Longrightarrow y + \frac{9}{2} = -3\left(x - \frac{3}{2}\right)$ Si $a = \frac{5}{2}$ tenemos: $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} \Longrightarrow y - \frac{1}{2} = -3\left(x - \frac{5}{2}\right)$

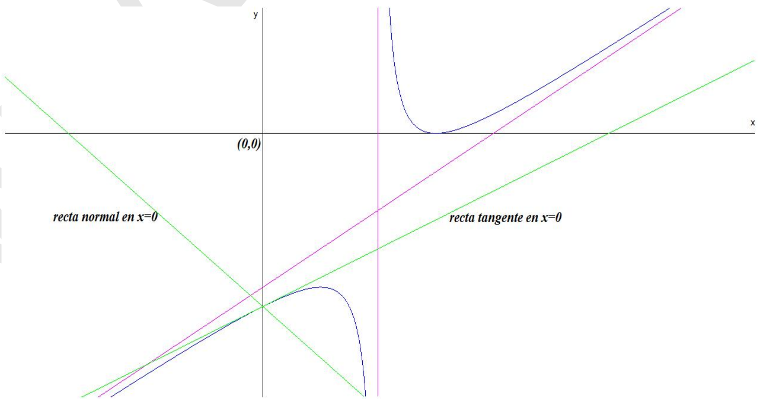


10. Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 0$:

Como $f(0) = -9/2$ las rectas pasan por el punto $(0, -9/2)$.
Como $m = f'(0) = 3/4$ tenemos que

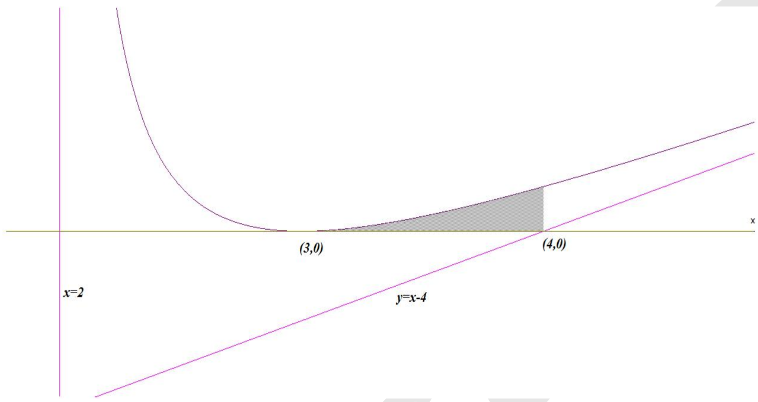
$$\text{Recta Tangente} : y + \frac{9}{2} = \frac{3}{4}x$$

$$\text{Recta Normal} : y + \frac{9}{2} = -\frac{4}{3}x$$



11. Calcular el área del recinto limitado por la curva el eje de abcisas y las rectas $x = 3$ y $x = 4$:

$$S = \int_3^4 \frac{(x-3)^2}{x-2}\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - 4x + \ln|x-2|\right]_3^4 = -\frac{1}{2} + \ln 2\ u^2$$



Problema 271 Dadas la curva: $f(x) = \dfrac{(x-2)^3}{x^2}$, calcule:

1. Dominio de f.
2. Puntos de corte.
3. Signo de la función en las distintas regiones en las que está definida.
4. Simetría.
5. Asíntotas.
6. Monotonía y extremos relativos.
7. Curvatura y puntos de inflexión.
8. Representación gráfica.
9. Calcular las posibles rectas tangentes a f que sean paralelas a la recta $y = x + 1$
10. Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 1$.
11. Calcular el área del recinto limitado por la curva el eje de abcisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

Solución:

1. Dominio de f: $\text{Dom}(f) = R - \{0\}$

2. Puntos de Corte

   - Corte con el eje OX hacemos $y = 0 \Longrightarrow (x-2)^3 = 0 \Longrightarrow x = 2 \Longrightarrow (2,0)$.
   - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow$ No hay.

3. $f(-x) \neq f(x) \Longrightarrow$ No es PAR.

   $f(-x) \neq -f(x) \Longrightarrow$ No es IMPAR.

4. Asíntotas:

   - **Verticales:** $x = 0$

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{(x-2)^3}{x^2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{(x-2)^3}{x^2} = \left[\frac{-4}{0^+}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{(x-2)^3}{x^2} = \left[\frac{-4}{0^+}\right] = -\infty$$

   - **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{(x-2)^3}{x^2} = \infty$$

   - **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{(x-2)^3}{x^3} = 1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2} - x\right) = -6$$

$$y = x - 6$$

5.

$$f'(x) = \frac{(x+4)(x-2)^2}{x^3} = 0 \Longrightarrow x = -4, \; x = 2$$

	$(-\infty,-4)$	$(-4,0)$	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	crece	decrece	crece

Crece: $(-\infty,-4) \cup (0,+\infty)$

Decrece: $(-4, 0)$

La función tiene un máximo en el punto $(-4, -27/2)$, en el punto donde $x = 2$ la función pasa de crecer a crecer, luego no es ni máximo ni mínimo, y en el punto $x = 0$ hay una asíntotata, luego tampoco puede ser ni máximo ni mínimo.

6.
$$f''(x) = \frac{24(x-2)}{x^4} = 0 \Longrightarrow x = 2$$

Como el denominador es siempre positivo, bastará con estudiar el numerador

	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
y''	$-$	$+$
y	convexa	cóncava

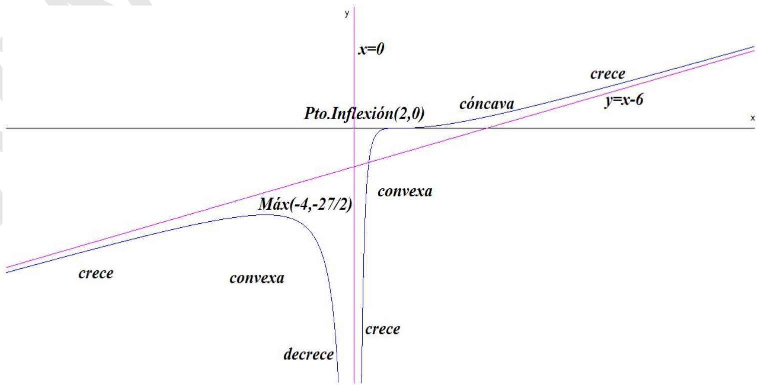
Convexa: $(-\infty, 0) \cup (0, 2)$

Cóncava: $(2, +\infty)$

En el punto $(2, 0)$ la gráfica pasa de ser convexa a ser cóncava y hay continuidad en ese punto, por lo que estamos ante un punto de inflexión.
Por el criterio de la tercera derivada sería
$$f'''(x) = \frac{24(8-3x)}{x^5} \Longrightarrow f'''(2) = \frac{3}{2} \neq 0$$

Luego en $x = 2$ hay un punto de inflexión.

7. Representación



8.
$$m = f'(a) \Longrightarrow 1 = \frac{(a+4)(a-2)^2}{a^3} \Longrightarrow a = \frac{4}{3}$$

Si $a = \dfrac{4}{3}$ tenemos:

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{1}{6} \Longrightarrow y + \frac{1}{6} = \left(x - \frac{4}{3}\right) \Longrightarrow 2x - 2y - 3 = 0$$

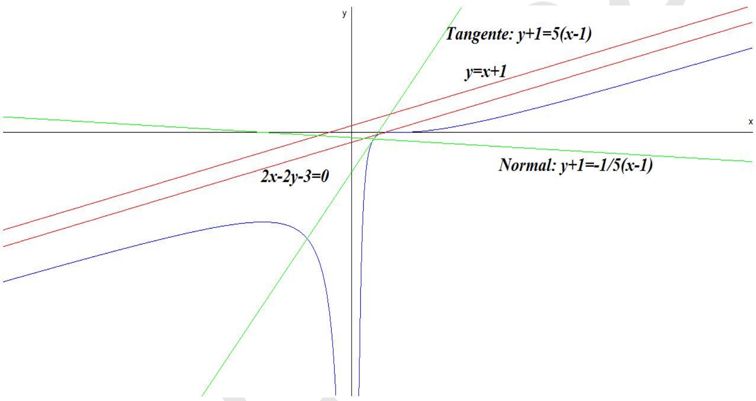
9. Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 1$:

   Como $f(1) = -1$ las rectas pasan por el punto $(1, -1)$.

   Como $m = f'(1) = 5$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente}: \ y + 1 = 5(x - 1)$$

$$\text{Recta Normal}: \ y + 1 = -\frac{1}{5}(x - 1)$$



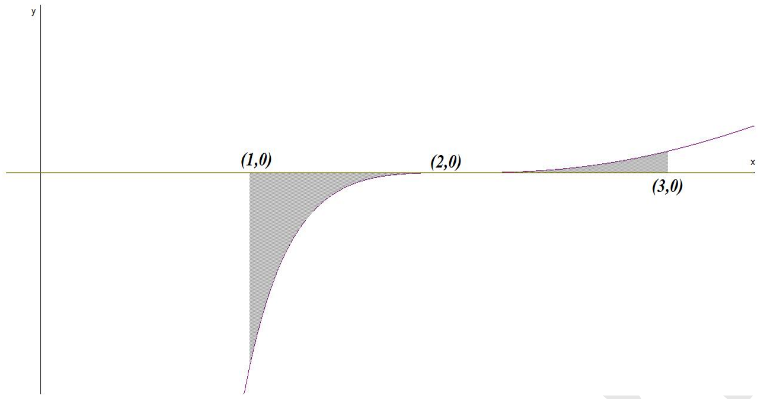
10. En el intervalo $[1, 3]$ hay un punto de corte de la función con el eje de abcisas en $x = 2$ y, por tanto, tendremos que integrar entre $[1, 2]$, que saldrá un valor negativo y entre $[2, 3]$ donde saldrá positiva.

$$F(x) = \int \frac{(x-2)^3}{x^2}\, dx = \int \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2}\, dx =$$

$$= \int \left(x - 6 + \frac{12}{x} - \frac{8}{x^2}\right) dx = \frac{x^2}{2} - 6x + 12\ln|x| + 8\frac{1}{x} + C$$

$$Área = |F(2) - F(1)| + |F(3) - F(2)| = \left|-\frac{17}{2} + 12\ln 2\right| + \left|-\frac{29}{6} + 12\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right| =$$

$$\frac{11}{3} + 12\ln\left(\frac{3}{4}\right) = 0,2144817972 \ u^2$$



Problema 272 Dadas la curva: $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$, calcule:

1. Dominio de f.
2. Puntos de corte.
3. Signo de la función en las distintas regiones en las que está definida.
4. Simetría.
5. Asíntotas.
6. Monotonía y extremos relativos.
7. Curvatura y puntos de inflexión.
8. Representación gráfica.
9. Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 1$.
10. Calcular la integral de esta función.

Solución:

1. Dominio de f: $\text{Dom}(f) = R - \{0\}$
2. Puntos de Corte
   - Corte con el eje OX hacemos $y = 0 \Longrightarrow x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1 \Longrightarrow (-1, 0)$ y $(1, 0)$.
   - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow$ No hay.
3.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
signo	$-$	$+$	$-$	$+$

4. $f(-x) = -f(x) \Longrightarrow$ Es IMPAR.

5. Asíntotas:

   - **Verticales:** $x = 0$

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x^2-1}{x} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{x^2-1}{x} = \left[\frac{-1}{0^-}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{x^2-1}{x} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty$$

   - **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2-1}{x} = \infty$$

   - **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2-1}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2-1}{x} - x\right) = 0$$

$$y = x$$

6. $f'(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2} = 0 \Longrightarrow x^2 + 1 = 0 \Longrightarrow$no tiene solución. Como además $f'(x) > 0$ podemos asegurar que la función es creciente en todo el dominio de la función $(R - \{0\})$ y no tiene ni máximos ni mínimos relativos.

7.

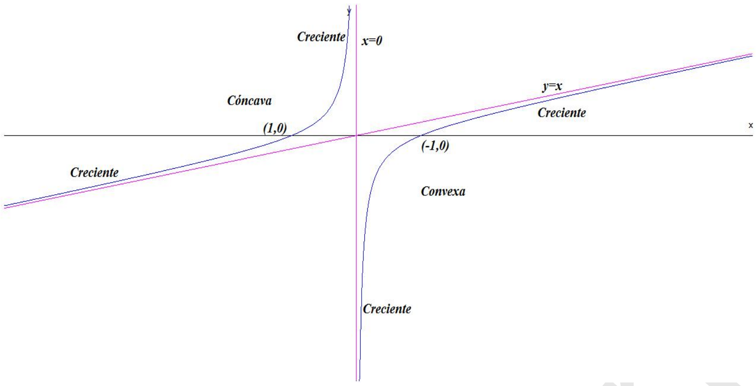
$$f''(x) = \frac{-2}{x^3} \neq 0$$

   Luego la función no tiene puntos de inflexión.

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
y''	$+$	$-$
y	cóncava	convexa

   Cóncava: $(-\infty, 0)$
   Convexa: $(0, +\infty)$

8. Representación:



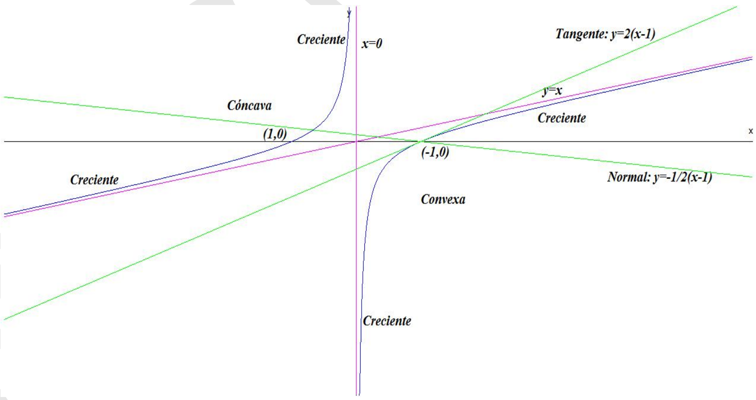
9. Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 1$:

   Como $f(1) = 0$ las rectas pasan por el punto $(1, 0)$.

   Como $m = f'(1) = 2$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente}: \; y = 2(x-1)$$

$$\text{Recta Normal}: \; y = -\frac{1}{2}(x-1)$$



10. $$\int \frac{x^2-1}{x}\,dx = \int \left(x - \frac{1}{x}\right)\,dx = x^2 - \ln x + C$$

Problema 273 Dadas la curva: $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x}$, calcule:

1. Dominio de f.

2. Puntos de corte.
3. Signo de la función en las distintas regiones en las que está definida.
4. Simetría.
5. Asíntotas.
6. Monotonía y extremos relativos.
7. Curvatura y puntos de inflexión.
8. Representación gráfica.
9. Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 1$.
10. Calcular la integral de esta función.

Solución:

1. Dominio de f: $\text{Dom}(f) = R - \{0\}$
2. Puntos de Corte
   - Corte con el eje OX hacemos $y = 0 \Longrightarrow x^2 + 1 = 0 \Longrightarrow$ No hay.
   - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow$ No hay.
3.

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
signo	$-$	$+$

4. $f(-x) = -f(x) \Longrightarrow$ Es IMPAR.
5. Asíntotas:
   - **Verticales:** $x = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^2+1}{2x} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{x^2+1}{2x} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{x^2+1}{2x} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

   - **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2+1}{2x} = \infty$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2+1}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{2x} - \frac{x}{2} \right) = 0$$

$$y = \frac{1}{2}x$$

6.

$$f'(x) = \frac{x^2-1}{2x^2} = 0 \Longrightarrow x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
y'	$+$	$-$	$+$
y	Creciente	Decreciente	Creciente

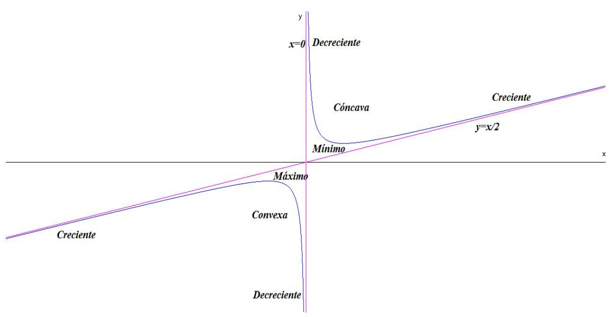
La función es creciente en: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
La función es decreciente en: $(-1, 0) \cup (0, 1)$
La función presenta un máximo en el punto $(-1, -1)$ y un mínimo en el punto $(1, 1)$.

7. $f''(x) = \dfrac{1}{x^3} \neq 0$ Luego la función no tiene puntos de inflexión.

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
y''	$-$	$+$
y	convexa	cóncava

Convexa: $(-\infty, 0)$ y Cóncava: $(0, +\infty)$

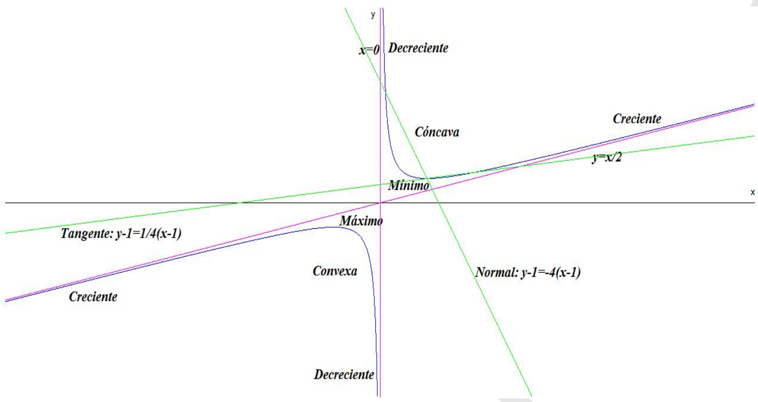
8. Representación



9. Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 1$:
   Como $f(1) = 1$ las rectas pasan por el punto $(1, 1)$.
   Como $m = f'(1) = 1/4$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente}: \; y - 1 = \frac{1}{4}(x - 1)$$

$$\text{Recta Normal}: \; y - 1 = -4(x - 1)$$



10.
$$\int \frac{x^2+1}{2x}\,dx = \int \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right) dx = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2} + C$$

Problema 274 Hallar una función polinómica de tercer grado tal que pasa por el punto $(0, 1)$, tenga un extremo relativo en $(1, 2)$ y un punto de inflexión en $x = 2$

Solución:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = 1 \Longrightarrow d = 1 \\ f(1) = 2 \Longrightarrow a + b + c + d = 2 \\ f'(1) = 0 \Longrightarrow 3a + 2b + c = 0 \\ f''(2) = 0 \Longrightarrow 12a + 2b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1/4 \\ b = -3/2 \\ c = 9/4 \\ d = 1 \end{array}\right.$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x + 1,$$

$f''(1) = 6a + 2b = 3/2 - 3 = -3/2 < 0 \Longrightarrow$ el extremo en el punto $(1, 2)$ es un máximo.

Problema 275 Dadas la curva: $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2-1}$, calcule:

1. Dominio de f.
2. Puntos de corte.
3. Signo de la función en las distintas regiones en las que está definida.
4. Simetría.
5. Asíntotas.
6. Monotonía y extremos relativos.
7. Curvatura y puntos de inflexión.
8. Representación gráfica.
9. Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 2$.
10. Calcular una recta tangente a la gráfica de f paralela a la recta de ecuación: $y = -\dfrac{9}{32}x - 1$
11. Calcular el área encerrada por la función, el eje OX y las rectas $x = 2$ y $x = 3$

Solución:

1. Dominio de f: $\mathrm{Dom}(f) = R - \{\pm 1\}$
2. Puntos de Corte
   - Corte con el eje OX hacemos $y = 0 \Longrightarrow x^2 + 2 = 0 \Longrightarrow$ No hay.
   - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow\ x = -2 \Longrightarrow\ (0, -2)$.
3.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(0, +\infty)$
signo	$+$	$-$	$+$

4. $f(-x) = f(x) \Longrightarrow$ Es PAR.
5. Asíntotas:
   - **Verticales:** $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} = \left[\frac{3}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+}\frac{x^2+2}{x^2-1}=\left[\frac{3}{0^+}\right]=+\infty$$

$x=-1$:

$$\lim_{x\longrightarrow -1}\frac{x^2+2}{x^2-1}=\pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-}\frac{x^2+2}{x^2-1}=\left[\frac{3}{0^+}\right]=+\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^+}\frac{x^2+2}{x^2-1}=\left[\frac{3}{0^-}\right]=-\infty$$

- **Horizontales:**

$$\lim_{x\longrightarrow \infty}\frac{x^2+1}{2x}=1\Longrightarrow y=1$$

- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

6.

$$f'(x)=-\frac{6x}{(x^2-1)^2}=0\Longrightarrow -6x=0\Longrightarrow x=0$$

	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$
y'	$+$	$-$
y	Creciente	Decreciente

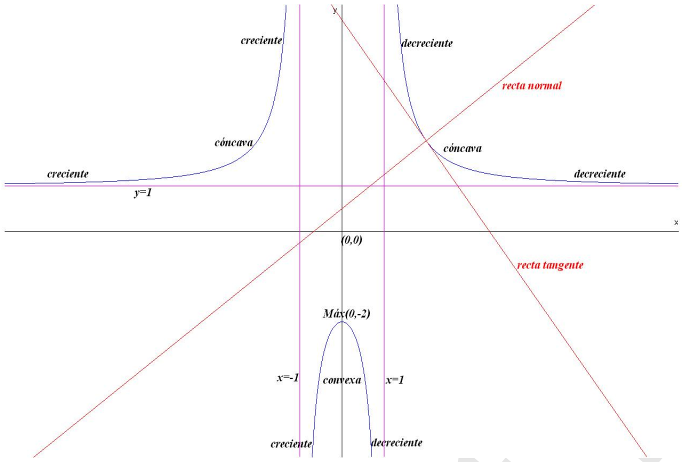
La función es creciente en: $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$
La función es decreciente en: $(0,1)\cup(1,\infty)$
La función presenta un máximo en el punto $(0,-2)$.

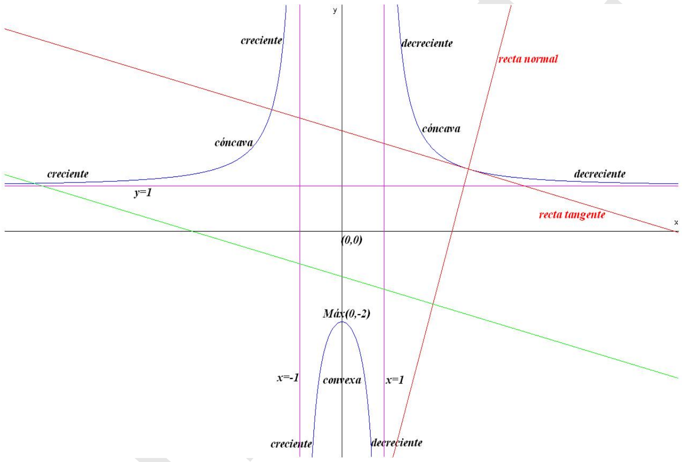
7. $f''(x)=\dfrac{18x^2+6}{(x^2-1)^3}\neq 0$ Luego la función no tiene puntos de inflexión.

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(0,+\infty)$
y''	$+$	$-$	$+$
y	cóncava	convexa	cóncava

Convexa: $(-1,1)$
Cóncava: $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

8. Representación





9. Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 2$:

   Como $f(2) = 2$ las rectas pasan por el punto $(2, 2)$.

   Como $m = f'(2) = -4/3$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente}: \ y - 2 = -\frac{4}{3}(x - 2)$$

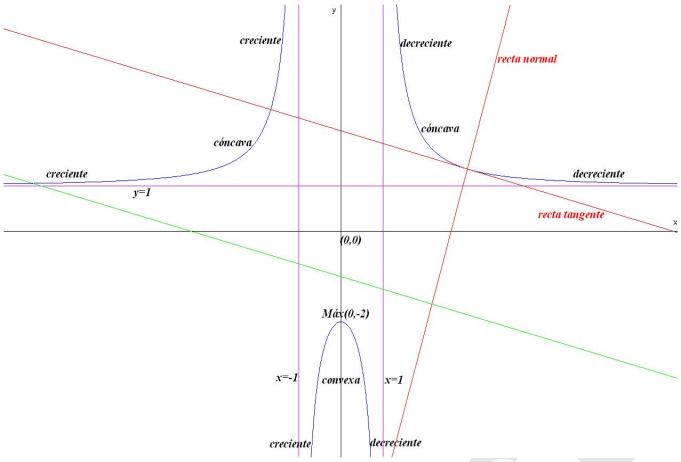
$$\text{Recta Normal}: \ y - 2 = \frac{3}{4}(x - 2)$$

10. $y = -\dfrac{9}{32}x - 1 \Longrightarrow m = -\dfrac{9}{32}$

$$m = f'(a) = -\frac{6a}{(a^2-1)^2} = -\frac{9}{32} \Longrightarrow a = 3 \Longrightarrow b = f(3) = \frac{11}{8}$$

Una recta tangente sería:

$$y - \frac{11}{8} = -\frac{9}{32}(x-3)$$



11.

$$F(x) = \int \frac{x^2+2}{x^2-1}\,dx = \int \left(1+\frac{3}{x^2-1}\right)dx = x+\frac{3}{2}(\ln|x-1|-\ln|x+1|)+C$$

$$\int_2^3 \frac{x^2+2}{x^2-1}\,dx = F(3)-F(2) = \frac{2+3\ln(3/2)}{2}\,u^2$$

Problema 276 Dada la curva: $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-2}$, calcule:

1. Dominio de f.
2. Puntos de corte.
3. Signo de la función en las distintas regiones en las que está definida.
4. Simetría.
5. Asíntotas.
6. Monotonía y extremos relativos.
7. Curvatura y puntos de inflexión.
8. Representación gráfica.
9. Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 1$.

10. Calcular el área delimitado por la función, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 1$

Solución:

1. Dominio de f: $\text{Dom}(f) = R - \{2\}$

2. Puntos de Corte

   - Corte con el eje OX hacemos $y = 0 \Longrightarrow x^2 + 1 = 0 \Longrightarrow$ No hay.
   - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = -\dfrac{1}{2}$.

3.

	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
signo	$-$	$+$

4. $f(-x) \neq \pm f(x) \Longrightarrow$ No es ni PAR ni IMPAR.

5. Asíntotas:

   - **Verticales:** $x = 2$

$$\lim_{x \longrightarrow 2} \frac{x^2 + 1}{x - 2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{x^2 + 1}{x - 2} = \left[\frac{5}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} \frac{x^2 + 1}{x - 2} = \left[\frac{5}{0^+}\right] = +\infty$$

   - **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x - 2} = \infty$$

   - **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x - 2} - x\right) = 2$$

$$y = x + 2$$

6.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x - 1}{(x-2)^2} = 0 \Longrightarrow x^2 - 4x - 1 = 0 \Longrightarrow$$

$$x = 2 + \sqrt{5} = 4,236; \;\; x = 2 - \sqrt{5} = -0,236$$

	$\left(-\infty, 2-\sqrt{5}\right)$	$\left(2-\sqrt{5}, 2+\sqrt{5}\right)$	$\left(2+\sqrt{5}, +\infty\right)$
y'	$+$	$-$	$+$
y	Creciente	Decreciente	Creciente

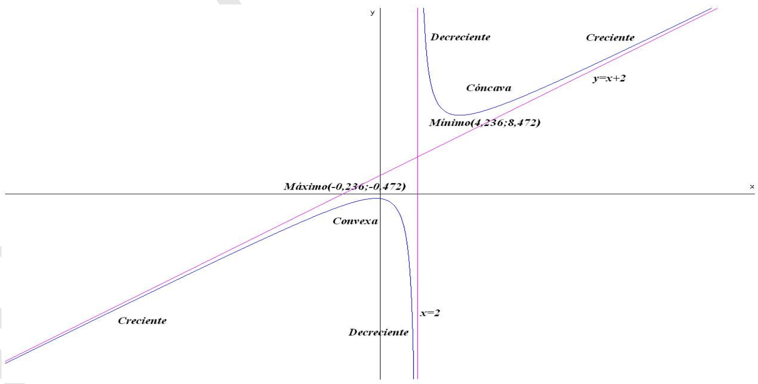
La función es creciente en: $\left(-\infty, 2-\sqrt{5}\right) \cup \left(2+\sqrt{5}, \infty\right)$
La función es decreciente en: $\left(2+\sqrt{5}, 2\right) \cup \left(2, 2+\sqrt{5}\right)$
La función presenta un máximo en el punto $\left(2-\sqrt{5}, 4-2\sqrt{5}\right) = (-0,236; -0,472))$ y un mínimo en el punto $\left(2+\sqrt{5}, 4+2\sqrt{5}\right) = (4,236; 8,472)$.

7. $f''(x) = \dfrac{10}{(x-2)^3} \neq 0$ Luego la función no tiene puntos de inflexión.

	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
y''	$-$	$+$
y	convexa	cóncava

Convexa: $(-\infty, 2)$
Cóncava: $(2, +\infty)$

8. Representación



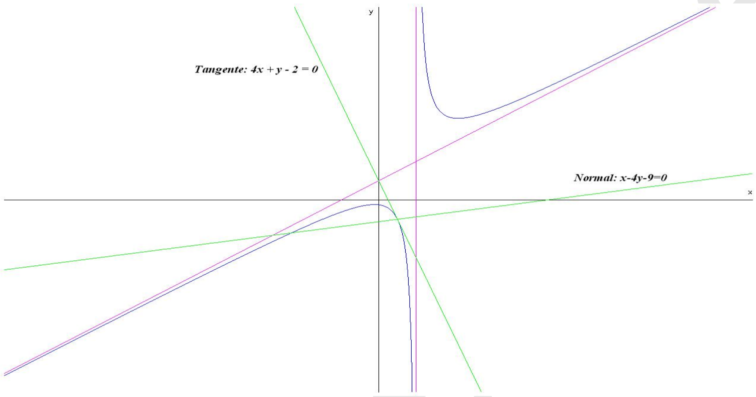
9. Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 1$:

Como $f(1) = -2$ las rectas pasan por el punto $(1, -2)$.

Como $m = f'(1) = -4$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente}: \ y + 2 = -4(x-1)$$

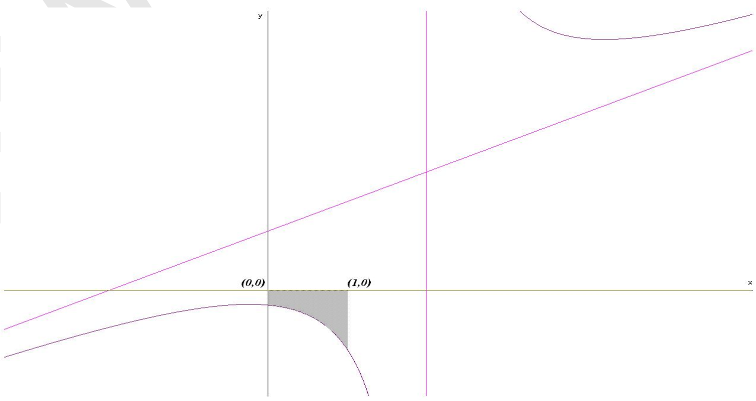
$$\text{Recta Normal}: \ y + 2 = \frac{1}{4}(x-1)$$



10.

$$S_1 = \int_0^1 \frac{x^2+1}{x-2}\,dx = \left.\frac{x^2}{2} + 2x + 5\ln|x-2|\right]_0^1 dx = \frac{5}{2} - 5\ln 2$$

$$S = |S_1| = 5\ln 2 - \frac{5}{2} = 0,9657\ u^2$$



Problema 277 Dada la curva: $f(x) = \dfrac{4x^2-1}{2x^2}$, calcule:

1. Dominio de f.
2. Puntos de corte.
3. Signo de la función en las distintas regiones en las que está definida.
4. Simetría.
5. Asíntotas.
6. Monotonía y extremos relativos.
7. Curvatura y puntos de inflexión.
8. Representación gráfica.
9. Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 1$.
10. Calcular el área delimitado por la función, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = 2$

Solución:

1. Dominio de f: $\text{Dom}(f) = R - \{0\}$
2. Puntos de Corte
   - Corte con el eje OX hacemos $y = 0 \Longrightarrow 4x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm\dfrac{1}{2}$.
   - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow$ No hay.
3.

	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
signo	$+$	$-$	$+$

4. $f(-x) = f(x) \Longrightarrow$ Es PAR.
5. Asíntotas:
   - **Verticales:** $x = 0$

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{4x^2 - 1}{2x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{4x^2 - 1}{2x^2} = \left[\frac{-1}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{4x^2 - 1}{2x^2} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{4x^2 - 1}{2x^2} = 2 \Longrightarrow y = 2$$

- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales

6. $f'(x) = \dfrac{1}{x^3} \neq 0 \Longrightarrow$ No hay extremos.

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
y'	$-$	$+$
y	Decreciente	Creciente

La función es decreciente en: $(-\infty, 0)$

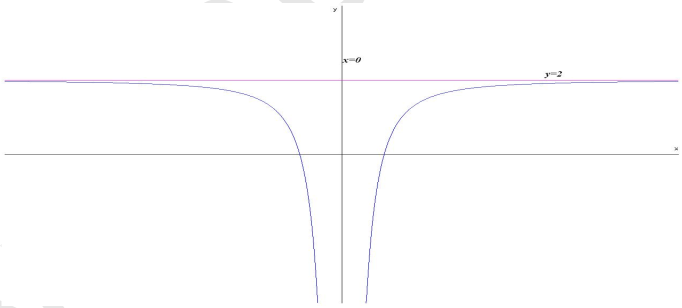
La función es creciente en: $(0, \infty)$

7.

$$f''(x) = -\frac{3}{x^4} \neq 0$$

Luego la función no tiene puntos de inflexión y además $f''(x) < 0 \Longrightarrow$ la función es cóncava en todo el dominio de la función en $R - \{0\}$

8. Representación



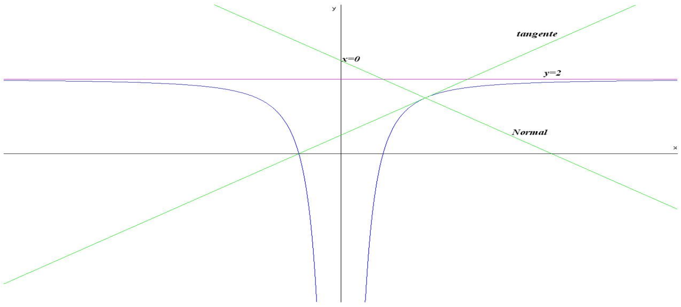
9. Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 1$:

Como $f(1) = \dfrac{3}{2}$ las rectas pasan por el punto $\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$.

Como $m = f'(1) = 1$ tenemos que

$$\text{Recta Tangente}: \ y - \frac{3}{2} = x - 1 \Longrightarrow 2x - 2y + 1 = 0$$

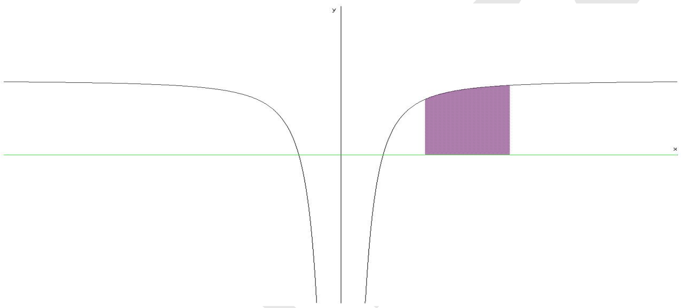
$$\text{Recta Normal}: \ y - \frac{3}{2} = -(x - 1) \Longrightarrow 2x + 2y - 5 = 0$$



10.

$$S_1 = \int_1^2 \frac{4x^2-1}{2x^2}\,dx = \int_1^2 \left(2 - \frac{1}{2}x^{-2}\right)\,dx = 2x + \frac{1}{2x}\Big]_1^2\,dx = \frac{7}{4}$$

$$S = |S_1| = \frac{7}{4} = 1,75\ u^2$$



Problema 278 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$$

Se pide:

1. Calcular su dominio.
2. Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
3. Calcular su signo.
4. Calcular su simetría.
5. Calcular sus asíntotas.
6. Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.

7. Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.

8. Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abcisa $x = 2$.

9. Representación gráfica.

10. Calcular el área encerada por la función, el eje OX y las rectas $x = 2$ y $x = 4$.

Solución:

1. $\text{Dom}(f) = R - \{1\}$

2. Con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, -3)$ y con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 + 3 = 0$, esta ecuación no tiene solución y por tanto la función no corta el eje OX.

3.

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$

4. La función no es ni PAR ni IMPAR

5. - Asíntotas:
     - Verticales: En $x = 1$
       $$\lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{x^2+3}{x-1} = \left[\frac{3}{0^-}\right] = -\infty$$
       $$\lim_{x\longrightarrow 1^+} \frac{x^2+3}{x-1} = \left[\frac{3}{0^+}\right] = +\infty$$
     - Horizontales: No tiene
       $$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2+3}{x-1} = \infty$$
     - Oblicuas: $y = mx + n$
       $$m = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2+3}{x^2-x} = 1$$
       $$n = \lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2+3}{x-1} - x\right) = 1$$
       $$y = x + 1$$

6. Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = 0 \Longrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Longrightarrow x = -1, \;\; x = 3$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, \infty)$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$ y decreciente en el intervalo $(-1, 1) \cup (1, 3)$.

La función tiene un máximo en el punto $(-1, -2)$ y un mínimo en el punto $(3, 6)$.

7. Intervalos de concavidad y covexidad:

$$f''(x) = \frac{8}{(x-1)^3} \neq 0$$

La función f no tiene puntos de inflexión.

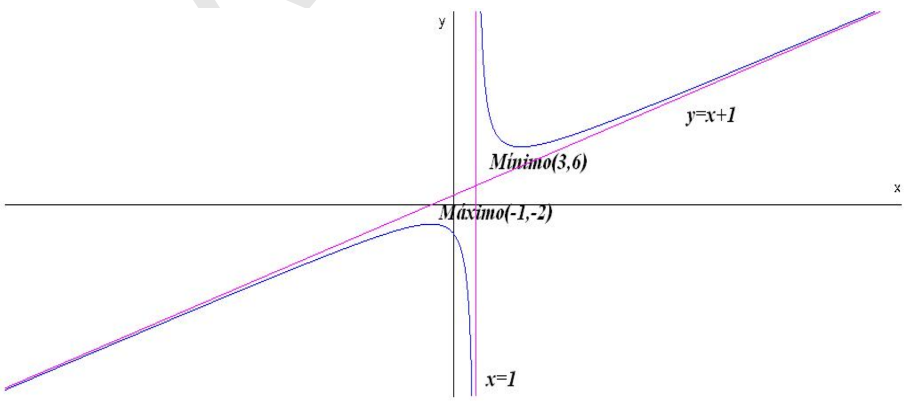
	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\cap$	cóncava $\cup$

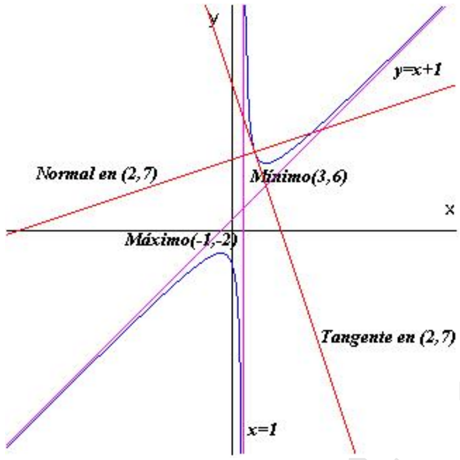
8. En $x = 2 \Longrightarrow f(2) = 7$ y $m = f'(2) = -3$:

Recta tangente: $y - 7 = -3(x - 2)$

Recta normal: $y - 7 = \frac{1}{3}(x - 2)$

9. Representación gráfica

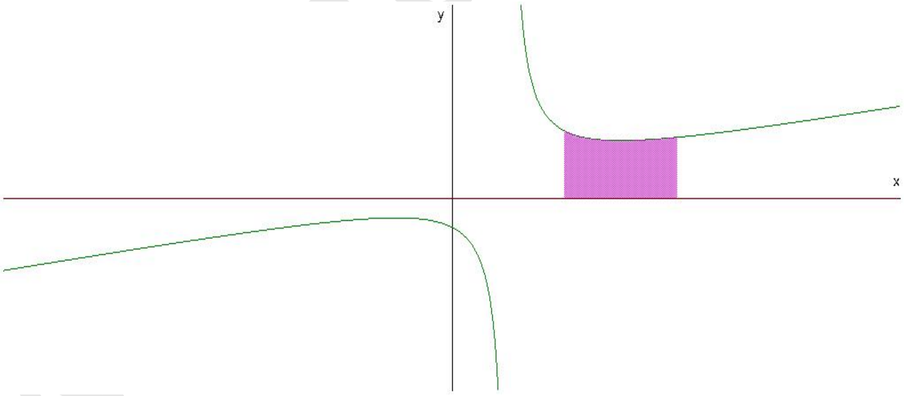




10. Calcular el siguiente área:

$$S = \int_2^4 \frac{x^2+3}{x-1}\,dx = \int_2^4 \left(x+1+\frac{4}{x-1}\right)dx =$$

$$= \left.\frac{x^2}{2} + x + 4\ln|x-1|\right]_2^4 = 8 + 4\ln 3 = 12,39\ u^2$$



Problema 279 Dada la función

$$f(x) = \frac{x-3}{(x-1)^2}$$

Se pide:

1. Calcular su dominio.

2. Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.

3. Calcular su signo.

4. Calcular su simetría.

5. Calcular sus asíntotas.

6. Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.

7. Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.

8. Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abcisa $x = 2$.

9. Representación gráfica.

10. Calcular el área encerada por la función, el eje OX y las rectas $x = 2$ y $x = 3$.

Solución:

1. $\text{Dom}(f) = R - \{1\}$

2. Con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, -3)$ y con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x - 3 = 0 \Longrightarrow (3, 0)$.

3.

	$(-\infty, 3)$	$(3, \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$

4. La función no es ni PAR ni IMPAR

5. ▪ Asíntotas:

   - Verticales: En $x = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = \left[\frac{-2}{0^+}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = \left[\frac{-2}{0^+}\right] = -\infty$$

   - Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x - 3}{(x - 1)^2} = 0$$

   - Oblicuas: No hay al haber horizontales.

6. Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{-x+5}{(x-1)^3} = 0 \Longrightarrow -x+5=0 \Longrightarrow x=5$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 5)$	$(5, \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 1) \cup (5, \infty)$ y creciente en el intervalo $(1, 5)$.

La función tiene un máximo en el punto $(5, 1/8)$.

7. Intervalos de concavidad y covexidad:

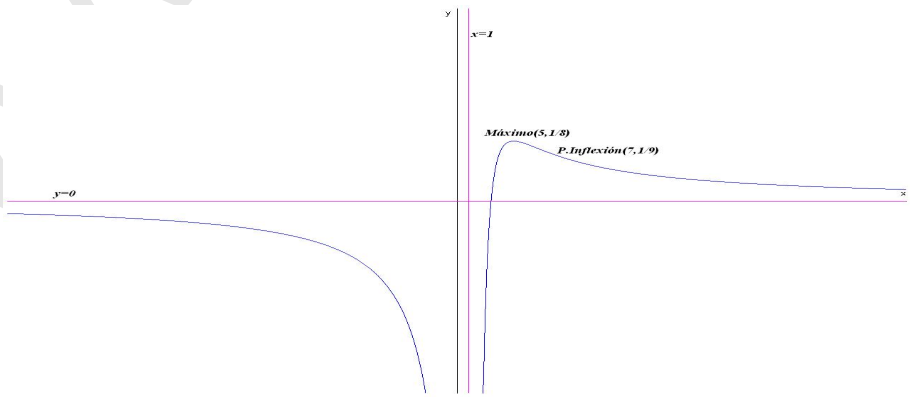
$$f''(x) = \frac{2x-14}{(x-1)^4} = 0 \Longrightarrow 2x-14=0 \Longrightarrow x=7$$

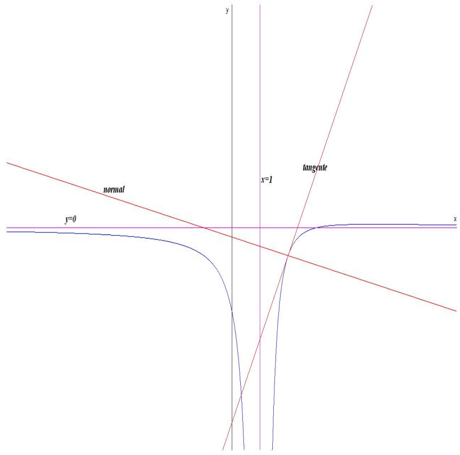
	$(-\infty, 7)$	$(7, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\cap$	cóncava $\cup$

La función es convexa en el intervalo $(-\infty, 1) \cup (1, 7)$ y cóncava en el intervalo $(7, \infty)$.
La función tiene un un punto de inflexión en $(7, 1/9)$.

8. En $x = 2 \Longrightarrow f(2) = -1$ y $m = f'(2) = 3$:
Recta tangente: $y + 1 = 3(x - 2)$
Recta normal: $y + 1 = -\dfrac{1}{3}(x - 2)$

9. Representación gráfica

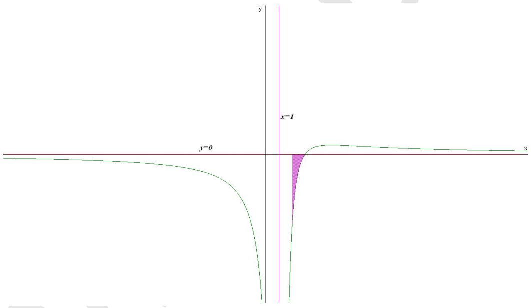




10. Calcular el siguiente área:

$$S = \int_2^3 \frac{x-3}{(x-1)^2}\,dx = \int_2^3 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2}\right)dx =$$

$$= \ln|x-1| + \frac{2}{x-1}\Big]_2^3 = 1 - \ln 2 = 0,307\ u^2$$



$$\frac{x-3}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \quad x-3 = A(x-1)+B \\ x=1 \Longrightarrow B=-2 \\ x=0 \Longrightarrow -3=-A+B \Longrightarrow A=1 \end{array}\right.$$

Problema 280 Dada la función

$$f(x) = \frac{-x+1}{x-3}$$

Se pide:

1. Calcular su dominio.
2. Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
3. Calcular su signo.
4. Calcular su simetría.
5. Calcular sus asíntotas.
6. Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
7. Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.
8. Representación gráfica.
9. Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abcisa $x = 2$.
10. Calcular el área encerada por la función, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

Solución:

1. $\text{Dom}(f) = R - \{3\}$
2. Con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, -1/3)$ y con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow -x + 1 = 0 \Longrightarrow (1, 0)$.
3.

	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$

4. La función no es ni PAR ni IMPAR
5. - Asíntotas:
     - Verticales: En $x = 3$

$$\lim_{x \longrightarrow 3^-} \frac{-x+1}{x-3} = \left[\frac{-2}{0^-}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 3^+} \frac{-x+1}{x-3} = \left[\frac{-2}{0^+}\right] = -\infty$$

     - Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{-x+1}{x-3} = -1$$

     - Oblicuas: No hay al haber horizontales.

6. Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{2}{(x-3)^2} \neq 0$$

Luego no hay ni máximos ni mínimos, además $f'(x) > 0 \Longrightarrow$ la función es siempre creciente en el dominio de la función, en $R - \{3\}$

7. Intervalos de concavidad y covexidad:

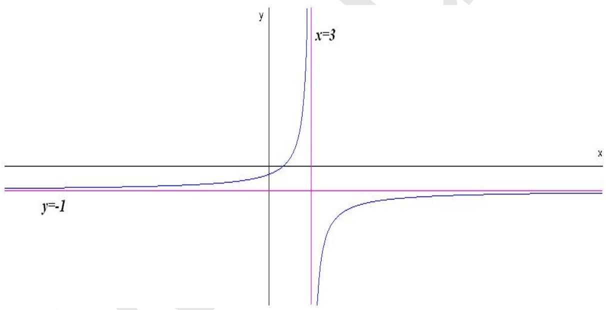
$$f''(x) = \frac{-4}{(x-3)^3} \neq 0$$

Luego la función no tiene puntos de inflexión.

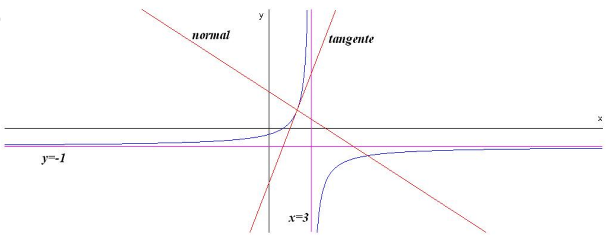
	$(-\infty, 3)$	$(3, \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	cóncava $\cup$	convexa $\cap$

La función es convexa en el intervalo $(3, \infty)$ y cóncava en el intervalo $(-\infty, 3)$.

8. Representación gráfica

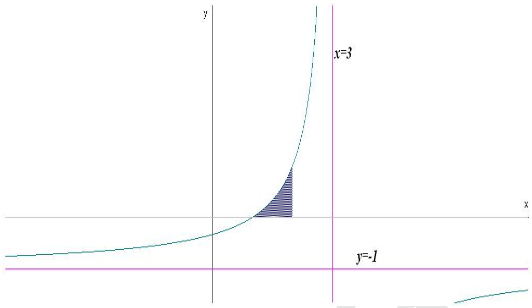


9. En $x = 2 \Longrightarrow f(2) = 1$ y $m = f'(2) = 2$:
Recta tangente: $y - 1 = 2(x - 2)$
Recta normal: $y - 1 = -\dfrac{1}{2}(x - 2)$



10. Calcular el siguiente área:

$$S = \int_1^2 \frac{-x+1}{x-3}\, dx = \int_1^2 \left(-1 - \frac{2}{x-3}\right) dx =$$
$$= -x - 2\ln|x-3|]_1^2 = -1 + 2\ln 2 = 0,386\ u^2$$



$$\frac{x-3}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2}$$
$$\left\{\begin{array}{l} \quad x-3 = A(x-1)+B \\ x=1 \Longrightarrow B=-2 \\ x=0 \Longrightarrow -3=-A+B \Longrightarrow A=1 \end{array}\right.$$

Problema 281 Hallar una función polinómica de tercer grado tal que pasa por el punto $(0,2)$, tenga un extremo relativo en $(1,3)$ y un punto de inflexión en $x=2$

Solución:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \quad f''(x) = 6ax + 2b$$
$$\left\{\begin{array}{l} f(0)=2 \Longrightarrow d=2 \\ f(1)=3 \Longrightarrow a+b+c+d=3 \\ f'(1)=0 \Longrightarrow 3a+2b+c=0 \\ f''(2)=0 \Longrightarrow 12a+2b=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=1/4 \\ b=-3/2 \\ c=9/4 \\ d=1 \end{array}\right.$$
$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x + 1,$$

$f''(1) = 6a + 2b = 3/2 - 3 = -3/2 < 0 \Longrightarrow$ el extremo en el punto $(1,2)$ es un máximo.

Problema 282 Dada la función

$$f(x) = \frac{3x-1}{(x+2)^2}$$

Se pide:

1. Calcular su dominio.
2. Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
3. Calcular su signo.
4. Calcular su simetría.
5. Calcular sus asíntotas.
6. Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
7. Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.
8. Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abcisa $x = 1$.
9. Representación gráfica.
10. Calcular el área encerada por la función, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

Solución:

1. $\text{Dom}(f) = R - \{-2\}$
2. Con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, -1/4)$ y con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow 3x - 1 = 0 \Longrightarrow (1/3, 0)$.
3.

	$(-\infty, 1/3)$	$(1/3, \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$

4. La función no es ni PAR ni IMPAR
5. - Asíntotas:
     - Verticales: En $x = -2$
$$\lim_{x \longrightarrow -2^-} \frac{3x-1}{(x+2)^2} = \left[\frac{-7}{0^+}\right] = -\infty$$
$$\lim_{x \longrightarrow -2^+} \frac{3x-1}{(x+2)^2} = \left[\frac{-7}{0^+}\right] = -\infty$$
     - Horizontales: $y = 0$
$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{3x-1}{(x+2)^2} = 0$$
     - Oblicuas: No hay al haber horizontales.

6. Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{8-3x}{(x+2)^3} = 0 \Longrightarrow 8-3x = 0 \Longrightarrow x = 8/3$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,8/3)$	$(8/3,\infty)$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty,-2)\cup(8/3,\infty)$ y creciente en el intervalo $(-2,8/3)$.

La función tiene un máximo en el punto $(8/3, 9/28)$.

7. Intervalos de concavidad y covexidad:

$$f''(x) = \frac{6(x-5)}{(x+2)^4} = 0 \Longrightarrow x-5 = 0 \Longrightarrow x = 5$$

	$(-\infty,5)$	$(5,\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\cap$	cóncava $\cup$

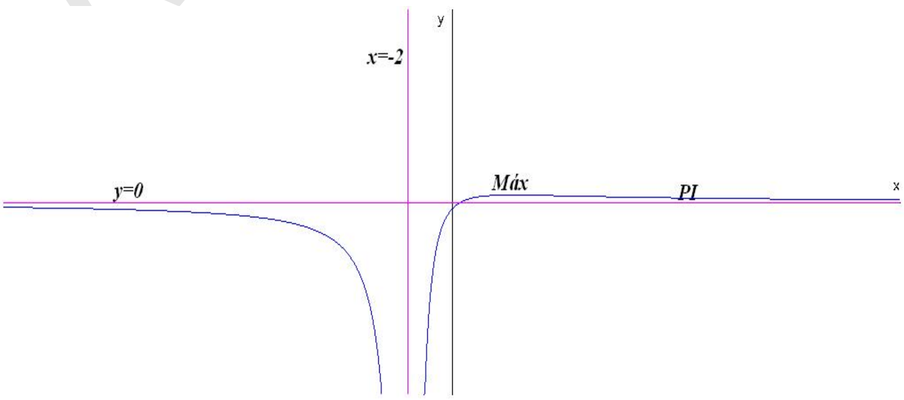
La función es convexa en el intervalo $(-\infty,-2)\cup(-2,5)$ y cóncava en el intervalo $(5,\infty)$.

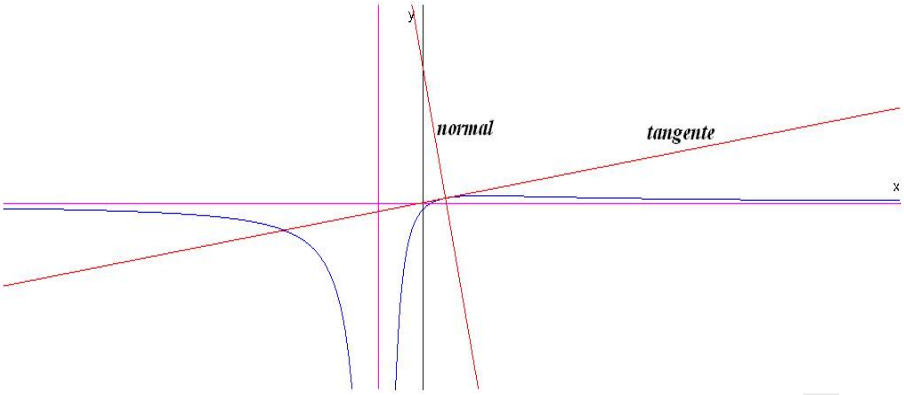
La función tiene un un punto de inflexión en $(5, 2/7)$.

8. En $x = 1 \Longrightarrow f(1) = 2/9$ y $m = f'(1) = 5/27$:
Recta tangente: $y - \dfrac{2}{9} = \dfrac{5}{27}(x-1)$

Recta normal: $y - \dfrac{2}{9} = -\dfrac{27}{5}(x-1)$

9. Representación gráfica

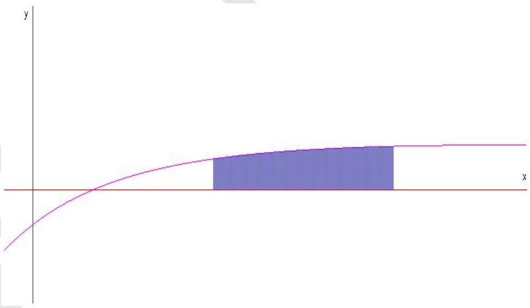




10. Calcular el siguiente área:

$$S=\int_1^2\frac{3x-1}{(x+2)^2}\,dx=\int_1^2\left(\frac{3}{x+2}-\frac{7}{(x+2)^2}\right)dx=$$
$$=3\ln|x+2|+\frac{7}{x+2}\Big]_1^2=-3\ln\left(\frac{3}{4}\right)-\frac{7}{12}=0,28\ u^2$$

$$\frac{3x-1}{(x+2)^2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}=\frac{A(x+2)+B}{(x+2)^2}$$
$$\left\{\begin{array}{l} \quad 3x-1=A(x+2)+B\\ x=-2\Longrightarrow B=-7\\ x=0\Longrightarrow -1=2A+B\Longrightarrow A=3\end{array}\right.$$



Problema 283 Dada la función

$$f(x)=\frac{x^2+2}{x+1}$$

Se pide:

1. Calcular su dominio.

2. Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
3. Calcular su signo.
4. Calcular su simetría.
5. Calcular sus asíntotas.
6. Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
7. Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.
8. Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abcisa $x = 1$.
9. Representación gráfica.
10. Calcular el área encerada por la función, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

Solución:

1. $\text{Dom}(f) = R - \{-1\}$
2. Con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 2)$ y con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 + 2 = 0 \Longrightarrow$ No hay puntos de corte con el eje OX.
3.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$

4. La función no es ni PAR ni IMPAR
5.
   - Asíntotas:
     - Verticales: En $x = -1$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{x^2+2}{x+1} = \left[\frac{3}{-1^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^+} \frac{x^2+2}{x+1} = \left[\frac{3}{-1^+}\right] = +\infty$$

     - Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2+2}{x+1} = \infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2+2}{x^2+x} = 1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x^2+2}{x+1} - x \right) = -1$$

$$y = x - 1$$

6. Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{x^2+2x-2}{(x+1)^2} = 0 \Longrightarrow x^2+2x-2 = 0 \Longrightarrow x = 0,73, \;\; x = -2,73$$

	$(-\infty, -2,73)$	$(-2,73, 0,73)$	$(0,73, \infty)$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\searrow$	decreciente $\nearrow$	creciente $\searrow$

La función es creciente en el intervalo $(-\infty; -2,73) \cup (0,73; \infty)$ y creciente en el intervalo $(-2,73; -1) \cup (-1; 0,73)$.

La función tiene un máximo en el punto $(-2,73; -5,46)$ y un mínimo en el punto $(0,73; 1,46)$

7. Intervalos de concavidad y covexidad:

$$f''(x) = \frac{6}{(x+1)^3} \neq 0$$

La función no tiene puntos de inflexión.

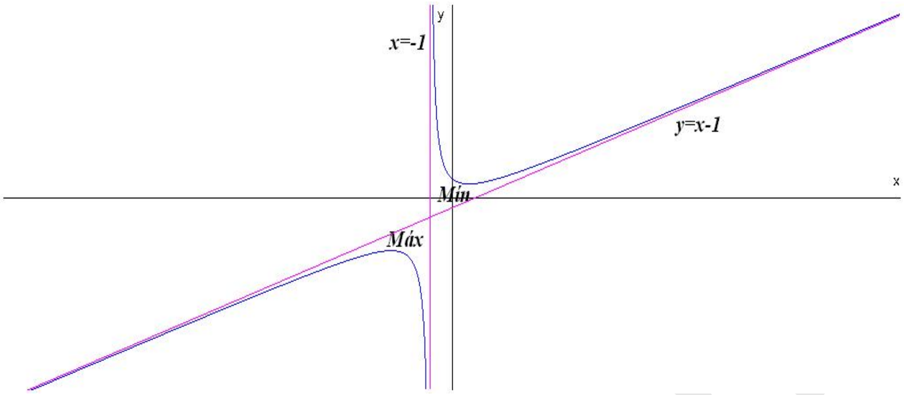
	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\cap$	cóncava $\cup$

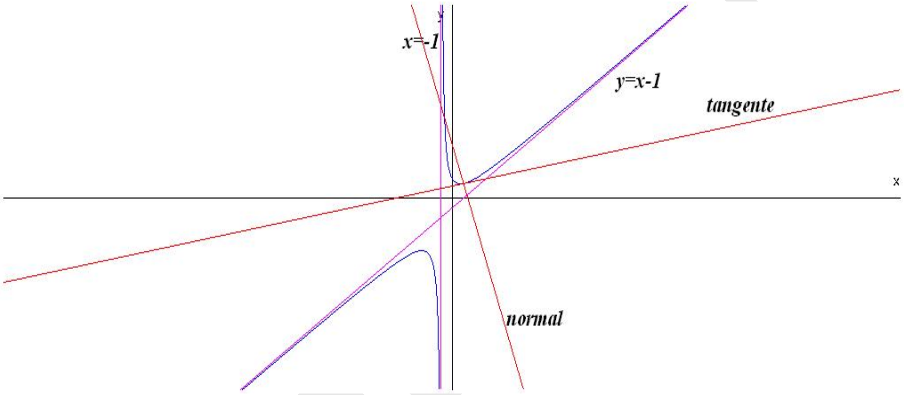
La función es convexa en el intervalo $(-\infty, -1)$ y cóncava en el intervalo $(-1, \infty)$.

8. En $x = 1 \Longrightarrow f(1) = 3/2$ y $m = f'(1) = 1/4$:
Recta tangente: $y - \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{4}(x-1)$

Recta normal: $y - \dfrac{3}{2} = -4(x-1)$

9. Representación gráfica

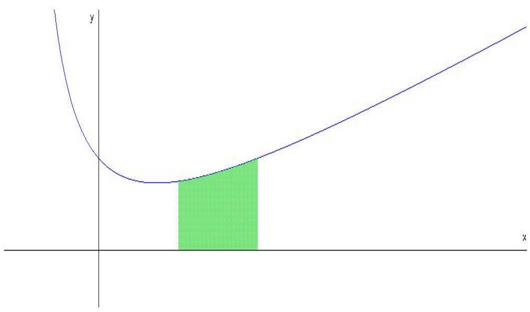




10. Calcular el siguiente área:

$$S = \int_1^2 \frac{x^2+2}{x+1}\,dx = \int_1^2 \left(x - 1 + \frac{3}{x+1}\right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - x + 3\ln|x+1|\Big]_1^2 = 3\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} = 1,716\ u^2$$



Problema 284 Dada la función

$$f(x) = \frac{2x}{x-1}$$

Calcular:

1. Asíntotas
2. Extremos relativos
3. Representación gráfica aproximada.
4. $\int f(x)\, dx$

Solución:

1. Asíntotas:

   - Verticales $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{2x}{x-1} = \left[\frac{2}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{2x}{x-1} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty$$

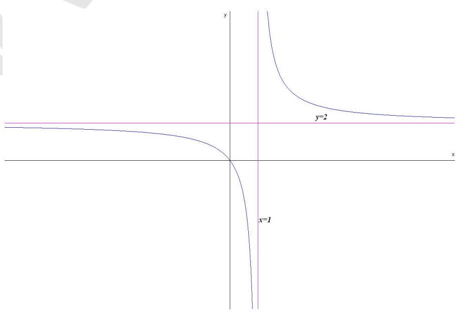
   - Horizontales $y = 2$:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{2x}{x-1} = 2$$

   - Oblicuas no hay por haber horizontales.

2. Extremos relativos: $f'(x) = -\dfrac{2}{(x-1)^2} < 0$ Luego no hay ni máximos ni mínimos y la función es siempre decreciente en el intervalo $R - \{1\}$.

3. Representación gráfica aproximada:



4. $\displaystyle\int \frac{2x}{x-1}\, dx = \int \left(2 + \frac{2}{x-1}\right) dx = 2x + 2\ln|x-1| + C$

Problema 285 Hallar una función polinómica de tercer grado tal que pasa por el punto $(0,0)$, tenga un extremo relativo en $(1,1)$ y un punto de inflexión en $x=2$.

Solución:

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,\quad f'(x)=3ax^2+2bx+c,\quad f''(x)=6ax+2b$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0)=0\Longrightarrow\ d=2\\ f(1)=1\Longrightarrow\ a+b+c+d=1\\ f'(1)=0\Longrightarrow\ 3a+2b+c=0\\ f''(2)=0\Longrightarrow\ 12a+2b=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-1/4\\ b=3/2\\ c=-9/4\\ d=0 \end{array}\right.$$

$$f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{9}{4}x$$

3.2. Límites

Problema 286 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{3x^2+x-1}{2x^2+1}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{-3x-1}{x^5+x^4+1}$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{3x^2-1}{x^2}\right)^{2x^2+1}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{x^3-1}{x^3+3}\right)^{2x^3}$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{3x^4+x-1}{3x^4+1}\right)^{x^3}$

6. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{2x^3+1}{3x^3+x^2-1}\right)^{2x-1}$

7. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{x^3+x+1}{2x^3-1}\right)^{3x}$

8. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x}$

9. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{x^5+x^4-3x^2+4x-1}{x^4-x^3-2x^2+x+1}$

10. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{x^3-2x^2-x}{x^4-3x^2+x} = -1$

11. $\lim\limits_{x\longrightarrow 3} \dfrac{x-\sqrt{x+6}}{x-3} = \dfrac{5}{6}$

12. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{x-1}{x-\sqrt{2-x}} = \dfrac{2}{3}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{3x^2+x-1}{2x^2+1} = \dfrac{3}{2}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{-3x-1}{x^5+x^4+1} = 0$

3. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{3x^2-1}{x^2}\right)^{2x^2+1}=\infty$

4. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x^3-1}{x^3+3}\right)^{2x^3}=e^{-8}$

5. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{3x^4+x-1}{3x^4+1}\right)^{x^3}=e^{1/3}$

6. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2x^3+1}{3x^3+x^2-1}\right)^{2x-1}=0$

7. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x^3+x+1}{2x^3-1}\right)^{3x}=0$

8. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x}=e^{-2}$

9. $\lim_{x\longrightarrow 1}\dfrac{x^5+x^4-3x^2+4x-1}{x^4-x^3-2x^2+x+1}=\dfrac{1}{2}$

10. $\lim_{x\longrightarrow 0}\dfrac{x^3-2x^2-x}{x^4-3x^2+x}=-1$

11. $\lim_{x\longrightarrow 3}\dfrac{x-\sqrt{x+6}}{x-3}=\dfrac{5}{6}$

12. $\lim_{x\longrightarrow 1}\dfrac{x-1}{x-\sqrt{2-x}}=\dfrac{2}{3}$

Problema 287 Por L'Hôpital:

1. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{\ln x}{x}$

2. $\lim_{x\longrightarrow 0}\dfrac{e^x-\cos x}{\sin x}$

3. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{x^2}$

4. $\lim_{x\longrightarrow 0}\dfrac{x^2-x}{e^x-1}$

5. $\lim_{x\longrightarrow 1}\dfrac{x^4-x^3+3x^2-4x+1}{x^4-x^3+3x-3}$

6. $\lim_{x\longrightarrow 2}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{x-2}$

7. $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$

8. $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{1-\cos x}{\sin x}$

Solución:

1. $\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

2. $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^x-\cos x}{\sin x} = 1$

3. $\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2-\sqrt{x}}{x^2} = 1$

4. $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x^2-x}{e^x-1} = -1$

5. $\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x^4-x^3+3x^2-4x+1}{x^4-x^3+3x-3} = \frac{3}{4}$

6. $\lim_{x\longrightarrow 2} \frac{x-\sqrt{x+2}}{x-2} = \frac{3}{4}$

7. $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1$

8. $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{1-\cos x}{\sin x} = 0$

Problema 288 Calcular los siguientes límites

1. $\lim_{x\longrightarrow 3} \frac{x^4-3x^3-2x^2+7x-3}{x^3-2x^2-4x+3}$

2. $\lim_{x\longrightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2-7}-3}{x-4}$

Solución:

1. $\lim_{x\longrightarrow 3} \frac{x^4-3x^3-2x^2+7x-3}{x^3-2x^2-4x+3} = 2$

2. $\lim_{x\longrightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2-7}-3}{x-4} = \frac{4}{3}$

Problema 289 Calcular los siguientes límites

1. $\lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\frac{3x^2+x-1}{x^2+1}\right)^{x^2+1}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2/2}$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{2x^5+3x-1}{5x^5+1}\right)^{2x+1}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)^{3x}$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow -2}\frac{x^3+3x^2-6x-16}{x^4+2x^3+x^2+x-2}$

6. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\frac{3x^4+x^3-2x^2+x-3}{3x^3+2x^2-4x-1}$

7. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\frac{3x^4+2x^3-2x^2}{x^3+x^2+x}$

8. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\frac{x^5-1}{2x^4-2}$

9. $\lim\limits_{x\longrightarrow 3}\frac{\sqrt{3x^2-11}-4}{x-3}=\frac{9}{4}$

10. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2}\frac{\sqrt{13-x^2}-3}{x-2}$

11. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}$

12. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\frac{1-e^{2x}}{\sin x}$

13. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\frac{\ln(1-\sin x)}{\ln(1+\sin x)}$

14. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\frac{e^x-x-\cos x}{\sin^2 x}$

15. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\frac{\ln x}{x-1}$

16. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} xe^x=\infty,\quad \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} xe^x$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{3x^2+x-1}{x^2+1}\right)^{x^2+1}=\infty$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2/2}=e^{1/2}$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2x^5+3x-1}{5x^5+1}\right)^{2x+1}=0$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^{3x}=e^{-3}$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow -2}\dfrac{x^3+3x^2-6x-16}{x^4+2x^3+x^2+x-2}=\dfrac{6}{11}$

6. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\dfrac{3x^4+x^3-2x^2+x-3}{3x^3+2x^2-4x-1}=\dfrac{4}{3}$

7. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{3x^4+2x^3-2x^2}{x^3+x^2+x}=0$

8. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\dfrac{x^5-1}{2x^4-2}=\dfrac{5}{8}$

9. $\lim\limits_{x\longrightarrow 3}\dfrac{\sqrt{3x^2-11}-4}{x-3}=\dfrac{9}{4}$

10. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2}\dfrac{\sqrt{13-x^2}-3}{x-2}=-\dfrac{2}{3}$

11. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}=2$

12. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{1-e^{2x}}{\sin x}=-2$

13. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\ln(1-\sin x)}{\ln(1+\sin x)}=-1$

14. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{e^x-x-\cos x}{\sin^2 x}=1$

15. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$

16. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} xe^x=\infty,\quad \lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} xe^x=0$

Problema 290 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{3x^3+2x-1}{2x^3+2}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x^3-3x-1}$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{x^4+1}{x^3+x-1}$
4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{5x^2-x-1}{5x^2}\right)^{x+1}$
5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2x^3+x+1}{x^3+3}\right)^{\frac{x^2+1}{2}}$
6. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x^2+x+1}{2x^2-1}\right)^{2x}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{3x^3+2x-1}{2x^3+2}=\dfrac{3}{2}$
2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x^3-3x-1}=0$
3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{x^4+1}{x^3+x-1}=\infty$
4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{5x^2-x-1}{5x^2}\right)^{x+1}=e^{-1/5}$
5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2x^3+x+1}{x^3+3}\right)^{\frac{x^2+1}{2}}=\infty$
6. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x^2+x+1}{2x^2-1}\right)^{2x}=0$

Problema 291 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\dfrac{x^4-x^3+3x^2-3}{x^3+x^2-x-1}$
2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$
3. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2}\dfrac{\sqrt{x^2-3}-1}{x-2}$
4. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2}\dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^3+x^2-5x-2}$
5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-x}{x+1}$

6. $\lim\limits_{x\longrightarrow 5} \dfrac{3-\sqrt{x^2-16}}{x-5}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{x^4-x^3+3x^2-3}{x^3+x^2-x-1} = \dfrac{7}{4}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) = 0$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2} \dfrac{\sqrt{x^2-3}-1}{x-2} = 2$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2} \dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^3+x^2-5x-2} = \dfrac{5}{11}$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2}-x}{x+1} = 0$

6. $\lim\limits_{x\longrightarrow 5} \dfrac{3-\sqrt{x^2-16}}{x-5} = -\dfrac{5}{3}$

Problema 292 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \dfrac{2x^3+x-1}{3x^3+2}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \dfrac{3x^2+2x+1}{x^5+2}$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \dfrac{x^6+x-1}{x^4+2}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \left(\dfrac{2x^2+x}{x^2-1}\right)^{3x^2-1}$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \left(\dfrac{x^2-x-1}{2x^2}\right)^{2x-1}$

6. $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{2x}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \dfrac{2x^3+x-1}{3x^3+2} = \dfrac{2}{3}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \dfrac{3x^2+2x+1}{x^5+2} = 0$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{x^6+x-1}{x^4+2} = \infty$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{2x^2+x}{x^2-1}\right)^{3x^2-1} = +\infty$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{x^2-x-1}{2x^2}\right)^{2x-1} = 0$

6. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{2x} = e^2$

Problema 293 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{x^3-2x^2+2x-1}{x^4-x^3+2x-2}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right)$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2} \dfrac{\sqrt{2x^2+1}-3}{x-2}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow -2} \dfrac{x^4+2x^3-x^2-x+2}{x^3+2x^2-x-2}$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+x+2}-x}{x-1}$

6. $\lim\limits_{x\longrightarrow 5} \dfrac{2\sqrt{x-1}-2}{x-2}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{x^3-2x^2+2x-1}{x^4-x^3+2x-2} = \dfrac{1}{3}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right) = 0$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2} frac\sqrt{2x^2+1}-3x-2 = \dfrac{4}{3}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow -2} \dfrac{x^4+2x^3-x^2-x+2}{x^3+2x^2-x-2} = -\dfrac{5}{3}$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+x+2}-x}{x-1} = \sqrt{2}-1$

6. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2} \dfrac{2\sqrt{x-1}-2}{x-2} = 0$

Problema 294 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{x^5+x-2}{2x^3-x-1}$
2. $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} \dfrac{x^3+3x-1}{-x^2+2}$
3. $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \left(\dfrac{2x+1}{2x}\right)^{x-3}$
4. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{2x-1}}{x-1}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{x^5+x-2}{2x^3-x-1} = \dfrac{6}{5}$
2. $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} \dfrac{x^3+3x-1}{-x^2+2} = +\infty$
3. $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \left(\dfrac{2x+1}{2x}\right)^{x-3} = e^{1/2}$
4. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{2x-1}}{x-1} = 1$

Problema 295 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{x^3-1}{x^5-1}$
2. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{\sqrt{2x-1}-x}{x^2-1}$
3. $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{2x}$
4. $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \dfrac{x^2+2x-1}{-x^3-2}$
5. $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \dfrac{\sqrt{3x^3+1}}{x+2}$
6. $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \dfrac{e^x}{x+2}$
7. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\sin x-e^x+1}{1-\cos x}$

Solución:

1. $\lim_{x\longrightarrow 1} \dfrac{x^3-1}{x^5-1} = \dfrac{3}{5}$

2. $\lim_{x\longrightarrow 1} \dfrac{\sqrt{2x-1}-x}{x^2-1} = 0$

3. $\lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{2x} = e^4$

4. $\lim_{x\longrightarrow \infty} \dfrac{x^2+2x-1}{-x^3-2} = 0$

5. $\lim_{x\longrightarrow \infty} \dfrac{\sqrt{3x^3+1}}{x+2} = \infty$

6. $\lim_{x\longrightarrow \infty} \dfrac{e^x}{x+2} = \infty$

7. $\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\sin x - e^x + 1}{1-\cos x} = -1$

Problema 296 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x\longrightarrow \infty} \dfrac{4x^5-x+1}{3x^5+6}$

2. $\lim_{x\longrightarrow \infty} \dfrac{5x^2-x}{x^6+x-1}$

3. $\lim_{x\longrightarrow \infty} \dfrac{x^7-3x^2-x+1}{-2x^4+1}$

4. $\lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\dfrac{3x^2+x+1}{2x^2-1}\right)^{\frac{3x^2-1}{3}}$

5. $\lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\dfrac{x^2+x-1}{x^2+1}\right)^{2x}$

6. $\lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\dfrac{x^3+1}{2x^3}\right)^{3x-1}$

Solución:

1. $\lim_{x\longrightarrow \infty} \dfrac{4x^5-x+1}{3x^5+6} = \dfrac{4}{3}$

2. $\lim_{x\longrightarrow \infty} \dfrac{5x^2-x}{x^6+x-1} = 0$

3. $\lim_{x\longrightarrow \infty} \dfrac{x^7-3x^2-x+1}{-2x^4+1} = -\infty$

4. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{3x^2+x+1}{2x^2-1}\right)^{\frac{3x^2-1}{3}}=\infty$

5. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x^2+x-1}{x^2+1}\right)^{2x}=e^2$

6. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x^3+1}{2x^3}\right)^{3x-1}=0$

Problema 297 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{3x^6+2x^5-1}{5x^6+1}$

2. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{x^5+x^4+x}{x^6+2}$

3. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{x^6+x^5-2x+1}{-3x^4+3}$

4. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2x^2+x-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+3}{2}}$

5. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x^2-x+1}{x^2+1}\right)^{2x}$

6. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x^4+1}{2x^4}\right)^{x+2}$

Solución:

1. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{3x^6+2x^5-1}{5x^6+1}=\dfrac{3}{5}$

2. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{x^5+x^4+x}{x^6+2}=0$

3. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{x^6+x^5-2x+1}{-3x^4+3}=-\infty$

4. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2x^2+x-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+3}{2}}=+\infty$

5. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x^2-x+1}{x^2+1}\right)^{2x}=e^{-2}$

6. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x^4+1}{2x^4}\right)^{x+2}=0$

Problema 298 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{3x^4+x^5-x-1}{3x^4-1}$
2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{3x^2+x+1}{2x^6-2}$
3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{x^5+4x^3+5x+1}{-9x^3+2}$
4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{3x^3+x^2-1}{x^3+1}\right)^{\frac{x^2-x+3}{2}}$
5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-1}\right)^{2x}$
6. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x^3-x+1}{2x^3+5}\right)^{x-2}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{3x^4+x^5-x-1}{3x^4-1}=1$
2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{3x^2+x+1}{2x^6-2}=0$
3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{x^5+4x^3+5x+1}{-9x^3+2}=-\infty$
4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{3x^3+x^2-1}{x^3+1}\right)^{\frac{x^2-x+3}{2}}=+\infty$
5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-1}\right)^{2x}=e^{12}$
6. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x^3-x+1}{2x^3+5}\right)^{x-2}=0$

Problema 299 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x-1}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x+2}$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2}\dfrac{x^4-3x^2-4}{x^3-2x-4}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\dfrac{x^5-1}{x^4-1}$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}-3}{x-2}$

6. $\lim\limits_{x\longrightarrow 3}\dfrac{\sqrt{3x^2-11}-4}{x-3}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x-1}=e^2$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x+2}=e^2$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2}\dfrac{x^4-3x^2-4}{x^3-2x-4}=2$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\dfrac{x^5-1}{x^4-1}=\dfrac{5}{4}$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}-3}{x-2}=\dfrac{4}{3}$

6. $\lim\limits_{x\longrightarrow 3}\dfrac{\sqrt{3x^2-11}-4}{x-3}=\dfrac{9}{4}$

Problema 300 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2x+2}{2x-1}\right)^{2x+1}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{x-1}$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2}\dfrac{x^4-4x-8}{x^3+x-10}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\dfrac{x^6-1}{x^5-1}$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$

6. $\lim_{x\longrightarrow 3}\dfrac{\sqrt{x^2-5}-2}{x-3}$

Solución:

1. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2x+2}{2x-1}\right)^{2x+1}=e^3$
2. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{x-1}=e^{-5}$
3. $\lim_{x\longrightarrow 2}\dfrac{x^4-4x-8}{x^3+x-10}=\dfrac{28}{13}$
4. $\lim_{x\longrightarrow 1}\dfrac{x^6-1}{x^5-1}=\dfrac{6}{5}$
5. $\lim_{x\longrightarrow 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\dfrac{2}{3}$
6. $\lim_{x\longrightarrow 3}\dfrac{\sqrt{x^2-5}-2}{x-3}=\dfrac{3}{2}$

Problema 301 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{4x^5-x+1}{3x^5+6}$
2. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{5x^2-x}{x^6+x-1}$
3. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{x^7-3x^2-x+1}{-2x^4+1}$
4. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{3x^2+x+1}{2x^2-1}\right)^{\frac{3x^2-1}{3}}$
5. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x^2+x-1}{x^2+1}\right)^{2x}$
6. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x^3+1}{2x^3}\right)^{3x-1}$

Problema 302 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{3x^6+2x^5-1}{5x^6+1}$
2. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{x^5+x^4+x}{x^6+2}$

3. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{x^6+x^5-2x+1}{-3x^4+3}$

4. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2x^2+x-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+3}{2}}$

5. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x^2-x+1}{x^2+1}\right)^{2x}$

6. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x^4+1}{2x^4}\right)^{x+2}$

Problema 303 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{3x^4+x^5-x-1}{3x^4-1}$

2. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{3x^2+x+1}{2x^6-2}$

3. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{x^5+4x^3+5x+1}{-9x^3+2}$

4. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{3x^3+x^2-1}{x^3+1}\right)^{\frac{x^2-x+3}{2}}$

5. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-1}\right)^{2x}$

6. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x^3-x+1}{2x^3+5}\right)^{x-2}$

Problema 304 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{x^2+x-1}{x^3-3x^2+1}$

2. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{3x^2-2x-3}{-x+2}$

3. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{3x^3-2x-1}{2x^3+2}$

4. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{\sqrt{3x^2-x-1}}{2x-3}\right)$

5. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{3x^2+x-1}{x^2+3}\right)^{\frac{x^2-1}{2}}$

6. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^{x+1}$

Solución:

1. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^2+x-1}{x^3-3x^2+1}=0$

2. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{3x^2-2x-3}{-x+2}=-\infty$

3. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{3x^3-2x-1}{2x^3+2}=\frac{3}{2}$

4. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{\sqrt{3x^2-x-1}}{2x-3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{3x^2+x-1}{x^2+3}\right)^{\frac{x^2-1}{2}}=\infty$

6. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^{x+1}=e^4$

Problema 305 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^3+1}{-x+2}$

2. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\sqrt{x+2}}{x+5}$

3. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-2x^3+3x}{3x^3+5}$

4. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{2x+3}{\sqrt{5x^2+x-1}}$

5. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{2x^2+x-1}{3x^2-1}\right)^{x^2+2}$

6. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^{2x^2}$

Solución:

1. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{x^3+1}{-x+2} = -\infty$

2. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{\sqrt{x+2}}{x+5} = 0$

3. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{-2x^3+3x}{3x^3+5} = -\dfrac{2}{3}$

4. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{2x+3}{\sqrt{5x^2+x-1}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

5. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{2x^2+x-1}{3x^2-1}\right)^{x^2+2} = 0$

6. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{2x^2} = e^{-2}$

Problema 306 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{4x^4+3x^2-1}{x^3+2}$

2. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x-1}}{-x^2+2}$

3. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{5x^3+2x^2-x+1}{3x^3-x-1}$

4. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{\sqrt{5x^4-2x^2-1}}{-x^2-1}$

5. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{2x^2-x-1}{x^2+2}\right)^{x^2-1}$

6. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{2x+1}{2x}\right)^{x-2}$

Solución:

1. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{4x^4+3x^2-1}{x^3+2} = \infty$

2. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x-1}}{-x^2+2} = 0$

3. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{5x^3+2x^2-x+1}{3x^3-x-1} = \dfrac{5}{3}$

4. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{\sqrt{5x^4-2x^2-1}}{-x^2-1} = -\sqrt{5}$

5. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{2x^2-x-1}{x^2+2}\right)^{x^2-1} = \infty$

6. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{2x+1}{2x}\right)^{x-2} = e^{1/2}$

Problema 307 Calcular los siguientes límites

1. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{3x^2+x}\right)$

2. $\lim_{x\longrightarrow 3} \dfrac{\sqrt{x^2-5}-\sqrt{x+1}}{x-3}$

Solución:

1. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{3x^2+x}\right) = -\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

2. $\lim_{x\longrightarrow 3} \dfrac{\sqrt{x^2-5}-\sqrt{x+1}}{x-3} = \dfrac{5}{4}$

Problema 308 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{3x^2+2x-1}{-x+1}$

2. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{x}{x^2+1}$

3. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{3x^2+1}{-x^2+3}$

4. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{\sqrt{2x^4-3x}}{2x^2-1}\right)$

5. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{\sqrt{x+1}}{x+3}\right)$

6. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{\sqrt{x^3+2}}{x-1}\right)$

7. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{2x^3-1}{3x^3}\right)^{x^2+2}$

8. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{x^2+2x}{x^2-1}\right)^{2x}$

9. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{5x^3+x-1}{2x^3+2}\right)^{x^2-1}$

10. $\lim_{x\longrightarrow 2}\frac{x^3-2x^2+2x-4}{x^2-5x+6}$

11. $\lim_{x\longrightarrow 4}\frac{\sqrt{3x+4}-4}{x-4}$

12. $\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x-2}}{x-1}$

13. $\lim_{x\longrightarrow\infty}(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2x+5})$

14. $\lim_{x\longrightarrow\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-2})$

Solución:

1. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{3x^2+2x-1}{-x+1}=-\infty$

2. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x}{x^2+1}=0$

3. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{3x^2+1}{-x^2+3}=-3$

4. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{\sqrt{2x^4-3x}}{2x^2-1}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{\sqrt{x+1}}{x+3}\right)=0$

6. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{\sqrt{x^3+2}}{x-1}\right)=\infty$

7. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{2x^3-1}{3x^3}\right)^{x^2+2}=0$

8. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x^2-1}\right)^{2x}=e^4$

9. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{5x^3+x-1}{2x^3+2}\right)^{x^2-1}=\infty$

10. $\lim_{x\longrightarrow 2}\frac{x^3-2x^2+2x-4}{x^2-5x+6}=-6$

11. $\lim\limits_{x\longrightarrow 4}\dfrac{\sqrt{3x+4}-4}{x-4}=\dfrac{3}{8}$

12. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x-2}}{x-1}=-\dfrac{1}{2}$

13. $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty}(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2x+5})=\infty$

14. $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-2})=\dfrac{1}{2}$

Problema 309 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{x^2+x-1}{x^3-3x^2+1}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{3x^2-2x-3}{-x+2}$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{3x^3-2x-1}{2x^3+2}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{\sqrt{3x^2-x-1}}{2x-3}\right)$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{3x^2+x-1}{x^2+3}\right)^{\frac{x^2-1}{2}}$

6. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^{x+1}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{x^2+x-1}{x^3-3x^2+1}=0$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{3x^2-2x-3}{-x+2}=-\infty$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{3x^3-2x-1}{2x^3+2}=\dfrac{3}{2}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{\sqrt{3x^2-x-1}}{2x-3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{3x^2+x-1}{x^2+3}\right)^{\frac{x^2-1}{2}}=\infty$

6. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^{x+1}=e^4$

Problema 310 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{x^3+1}{-x+2}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{\sqrt{x+2}}{x+5}$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{-2x^3+3x}{3x^3+5}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{2x+3}{\sqrt{5x^2+x-1}}$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{2x^2+x-1}{3x^2-1}\right)^{x^2+2}$

6. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{2x^2}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{x^3+1}{-x+2} = -\infty$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{\sqrt{x+2}}{x+5} = 0$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{-2x^3+3x}{3x^3+5} = -\dfrac{2}{3}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{2x+3}{\sqrt{5x^2+x-1}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{2x^2+x-1}{3x^2-1}\right)^{x^2+2} = 0$

6. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{2x^2} = e^{-2}$

Problema 311 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{4x^4+3x^2-1}{x^3+2}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x-1}}{-x^2+2}$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{5x^3+2x^2-x+1}{3x^3-x-1}$

4. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{\sqrt{5x^4-2x^2-1}}{-x^2-1}$

5. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{2x^2-x-1}{x^2+2}\right)^{x^2-1}$

6. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{2x+1}{2x}\right)^{x-2}$

Solución:

1. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{4x^4+3x^2-1}{x^3+2} = \infty$

2. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x-1}}{-x^2+2} = 0$

3. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{5x^3+2x^2-x+1}{3x^3-x-1} = \dfrac{5}{3}$

4. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{\sqrt{5x^4-2x^2-1}}{-x^2-1} = -\sqrt{5}$

5. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{2x^2-x-1}{x^2+2}\right)^{x^2-1} = \infty$

6. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{2x+1}{2x}\right)^{x-2} = e^{1/2}$

Problema 312 Calcular los siguientes límites

1. $\lim_{x\longrightarrow\infty} (\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2-3})$

2. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{x-\sqrt{x^2+1}+3}{x-1}$

3. $\lim_{x\longrightarrow 1} \dfrac{6x^3-3x^2-4x+1}{x^3+2x^2-2x-1}$

4. $\lim_{x\longrightarrow 2} \dfrac{x^3-2x-4}{2x^2-3x-2}$

5. $\lim_{x\longrightarrow 2} \dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+1}}{x-2}$

6. $\lim_{x\longrightarrow 3} \dfrac{\sqrt{x^2-5}-\sqrt{x+1}}{x-3}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2-3})=-\dfrac{1}{2}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}+3}{x-1}=0$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\dfrac{6x^3-3x^2-4x+1}{x^3+2x^2-2x-1}=\dfrac{8}{5}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2}\dfrac{x^3-2x-4}{2x^2-3x-2}=2$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+1}}{x-2}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

6. $\lim\limits_{x\longrightarrow 3}\dfrac{\sqrt{x^2-5}-\sqrt{x+1}}{x-3}=\dfrac{5}{4}$

Problema 313 Resuelve los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}(\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2-x})$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x^2-x-1}{2x^2+x}\right)^{x^3+2}$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{2x-1}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\dfrac{x^3-2x^2+3x-2}{2x^3+2x^2-7x+3}$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow 3}\dfrac{\sqrt{2x^2-2}-\sqrt{x^2+7}}{x-3}$

6. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{x\sin x}{e^x-1}$

7. $\lim\limits_{x\longrightarrow \pi}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{x\sin x}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}(\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2-x})=-\dfrac{3}{2}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x^2-x-1}{2x^2+x}\right)^{x^3+2}=0$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{2x-1}=e^8$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\dfrac{x^3-2x^2+3x-2}{2x^3+2x^2-7x+3}=\dfrac{2}{3}$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow 3}\dfrac{\sqrt{2x^2-2}-\sqrt{x^2+7}}{x-3}=\dfrac{3}{4}$

6. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{x\sin x}{e^x-1}=0$

7. $\lim\limits_{x\longrightarrow \pi}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{x\sin x}=\dfrac{1}{2\pi}$

Problema 314 Calcular los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+x+1})$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-1}$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow 3}\dfrac{\sqrt{x^2-5}-\sqrt{x+1}}{x-3}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty}\dfrac{3x^2-\sqrt{2x^5+1}+x-1}{x^3-x+1}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+x+1})=-\dfrac{1}{2}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-1}=0$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow 3}\dfrac{\sqrt{x^2-5}-\sqrt{x+1}}{x-3}=\dfrac{5}{4}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty}\dfrac{3x^2-\sqrt{2x^5+1}+x-1}{x^3-x+1}=0$

Problema 315 Calcular los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2}\dfrac{2x^3-2x^2-8}{x^2-x-2}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow 3}\dfrac{\sqrt{x^2-5}-\sqrt{x+1}}{x-3}$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+1})$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{x^3-2\sqrt{x}+1}{3x^3+x-1}$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{2x-1}$

6. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{3x^2}\right)^{\frac{x+1}{2}}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2}\dfrac{2x^3-2x^2-8}{x^2-x-2}=\dfrac{16}{3}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow 3}\dfrac{\sqrt{x^2-5}-\sqrt{x+1}}{x-3}=\dfrac{5}{4}$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+1})=-\dfrac{1}{2}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{x^3-2\sqrt{x}+1}{3x^3+x-1}=\dfrac{1}{3}$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{2x-1}=e^2$

6. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{3x^2}\right)^{\frac{x+1}{2}}=0$

Problema 316 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{3x^3+2x-1}{2x^3+2}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x^3-3x-1}$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{x^4+1}{x^3+x-1}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{5x^2-x-1}{5x^2}\right)^{x+1}$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2x^3+x+1}{x^3+3}\right)^{\frac{x^2+1}{2}}$

6. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x^2+x+1}{2x^2-1}\right)^{2x}$

Solución:

1. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{3x^3+2x-1}{2x^3+2} = \dfrac{3}{2}$

2. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{x^2+x+1}{x^3-3x-1} = 0$

3. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{x^4+1}{x^3+x-1} = \infty$

4. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{5x^2-x-1}{5x^2}\right)^{x+1} = e^{-1/5}$

5. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{2x^3+x+1}{x^3+3}\right)^{\frac{x^2+1}{2}} = \infty$

6. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{x^2+x+1}{2x^2-1}\right)^{2x} = 0$

Problema 317 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x\longrightarrow 1} \dfrac{x^4-x^3+3x^2-3}{x^3+x^2-x-1}$

2. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

3. $\lim_{x\longrightarrow 2} \dfrac{\sqrt{x^2-3}-1}{x-2}$

4. $\lim_{x\longrightarrow 2} \dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^3+x^2-5x-2}$

5. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2}-x}{x+1}$

6. $\lim_{x\longrightarrow 5} \dfrac{3-\sqrt{x^2-16}}{x-5}$

Solución:

1. $\lim_{x\longrightarrow 1} \dfrac{x^4-x^3+3x^2-3}{x^3+x^2-x-1} = \dfrac{7}{4}$

2. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) = 0$

3. $\lim_{x\longrightarrow 2} \dfrac{\sqrt{x^2-3}-1}{x-2} = 2$

4. $\lim_{x\longrightarrow 2} \dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^3+x^2-5x-2} = \dfrac{5}{11}$

5. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}-x}{x+1} = 0$

6. $\lim_{x\longrightarrow 5} \frac{3-\sqrt{x^2-16}}{x-5} = -\frac{5}{3}$

Problema 318 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{2x^3+x-1}{3x^3+2}$

2. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{3x^2+2x+1}{x^5+2}$

3. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^6+x-1}{x^4+2}$

4. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{2x^2+x}{x^2-1}\right)^{3x^2-1}$

5. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x^2-x-1}{2x^2}\right)^{2x-1}$

6. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{2x}$

Solución:

1. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{2x^3+x-1}{3x^3+2} = \frac{2}{3}$

2. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{3x^2+2x+1}{x^5+2} = 0$

3. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^6+x-1}{x^4+2} = \infty$

4. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{2x^2+x}{x^2-1}\right)^{3x^2-1} = +\infty$

5. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x^2-x-1}{2x^2}\right)^{2x-1} = 0$

6. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{2x} = e^2$

Problema 319 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x^3-2x^2+2x-1}{x^4-x^3+2x-2}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right)$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}-3}{x-2}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow -2}\dfrac{x^4+2x^3-x^2-x+2}{x^3+2x^2-x-2}$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+x+2}-x}{x-1}$

6. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2}\dfrac{2\sqrt{x-1}-2}{x-2}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\dfrac{x^3-2x^2+2x-1}{x^4-x^3+2x-2}=\dfrac{1}{3}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right)=0$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}-3}{x-2}=\dfrac{4}{3}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow -2}\dfrac{x^4+2x^3-x^2-x+2}{x^3+2x^2-x-2}=-\dfrac{5}{3}$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+x+2}-x}{x-1}=\sqrt{2}-1$

6. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2}\dfrac{2\sqrt{x-1}-2}{x-2}=1$

Problema 320 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{3x^3+2x^2-x+8}{2x^3+x-1}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{x^2+1}{2x^3+x^2-x+1}$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{-3x^4+2x^3}{x^2+3}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{3x^2+x-1}{2x^2-1}\right)^{x+8}$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x^2+x+5}{2x^2+3}\right)^{\frac{x+5}{2}}$

6. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{2x+8}{2x-1}\right)^{x-3}$

Solución:

1. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{3x^3+2x^2-x+8}{2x^3+x-1}=\frac{3}{2}$

2. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^2+1}{2x^3+x^2-x+1}=0$

3. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-3x^4+2x^3}{x^2+3}=-\infty$

4. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{3x^2+x-1}{2x^2-1}\right)^{x+8}=\infty$

5. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2+x+5}{2x^2+3}\right)^{\frac{x+5}{2}}=0$

6. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{2x+8}{2x-1}\right)^{x-3}=e^{9/2}$

Problema 321 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\sqrt{2x^2-x+1}}{x+2}$

2. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-x^3+1}{\sqrt{x+5}}$

3. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\sqrt{\frac{2x+1}{2x+3}}$

4. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\sqrt{3x^3-1}}{x^2+2}$

5. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{3x^3-2x^2+\sqrt{3x-1}+5}{2x^3+5}$

6. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-1}\right)$

7. $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\sqrt{x^2-x+2}-\sqrt{x^2+2x-1}\right)$

8. Sabiendo que $\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{3x-1}{3x}\right)^{nx}=5$, calcular n.

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2-x+1}}{x+2}=\sqrt{2}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{-x^3+1}{\sqrt{x+5}}=-\infty$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\sqrt{\dfrac{2x+1}{2x+3}}=1$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{\sqrt{3x^3-1}}{x^2+2}=0$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{3x^3-2x^2+\sqrt{3x-1}+5}{2x^3+5}=\dfrac{3}{2}$

6. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-1}\right)=0$

7. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\sqrt{x^2-x+2}-\sqrt{x^2+2x-1}\right)=-\dfrac{3}{2}$

8. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x}\right)^{nx}=5\Longrightarrow n=-4,828.$

Problema 322 Calcular los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x}\right)^{3x}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{3x^2-5x-2}{x^3-3x^2+x+2}$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\dfrac{\sqrt{3x-1}-\sqrt{2x^2}}{x-1}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{x\cos x}{x+\sin x}$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+x-1})$

6. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{\sqrt{3x^4+x-1}}{-x^2+2}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x}\right)^{3x}=e^{-3/2}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{3x^2-5x-2}{x^3-3x^2+x+2}=0$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{\sqrt{3x-1}-\sqrt{2x^2}}{x-1} = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{x\cos x}{x+\sin x} = \dfrac{1}{2}$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+x-1}) = -\dfrac{1}{2}$

6. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{\sqrt{3x^4+x-1}}{-x^2+2} = -\sqrt{3}$

Problema 323 Calcular los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{2x^2+1}\right)$

2. Calcular n que cumpla:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)^{2nx} = 5$$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow 5} \dfrac{\sqrt{x^2-9}-\sqrt{3x+1}}{x-5}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2} \dfrac{3x^3-10x-4}{x^3+x^2-7x+2}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{2x^2+1}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

2. $$\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)^{2nx} = e^{2n} = 5 \Longrightarrow n = \frac{\ln 5}{2}$$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow 5} \dfrac{\sqrt{x^2-9}-\sqrt{3x+1}}{x-5} = \dfrac{7}{8}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2} \dfrac{3x^3-10x-4}{x^3+x^2-7x+2} = \dfrac{26}{9}$

Problema 324 Calcular los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+3x-2}\right)$

2. Calcular n que cumpla:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x^2+2x+1}{x^2+x-1}\right)^{nx} = 7$$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt{4x+1}}{x-2}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow 3}\dfrac{x^3-2x^2+x-12}{x^3-5x-12}$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty}\dfrac{xe^x-1}{e^x+2}$

6. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$

7. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\sin^2 x}{2x^2+\sin x}$

8. $\lim\limits_{x\longrightarrow \pi}\dfrac{1+\cos x}{\sin^2 x}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+3x-2}\right)=-1$

2. $$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2+x-1}\right)^{nx}=7\Longrightarrow n=\ln 7$$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt{4x+1}}{x-2}=0$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow 3}\dfrac{x^3-2x^2+x-12}{x^3-5x-12}=\dfrac{8}{11}$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty}\dfrac{xe^x-1}{e^x+2}=\infty$

6. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}=2$

7. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\sin^2 x}{2x^2+\sin x}=0$

8. $\lim\limits_{x\longrightarrow \pi}\dfrac{1+\cos x}{\sin^2 x}=\dfrac{1}{2}$

Problema 325 Calcular los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\sqrt{3x^2+x-1}-\sqrt{3x^2+2x-8}\right)$

2. Calcular n que cumpla:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2-x-1}{x^2+2x+1}\right)^{3nx}=2$$

3. $\lim_{x\longrightarrow 5} \dfrac{\sqrt{x^2-3}-\sqrt{4x+2}}{x-5}$

4. $\lim_{x\longrightarrow 2} \dfrac{3x^2+x-14}{x^3+x^2-6x+2}$

5. $\lim_{x\longrightarrow \infty} \dfrac{e^{2x}+2x^2-1}{3e^{2x}+x}$

6. $\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\cos^2 x-e^x}{\sin(2x)}$

Solución:

1. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\sqrt{3x^2+x-1}-\sqrt{3x^2+2x-8}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

2. $$\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x^2-x-1}{x^2+2x+1}\right)^{3nx} = 2 \Longrightarrow n = -\frac{\ln 2}{9}$$

3. $\lim_{x\longrightarrow 5} \dfrac{\sqrt{x^2-3}-\sqrt{4x+2}}{x-5} = \dfrac{3\sqrt{22}}{22}$

4. $\lim_{x\longrightarrow 2} \dfrac{3x^2+x-14}{x^3+x^2-6x+2} = 0$

5. $\lim_{x\longrightarrow \infty} \dfrac{e^{2x}+2x^2-1}{3e^{2x}+x} = \dfrac{1}{3}$

6. $\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\cos^2 x-e^x}{\sin(2x)} = -\dfrac{1}{2}$

Problema 326 Calcular los siguientes límites

1. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+5x-1}\right)$

2. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{x+5}{x-1}\right)^{x^2}$

3. $\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{3x+1}{3x}\right)^{x+2}$

4. $\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{x^2+1-\cos x}{x\sin x}$

5. $\lim_{x\longrightarrow 1} \dfrac{3x^5+2x^3-7x^2+2}{x^3+3x^2-5x+1}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+5x-1}\right)=-3$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-1}\right)^{x^2}=\infty$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x}\right)^{x+2}=e^{1/3}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{x^2+1-\cos x}{x\sin x}=\dfrac{3}{2}$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\dfrac{3x^5+2x^3-7x^2+2}{x^3+3x^2-5x+1}=\dfrac{7}{4}$

Problema 327 Calcular los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\sqrt{3x^2-1}-\sqrt{3x^2-x+5}\right)$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x}\right)^{x^2-1}$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^{2x+1}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{x^2+2-2\cos x}{x\cos x}$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2}\dfrac{5x^2-12x+4}{3x^3+x^2-10x-8}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\sqrt{3x^2-1}-\sqrt{3x^2-x+5}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x}\right)^{x^2-1}=0$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^{2x+1}=e^8$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{x^2+2-2\cos x}{x\cos x}=0$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2}\dfrac{5x^2-12x+4}{3x^3+x^2-10x-8}=\dfrac{4}{15}$

Problema 328 Calcular los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\sqrt{4x^2-x+1}-\sqrt{4x^2+2}\right)$

2. Calcular n sabiendo que $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{3x+5}{3x-1}\right)^{2nx}=3$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{2e^x-x^2}{3e^x}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{\ln(\sin x+1)}$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{\sqrt{5x^4-2x+1}}{2x^2-2}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\sqrt{4x^2-x+1}-\sqrt{4x^2+2}\right)=-\dfrac{1}{4}$

2. Calcular n sabiendo que $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{3x+5}{3x-1}\right)^{2nx}=3\Longrightarrow n=\dfrac{\ln 3}{4}$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{2e^x-x^2}{3e^x}=\dfrac{2}{3}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{\ln(\sin x+1)}=0$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{\sqrt{5x^4-2x+1}}{2x^2-2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Problema 329 Calcular los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\sqrt{5x^2}-\sqrt{5x^2+x-1}\right)$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{4x+8}{3x-1}\right)^{x+2}$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{xe^x-2x}{5x^2+1}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{2\sin x+1-\cos x}{x\sin x+3x)}$

5. Calcular n sabiendo que $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{3x+8}{3x-1}\right)^{3nx}=2$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\sqrt{5x^2}-\sqrt{5x^2+x-1}\right)=-\dfrac{\sqrt{5}}{10}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{4x+8}{3x-1}\right)^{x+2}=\infty$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{xe^x-2x}{5x^2+1}=\infty$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{2\sin x+1-\cos x}{x\sin x+3x)}=\dfrac{2}{3}$

5. Calcular n sabiendo que $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{3x+8}{3x-1}\right)^{3nx}=2\Longrightarrow n=\dfrac{\ln 2}{9}$

Problema 330 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{5x^3-2x^2-x-7}{2x^3+5x-1}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{x^2+x-1}{2x^3-3x^2-x+1}$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{-3x^4-2x^3+x-1}{3x^2+3}$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{3x^2-5x-6}{2x^2+x-1}\right)^{3x+8}$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2x^2-6x+5}{7x^2+3}\right)^{\frac{x+4}{2}}$

6. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{6x+7}{6x-1}\right)^{x-3}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{5x^3-2x^2-x-7}{2x^3+5x-1}=\dfrac{5}{2}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{x^2+x-1}{2x^3-3x^2-x+1}=0$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{-3x^4-2x^3+x-1}{3x^2+3}=-\infty$

4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{3x^2-5x-6}{2x^2+x-1}\right)^{3x+8}=\infty$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2x^2-6x+5}{7x^2+3}\right)^{\frac{x+4}{2}}=0$

6. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{6x+7}{6x-1}\right)^{x-3}=e^{4/3}$

Problema 331 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2-3x-1}}{x+2}$
2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{-x^7+5}{\sqrt{2x+5}}$
3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \sqrt{\dfrac{5x+1}{8x+3}}$
4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{\sqrt{3x^3-1}}{x^2+2}$
5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\sqrt{x^2-2x+2}-\sqrt{x^2+x-1}\right)$
6. Sabiendo que $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{3x}{3x-5}\right)^{nx}=3$, calcular n.

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2-3x-1}}{x+2}=\sqrt{2}$
2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{-x^7+5}{\sqrt{2x+5}}=-\infty$
3. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \sqrt{\dfrac{5x+1}{8x+3}}=\sqrt{\dfrac{5}{8}}$
4. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{\sqrt{3x^3-1}}{x^2+2}=0$
5. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\sqrt{x^2-2x+2}-\sqrt{x^2+x-1}\right)=-\dfrac{3}{2}$
6. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{3x}{3x-5}\right)^{nx}=3 \Longrightarrow n=\dfrac{3\ln 3}{5}=0,6591673732.$

Problema 332 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2} \dfrac{2x^2-5x+2}{x^3-3x-2}$
2. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{x^4-5x^3+3x+1}{x^3-1}$
3. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2} \dfrac{\sqrt{3x^2-4}-\sqrt{x+6}}{x-2}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2} \dfrac{2x^2-5x+2}{x^3-3x-2} = \dfrac{1}{3}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{x^4-5x^3+3x+1}{x^3-1} = -\dfrac{8}{3}$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow 2} \dfrac{\sqrt{3x^2-4}-\sqrt{x+6}}{x-2} = \dfrac{11\sqrt{2}}{8}$

Problema 333 Calcular los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\sqrt{3x^2+x-1}-\sqrt{3x^2-5x+8}\right)$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2+1}}{x+2}$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{2\cos x-2x-2}{5\sin x+x}$

4. Calcular n sabiendo que $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{3x-8}{3x+1}\right)^{3nx} = 2$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\sqrt{3x^2+x-1}-\sqrt{3x^2-5x+8}\right) = \sqrt{3}$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2+1}}{x+2} = \sqrt{3}$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{2\cos x-2x-2}{5\sin x+x} = -\dfrac{1}{3}$

4. Calcular n sabiendo que $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{3x-8}{3x+1}\right)^{3nx} = 2 \Longrightarrow n = -\dfrac{\ln 2}{15}$

3.3. Derivadas

Problema 334 Calcular las siguientes derivadas:

1. $y = \ln\left(\dfrac{x^2-1}{x+2}\right)$
2. $y = e^{x^2-x-1}$
3. $y = \dfrac{2x^2+1}{x-1}$
4. $y = (x^2+1)(x-1)$

Solución:

1. $y = \ln\left(\dfrac{x^2-1}{x+2}\right) = \ln(x^2-1) - \ln(x+2)$

   $y' = \dfrac{2x}{x^2-1} - \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{x^2+4x+1}{x^3+2x^2-x-2}$
2. $y = e^{x^2-x-1}$

   $y' = (2x-1)e^{x^2-x-1}$
3. $y = \dfrac{2x^2+1}{x-1}$

   $y' = \dfrac{4x(x-1)-(2x^2+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^2-4x-1}{(x-1)^2}$
4. $y = (x^2+1)(x-1)$

   $y' = 2x(x-1) + (x^2+1) = 3x^2-2x+1$

Problema 335 Calcular las siguientes derivadas:

1. $y = \dfrac{x^3-2}{x^2+x-1}$
2. $y = \ln x \cdot \cos(x^2-1)$
3. $y = \ln \dfrac{x^3-x+1}{x^2-1}$
4. $y = \log_7(\sin x)$
5. $y = e^{x\cos x}$
6. $y = 5^{\cos(x^2-1)}$

7. $y = \arcsin(x^2 - 1)$
8. $y = \arccos\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$
9. $y = \arctan(\ln x)$
10. $y = e^x \cdot \sin(x^3 - 1)$

Problema 336 Calcular las siguientes derivadas

1. $y = 3^{x^2-1} \cdot \sin(x+1)$
2. $y = \arcsin(e^x)$
3. $y = \arccos(5^{x^2-1})$
4. $y = (x^2 - 1)(2x + 1)$
5. $y = x^3 \ln x$
6. $y = \sqrt[3]{(2x-1)^2}$
7. $y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
8. $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x}}$
9. $y = \log_3 e^{x^2-1}$
10. $y = \dfrac{1}{x^3 - x + 1}$

Problema 337 Calcular las siguientes derivadas:

a) $y = \arctan(x^2 - 1)$ b) $y = e^x(\cos x - 1)$ c) $y = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x^2+1}\right)$

d) $y = e^{\sin x - 1}$ e) $y = \sqrt{x^2 - 1}$

Solución:

a) $y' = \dfrac{2x}{1 + (x^2-1)^2}$

b) $y' = e^x(\cos x - 1) - e^x \sin x$

c) $y' = \dfrac{\cos x}{\sin x} - \dfrac{2x}{x^2+1}$

d) $y' = \cos x e^{\sin x - 1}$

e) $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

Problema 338 Calcular la recta tangente y normal a la función

$f(x) = \dfrac{x^2+x-1}{x+3}$ en el punto $x = 2$.

Solución:

$$a = 2, \quad b = f(2) = 1, \quad y - b = m(x-a)$$
$$f'(x) = \frac{x^2+6x+4}{(x+3)^2} \Longrightarrow m = f'(2) = \frac{4}{5}$$

La recta tangente es $y - 1 = \dfrac{4}{5}(x-2)$.

La recta normal es $y - 1 = -\dfrac{5}{4}(x-2)$.

Problema 339 Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

1. $y = (x^2 - x + 1)^{10}$
2. $y = x^3 \ln x$
3. $y = \ln\left(\frac{x^2+2}{x-1}\right)$
4. $y = e^{x^2+1}$
5. $y = 3^{5x-1}$
6. $y = \log_5(x^2+1)$
7. $y = (x^2+1)^{\ln(2x)}$
8. $y = \frac{x^2-3x-1}{x+2}$

Solución:

1. $y = (x^2 - x + 1)^{10} \Longrightarrow y' = 10(2x-1)(x^2-x+1)^9$
2. $y = x^3 \ln x \Longrightarrow y' = 2x^2 \ln x + x^2$
3. $y = \ln\left(\frac{x^2+2}{x-1}\right) \Longrightarrow y' = \frac{2x}{x^2+2} - \frac{1}{x-1}$
4. $y = e^{x^2+1} \Longrightarrow y' = 2xe^{x^2+1}$
5. $y = 3^{5x-1} \Longrightarrow y' = 5 \cdot 3^{5x-1} \ln 3$
6. $y = \log_5(x^2+1) \Longrightarrow y' = \frac{2x}{(x^2+1)\ln 5}$
7. $y = (x^2+1)^{\ln(2x)} \Longrightarrow y' = (x^2+1)^{\ln(2x)}\left(\frac{\ln(x^2+1)}{x} + \frac{2x\ln(2x)}{x^2+1}\right)$

8. $y = \frac{x^2-3x-1}{x+2} \Longrightarrow y' = \frac{x^2+4x-5}{(x+2)^2}$

Problema 340 Calcular las rectas tangente y normal a la función $f(x) = \dfrac{x^2-x+1}{x+1}$ en el punto de abcisa $x = 0$.

Solución:

$$a = 0, \;\; f(a) = f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{x^2+2x-2}{(x+1)^2} \Longrightarrow m = f'(0) = -2$$

Recta Tangente: $y - 1 = -2(x-0) \Longrightarrow\Longrightarrow 2x + y - 1 = 0$

Recta Normal: $y - 1 = \frac{1}{2}(x-0) \Longrightarrow x - 2y + 2 = 0$

Problema 341 Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

1. $y = (x^4 - 3x^2 + x - 1)^{14}$
2. $y = x^5 e^{x^2-1}$
3. $y = \ln\left(\frac{x^3+2}{2x-1}\right)$
4. $y = e^{x^4+x-1}$
5. $y = 5^{x^3+x-1}$
6. $y = \log_9(x^3+3x-1)$
7. $y = (x^3+x-1)^{\ln(2x+1)}$
8. $y = \frac{x^2-3x-1}{x+2}$

Solución:

1. $y = (x^4-3x^2+x-1)^{14} \Longrightarrow y' = 14(4x^3-6x+1)(x^4-3x^2+x-1)^{13}$
2. $y = x^5 e^{x^2-1} \Longrightarrow y' = 5x^4 e^{x^2-1} + 2x^6 e^{x^2-1}$
3. $y = \ln\left(\frac{x^3+2}{2x-1}\right) \Longrightarrow y' = \frac{6x^2}{x^3+2} - \frac{2}{2x-1}$
4. $y = e^{x^4+x-1} \Longrightarrow y' = (4x^3+1)e^{x^4+x-1}$
5. $y = 5^{x^3+x-1} \Longrightarrow y' = (3x^2+1)5^{x^3+x-1}\ln 5$
6. $y = \log_9(x^3+3x-1) \Longrightarrow y' = \frac{3x^2+3}{(x^3+3x-1)\ln 9}$
7. $y = (x^3+x-1)^{\ln(2x+1)} \Longrightarrow y' = (x^3+x-1)^{\ln(2x+1)}\left(\frac{2\ln(x^2+x-1)}{2x+1} + \frac{(3x^2+1)\ln(2x+1)}{x^3+x-1}\right)$

8. $y = \frac{x^2-3x-1}{x+2} \Longrightarrow y' = \frac{x^2+4x-5}{(x+2)^2}$

Problema 342 Calcular las rectas tangente y normal a la función $f(x) = \dfrac{2x^2+3}{2x-1}$ en el punto de abcisa $x = 1$.

Solución:

$$a = 1, \;\; f(a) = f(1) = 5$$

$$f'(x) = \frac{2(2x^2-2x-3)}{(2x-1)^2} \Longrightarrow m = f'(1) = -6$$

Recta Tangente: $y - 5 = -6(x-1) \Longrightarrow\Longrightarrow 6x + y - 11 = 0$

Recta Normal: $y - 5 = \frac{1}{6}(x-1) \Longrightarrow x - 6y + 29 = 0$

Problema 343 Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

1. $y = (x^2 - x)^{10}(x+1)^5$
2. $y = \dfrac{3x^2 - x - 1}{x+2}$
3. $y = (3x-1)^{2x+1}$
4. $y = \ln\sqrt{\dfrac{2x+1}{x+3}}$
5. $y = e^{\sqrt{x-2}}$
6. $y = x^{\sqrt{x}}$

Solución:

1. $y = (x^2 - x)^{10}(x+1)^5 \Longrightarrow$
$$y' = 10(x^2-x)^9(2x-1)(x+1)^5 + 5(x^2+x)^{10}(x+1)^4$$
2. $y = \dfrac{3x^2 - x - 1}{x+2} \Longrightarrow y' = \dfrac{3x^2+12x-1}{(x+2)^2}$
3. $y = (3x-1)^{2x+1} \Longrightarrow y' = (3x-1)^{2x+1}\left[2\ln(3x-1) + \frac{3(2x+1)}{3x+1}\right]$
4. $y = \ln\sqrt{\dfrac{2x+1}{x+3}} \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{2}\ln\sqrt{\dfrac{2x+1}{x+3}}\left[\dfrac{2}{2x+1} - \dfrac{1}{x+3}\right]$
5. $y = e^{\sqrt{x-2}} \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}\,e^{\sqrt{x-2}}$

6. $y = x^{\sqrt{x}} \Longrightarrow y' = x^{\sqrt{x}}\left[\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}}{x}\right]$

Problema 344 Calcular las rectas tangente y normal a la función $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+2}$ en el punto de abcisa $x = 1$.

Solución:

$$a = 1,\ \ f(a) = f(1) = \frac{2}{3}$$

$$f'(x) = \frac{7}{(x+2)^2} \Longrightarrow m = f'(1) = \frac{7}{9}$$

Recta Tangente: $y - \frac{2}{3} = \frac{7}{9}(x-1)$

Recta Normal: $y - \frac{2}{3} = -\frac{9}{7}(x-1)$

Problema 345 Calcular las siguientes derivadas:

1. $y = \arctan(x^2-1)$
2. $y = (x^2-1)^{2x}$
3. $y = \ln(x^2+1)$
4. $y = \dfrac{2x-2}{x^2}$
5. $y = e^{x^2-1}$
6. $y = \sin(2x-1)$
7. $y = \tan(x^2+2)$

Solución:

1. $y = \arctan(x^2-1) \Longrightarrow y' = \dfrac{2x}{1+(x^2-1)^2}$
2. $y = (x^2-1)^{2x} \Longrightarrow y' = (x^2-1)^{2x-1}[2(x^2-1)\ln(x^2-1) + 4x^2]$
3. $y = \ln(x^2+1) \Longrightarrow y' = \dfrac{2x}{x^2+1}$
4. $y = \dfrac{2x-2}{x^2} \Longrightarrow y' = \dfrac{-2x^2+4x}{x^4}$
5. $y = e^{x^2-1} \Longrightarrow y' = 2xe^{x^2-1}$
6. $y = \sin(2x-1) \Longrightarrow y' = 2\cos(2x-1)$

7. $y = \tan(x^2+2) \Longrightarrow y' = \dfrac{2x}{\cos^2(x^2+2)}$

Problema 346 Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

1. $y = (x^2 - x + 1)^{11}$
2. $y = x \ln x$
3. $y = \ln\left(\frac{x^2+x}{x^2-1}\right)$
4. $y = e^{x^2-1}$
5. $y = 5^{5x-1}$
6. $y = \log_3(x^2+1)$
7. $y = (x^2-1)^{\ln(x)}$
8. $y = \frac{x^2+x-5}{x-3}$

Solución:

1. $y = (x^2 - x + 1)^{11} \Longrightarrow y' = 11(2x-1)(x^2-x+1)^{10}$
2. $y = x \ln x \Longrightarrow y' = \ln x + 1$
3. $y = \ln\left(\frac{x^2+x}{x^2-1}\right) \Longrightarrow y' = \frac{2x+1}{x^2+x} - \frac{2x}{x^2-1}$
4. $y = e^{x^2-1} \Longrightarrow y' = 2xe^{x^2-1}$
5. $y = 5^{5x-1} \Longrightarrow y' = 5 \cdot 5^{5x-1} \ln 5$
6. $y = \log_3(x^2+1) \Longrightarrow y' = \frac{2x}{(x^2+1)\ln 3}$
7. $y = (x^2-1)^{\ln(x)} \Longrightarrow y' = (x^2-1)^{\ln(x)}\left(\frac{\ln(x^2-1)}{x} + \frac{2x\ln(x)}{x^2-1}\right)$
8. $y = \frac{x^2+x-5}{x-3} \Longrightarrow y' = \frac{x^2-6x+2}{(x-3)^2}$

Problema 347 Calcular las rectas tangente y normal a la función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+2}$ en el punto de abcisa $x = 0$.

Solución:

$$a = 0, \;\; f(a) = f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2} \Longrightarrow m = f'(0) = 1/4$$

Recta Tangente: $y - 1 = \dfrac{1}{4}x \Longrightarrow x - 4y + 4 = 0$

Recta Normal: $y - 1 = -4x \Longrightarrow 4x + y - 1 = 0$

Problema 348 Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

1. $y = (x^3 - 2x + 1)^{11}$
2. $y = x^2 \ln x$
3. $y = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$
4. $y = e^{2x^2-1}$
5. $y = 3^{4x-1}$
6. $y = \log_3(x^2 - 1)$
7. $y = (2x^2 + 1)^{\ln(x)}$
8. $y = \frac{x^2-2x+5}{x-3}$

Solución:

1. $y = (x^3 - 2x + 1)^{11} \Longrightarrow y' = 11(3x - 2)(x^3 - 2x + 1)^{10}$
2. $y = x^2 \ln x \Longrightarrow y' = 2x \ln x + x$
3. $y = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right) \Longrightarrow y' = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2-1}$
4. $y = e^{2x^2-1} \Longrightarrow y' = 4xe^{2x^2-1}$
5. $y = 3^{4x-1} \Longrightarrow y' = 4 \cdot 3^{4x-1} \ln 3$
6. $y = \log_3(x^2 - 1) \Longrightarrow y' = \frac{2x}{(x^2-1)\ln 3}$
7. $y = (2x^2 + 1)^{\ln(x)} \Longrightarrow y' = (2x^2 + 1)^{\ln(x)} \left(\frac{\ln(2x^2+1)}{x} + \frac{4x\ln(x)}{2x^2+1}\right)$
8. $y = \frac{x^2-2x+5}{x-3} \Longrightarrow y' = \frac{x^2-6x+1}{(x-3)^2}$

Problema 349 Calcular las rectas tangente y normal a la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$ en el punto de abcisa $x = 0$.

Solución:

$$a = 0, \;\; f(a) = f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{(x + 1)^2} \Longrightarrow m = f'(0) = -1$$

Recta Tangente: $y - 1 = -x \Longrightarrow x + y - 1 = 0$

Recta Normal: $y - 1 = x - 0 \Longrightarrow x - y + 1 = 0$

Problema 350 Calcula la derivada de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \ln\left(\dfrac{3x^2-2x}{x+1}\right)$

2. $f(x) = \csc\dfrac{x^2-1}{x+2}$

Solución:

1. $$f'(x) = \frac{6x-2}{3x^2-2x} - \frac{1}{x+1}$$

2. $$f'(x) = -\frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}\cot\frac{x^2-1}{x+2}\csc\frac{x^2-1}{x+2}$$

Problema 351 Calcular la derivada de las siguientes funciones

1. $y = (x^2+1)^8$

2. $y = \sin(x^2-1)\cdot(x^2+2)$

3. $y = \dfrac{e^x}{x^2-1}$

4. $y = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x+2}\right)$

5. $y = e^{x^2+x-1}$

6. $y = \tan(x^2+x-8)$

Solución:

1. $y = (x^2+1)^8 \Longrightarrow y' = 16x(x^2+1)^7$

2. $y = \sin(x^2-1)\cdot(x^2+2) \Longrightarrow$
$$y' = 2x\cos(x^2-1)\cdot(x^2+2) + \sin(x^2-1)\cdot(2x)$$

3. $y = \dfrac{e^x}{x^2-1} \Longrightarrow y' = \dfrac{e^x(x^2-1)-2xe^x}{(x^2-1)^2}$

4. $y = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x+2}\right) \Longrightarrow y' = \dfrac{2x}{x^2+1} - \dfrac{1}{x+2}$

5. $y = e^{x^2+x-1} \Longrightarrow y' = (2x+1)e^{x^2+x-1}$

6. $y = \tan(x^2 + x - 8) \Longrightarrow y' = \dfrac{2x+1}{\cos^2(x^2 + x - 8)}$

Problema 352 Calcular las rectas tangente y normal de las siguientes funciones

1. $f(x) = \dfrac{x+3}{x-1}$ en $x = 2$
2. $f(x) = \dfrac{3x+1}{x+2}$ en $x = 0$
3. $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}$ en $x = 2$
4. $f(x) = (x^2 - 1)^4$ en $x = 2$

Solución:

1. $f'(x) = \dfrac{-4}{(x-1)^2} \Longrightarrow f'(2) = -4$ y $f(2) = 5$

   Recta Tangente: $y - 5 = -4(x - 2)$

   Recta Normal: $y - 5 = \dfrac{1}{4}(x - 2)$

2. $f'(x) = \dfrac{5}{(x+2)^2} \Longrightarrow f'(0) = \dfrac{5}{4}$ y $f(0) = \dfrac{1}{2}$

   Recta Tangente: $y - \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{4}x$

   Recta Normal: $y - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{4}{5}x$

3. $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 2x}{(2x-1)^2} \Longrightarrow f'(2) = \dfrac{4}{9}$ y $f(2) = \dfrac{4}{3}$

   Recta Tangente: $y - \dfrac{4}{3} = \dfrac{4}{9}(x - 2)$

   Recta Normal: $y - \dfrac{4}{3} = -\dfrac{9}{4}(x - 2)$

4. $f'(x) = 8x(x^2 - 1)^3 \Longrightarrow f'(2) = 432$ y $f(2) = 81$

   Recta Tangente: $y - 81 = 432(x - 2)$

   Recta Normal: $y - 81 = -\dfrac{1}{432}(x - 2)$

Problema 353 Calcular la derivada de las siguientes funciones

1. $y = (\cos x)^x$

2. $y = \ln\left(\dfrac{\cos x + 1}{\sin x}\right)$

3. $y = \arctan(x^3 - 5)$

Solución:

1. $y = (\cos x)^x \Longrightarrow y' = (\cos x)^x \left(\ln(\cos x) - \dfrac{x \sin x}{\cos x}\right)$

2. $y = \left(\dfrac{\cos x + 1}{\sin x}\right) = \ln(\cos x + 1) - \ln(\sin x) \Longrightarrow$

$$y' = \frac{-\sin x}{\cos x + 1} - \frac{\cos x}{\sin x}$$

3. $y = \arctan(x^3 - 5) \Longrightarrow y' = \dfrac{3x^2}{1 + (x^3 - 5)^2}$

Problema 354 Calcular las rectas tangente y normal de las siguientes funciones

1. $f(x) = \dfrac{e^x}{x + 2}$ en $x = 0$

2. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x + 5}$ en $x = 1$

Solución:

1. $f'(x) = \dfrac{e^x(x + 2) - e^x}{(x + 2)^2} \Longrightarrow f'(0) = \dfrac{1}{4}$ y $f(0) = \dfrac{1}{2}$

   Recta Tangente: $y - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}x$

   Recta Normal: $y - \dfrac{1}{2} = -4x$

2. $f'(x) = \dfrac{x + 5 - x\ln x}{x(x + 5)^2} \Longrightarrow f'(1) = \dfrac{1}{6}$ y $f(1) = 0$

   Recta Tangente: $y = \dfrac{1}{6}(x - 1)$

   Recta Normal: $y = -6(x - 1)$

Problema 355 Resuelve las siguientes derivadas:

1. $f(x) = (4x^2 - 1)^{10}$

2. $f(x) = e^{\sin x}$

3. $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$

Solución:

1. $f'(x) = 10(4x^2 - 1)(8x)$
2. $f(x) = \cos x e^{\sin x}$
3. $f(x) = (\sin x)^{\cos x}\left(-\sin x \ln(\sin x) + \dfrac{\cos^2 x}{\sin x}\right)$

Problema 356 Calcular la derivada de las siguientes funciones

1. $y = (x^3 - 2x^2 + 1)^8$
2. $y = e^{x^2-3x+1}$
3. $y = e^{2x} \cdot (x^2 + x - 1)$
4. $y = \dfrac{\sin(x^2)}{e^{2x}}$
5. $y = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$

Solución:

1. $y = (x^3 - 2x^2 + 1)^8 \Longrightarrow y' = 8(x^3 - 2x^2 + 1)^7(3x^2 - 4x)$
2. $y = e^{x^2-3x+1} \Longrightarrow y' = (2x - 3)e^{x^2-3x+1}$
3. $y = e^{2x} \cdot (x^2 + x - 1) \Longrightarrow y' = 2e^{2x} \cdot (x^2 + x - 1) + e^{2x} \cdot (2x + 1)$
4. $y = \dfrac{\sin(x^2)}{e^{2x}} \Longrightarrow y' = \dfrac{2x\cos(x^2)e^{2x} - 2e^{2x}\sin(x^2)}{(e^{2x})^2}$
5. $y = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) \Longrightarrow y' = \dfrac{\cos x}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$

Problema 357 Calcular las rectas tangente y normal de la siguiente función

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1}$$

en $x = 2$

Solución:

$$f'(x) = \frac{-6x}{(x^2 - 1)^2} \Longrightarrow f'(2) = -\frac{4}{3} \text{ y } f(2) = 2$$

Recta Tangente: $y - 2 = -\dfrac{4}{3}(x - 2)$

Recta Normal: $y - 2 = \dfrac{3}{4}(x - 2)$

Problema 358 Calcular la derivada de las siguientes funciones

1. $y = (3x^2 - x + 1)^8$
2. $y = \sin(2x-1)\cdot\ln(2x-1)$
3. $y = e^{\cos 2x}$
4. $y = \ln\left(\dfrac{\cos x}{x^2+1}\right)$
5. $y = \dfrac{\sin(x^2+1)}{e^x}$
6. $y = \tan(x^2+1)$
7. $y = 7^{x\sin x}$
8. $y = \log_5\left(\dfrac{x^2-1}{x+8}\right)$
9. $y = (x^2+2)^{x+1}$

Solución:

1. $y' = 8(3x^2 - x + 1)^7(6x-1)$
2. $y' = 2\cos(2x-1)\cdot\ln(2x-1) + \sin(2x-1)\cdot\dfrac{2}{2x-1}$
3. $y' = -2\sin 2xe^{\cos 2x}$
4. $y' = \dfrac{-\sin x}{\cos x} - \dfrac{2x}{\cos x^2+1}$
5. $y' = \dfrac{2x\cos(x^2+1)\cdot e^x - \sin(x^2+1)\cdot e^x}{e^{2x}}$
6. $y' = \dfrac{2x}{\cos^2(x^2+1)}$
7. $y' = (\sin x + x\cos x)7^{x\sin x}\ln 7$
8. $y' = \dfrac{2x}{(x^2-1)\ln 5} - \dfrac{1}{(x+8)\ln 5}$
9. $y' = (x^2+2)^{x+1}\left(\ln(x^2+2) + \dfrac{2x(x+1)}{x^2+2}\right)$

Problema 359 Calcular las rectas tangente y normal de la siguientes funciones en $x = 2$:

1. $f(x) = e^{x^2-1}$

2. $f(x) = x^2 - x + 1$

3. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

Solución:

1. $f(x) = e^{x^2-1} \Longrightarrow f(2) = e^3,\ (2, e^3)$ y $f'(x) = 2xe^{x^2-1} \Longrightarrow m = f'(2) = 4e^3$

   Recta Tangente: $y - e^3 = 4e^3(x-2)$

   Recta Normal: $y - e^3 = -\dfrac{1}{4e^3}(x-2)$

2. $f(x) = x^2 - x + 1 \Longrightarrow f(2) = 3,\ (2, 3)$ y $f'(x) = 2x - 1 \Longrightarrow m = f'(2) = 3$

   Recta Tangente: $y - 3 = 3(x-2)$

   Recta Normal: $y - 3 = -\dfrac{1}{3}(x-2)$

3. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1} \Longrightarrow f(2) = \dfrac{5}{3},\ \left(2, \dfrac{5}{3}\right)$ y $f'(x) = \dfrac{-4x}{(x^2-1)^2} \Longrightarrow m = f'(2) = -\dfrac{8}{9}$

   Recta Tangente: $y - \dfrac{5}{3} = -\dfrac{8}{9}(x-2)$

   Recta Normal: $y - \dfrac{5}{3} = \dfrac{9}{8}(x-2)$

Problema 360 Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

1. $y = \dfrac{x^2+8}{x-1}$

2. $y = e^{x^2+5} \cdot \sin x$

3. $y = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x^2}\right)$

4. $y = (x^2+5)^{\cos x}$

5. $y = (\ln x)^5$

6. $y = 2^{\cos x}$

7. $y = e^{x^2-1}$

8. $y = \log_5(x^2+2)$

Solución:

1. $y' = \dfrac{x^2-2x-8}{(x-1)^2}$
2. $y' = 2xe^{x^2+5}\cdot \sin x + e^{x^2+5}\cdot\cos x$
3. $y' = \dfrac{\cos x}{\sin x} - \dfrac{2}{x}$
4. $y' = (x^2+5)^{\cos x}\left(-\sin x\ln(x^2+5) + \cos x\frac{2x}{x^2+5}\right)$
5. $y' = 5(\ln x)^4\dfrac{1}{x}$
6. $y' = -\sin x 2^{\cos x}\ln 2$
7. $y' = 2xe^{x^2-1}$
8. $y'\dfrac{2x}{(x^2+2)\ln 5}$

Problema 361 Calcular las rectas tangente y normal de las siguientes funciones

1. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+5}$ en $x=1$
2. $f(x) = e^{x+1}$ en $x=-1$

Solución:

1. $f'(x) = \dfrac{-2x^2+10}{(x^2+5)^2} \Longrightarrow f'(1) = \dfrac{2}{9}$ y $f(1) = \dfrac{1}{3}$

   Recta Tangente: $y - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{9}(x-1)$

   Recta Normal: $y - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{9}{2}(x-1)$
2. $f'(x) = e^{x+1} \Longrightarrow f'(-1) = 1$ y $f(-1) = 1$

   Recta Tangente: $y - 1 = x + 1 \Longrightarrow x - y + 2 = 0$

   Recta Normal: $y - 1 = -x - 1 \Longrightarrow x + y = 0$

Problema 362 Calcular la derivada de las siguientes funciones

1. $y = e^x\csc(x^2+1)$
2. $y = (x^2+1)^{\sin x}$

3. $y = \ln \dfrac{\sin x}{x+1}$
4. $y = e^{x+1} \cos x$
5. $y = \sin^{10}(x^2+1)$
6. $y = \dfrac{x^2}{\arctan x}$

Solución:

1. $y' = e^x \csc(x^2+1) - e^x \cot x \csc x$
2. $y' = (x^2+1)^{\sin x}(\ln(x^2+1)\cos x + \frac{2x}{x^2+1}\sin x)$
3. $y' = \dfrac{\cos x}{\sin x} - \dfrac{1}{x+1}$
4. $y' = e^{x+1}\cos x - e^{x+1}\sin x$
5. $y' = 20x \sin^9(x^2+1)\cos(x^2+1)$
6. $y' = \dfrac{2x \arctan x - \frac{x^2}{1+x^2}}{(\arctan x)^2}$

Problema 363 Calcular las rectas tangente y normal de las siguientes funciones

1. $f(x) = \dfrac{e^x+1}{x}$ en $x = 1$
2. $f(x) = x^2 \sin x$ en $x = \dfrac{\pi}{2}$

Solución:

1. $f(1) = e+1$, $f'(x) = \dfrac{xe^x - e^x - 1}{x^2} \Longrightarrow m = f'(1) = -1$

   Recta tangente: $y - e - 1 = -(x-1)$

   Recta normal: $y - e - 1 = (x-1)$

2. $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2$, $f'(x) = 2x\sin x + x^2\cos x \Longrightarrow f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi$

   Recta tangente: $y - \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2 = \pi\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

   Recta normal: $y - \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2 = -\dfrac{1}{\pi}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

Problema 364 Calcular la derivada de las siguientes funciones

1. $y = (10x^3 + 1)^{12}$
2. $y = e^{3x^2+1}$
3. $y = e^x \sin x$
4. $y = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 + 2}$
5. $y = \ln\left(\dfrac{x^2 + 8}{x^2 - 3}\right)$
6. $y = 7^{x^2+1}$
7. $y = (x^2 + 2)^{x-1}$

Solución:

1. $y = (10x^3 + 1)^{12} \Longrightarrow y' = 12(10x^3 + 1)^{11}(30x^2)$
2. $y = e^{3x^2+1} \Longrightarrow y' = 6xe^{3x^2+1}$
3. $y = e^x \sin x \Longrightarrow y' = e^x \sin x + e^x \cos x$
4. $y = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 + 2} \Longrightarrow \dfrac{(2x + 1)(x^2 + 2) + (x^2 + x - 1)(2x)}{(x^2 + 2)^2}$
5. $y = \ln\left(\dfrac{x^2 + 8}{x^2 - 3}\right) = \ln(x^2 + 8) - \ln(x^2 - 3) \Longrightarrow y' = \dfrac{2x}{x^2 + 8} - \dfrac{2x}{x^2 - 3}$
6. $y = 7^{x^2+1} \Longrightarrow y' = 2x7^{x^2+1} \ln 7$
7. $y = (x^2 + 2)^{x-1} \Longrightarrow y' = (x^2 + 2)^{x-1}\left(\ln(x^2 + 2) + \dfrac{2x(x - 1)}{x^2 + 2}\right)$

Problema 365 Calcular las rectas tangente y normal de las siguientes funciones en el punto de abcisa $x = 1$

1. $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 + 2}$
2. $f(x) = e^{x^2+1}$

Solución:

1. $f(1) = 1,\ f'(x) = \dfrac{-3x^2+6}{(x^2+2)^2} \Longrightarrow m = f'(1) = \dfrac{1}{3}$

   Recta tangente: $y - 1 = \dfrac{1}{3}(x-1)$

   Recta normal: $y - 1 = -3(x-1)$

2. $f(1) = e^2,\ f'(x) = 2xe^{x^2+1} \Longrightarrow f'(1) = 2e^2$

   Recta tangente: $y - e^2 = 2e^2(x-1)$

   Recta normal: $y - e^2 = -\dfrac{1}{2e^2}(x-1)$

Problema 366 Calcular la derivada de las siguientes funciones

1. $y = (x^2+x-1)^{12}$
2. $y = (\sin x)\ln x$
3. $y = 2x\tan x$
4. $y = \ln\left(\dfrac{x^2+5}{x^2-2}\right)$
5. $y = \arctan(x^2+2)$
6. $y = 7^{x^2+5}$
7. $y = e^x\cos 2x$
8. $y = \dfrac{\sin x}{x^2+1}$
9. $y = (x^2-1)^{\sin x}$

Solución:

1. $y = (x^2+x-1)^{12} \Longrightarrow y' = 12(x^2+x-1)^{11}(2x+1)$
2. $y = (\sin x)\ln x \Longrightarrow y' = \cos x\ln x + \dfrac{\sin x}{x}$
3. $y = 2x\tan x \Longrightarrow y' = 2\tan x + \dfrac{2x}{\cos^2 x}$
4. $y = \ln\left(\dfrac{x^2+5}{x^2-2}\right) \Longrightarrow y' = \dfrac{2x}{x^2+5} - \dfrac{2x}{x^2-2}$

5. $y = \arctan(x^2+2) \Longrightarrow y' = \dfrac{2x}{1+(x^2+2)^2}$

6. $y = 7^{x^2+5} \Longrightarrow y' = 2x7^{x^2+5}\ln 7$

7. $y = e^x \cos 2x \Longrightarrow y' = e^x \cos x - 2e^x \sin x$

8. $y = \dfrac{\sin x}{x^2+1} \Longrightarrow y' = \dfrac{\cos x(x^2+1) - 2x\sin x}{(x^2+1)^2}$

9. $y = (x^2-1)^{\sin x} \Longrightarrow y' = (x^2-1)^{\sin x}\left(\cos x \ln(x^2-1) + \dfrac{2x\sin x}{x^2-1}\right)$

Problema 367 Calcular las rectas tangente y normal de la siguiente función en el punto de abcisa $x = 1$

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$$

Solución:

$f(1) = 1$, $f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+2)^2} \Longrightarrow m = f'(1) = 1$

Recta tangente: $y - 1 = x - 1 \Longrightarrow y = x$

Recta normal: $y - 1 = -(x-1) \Longrightarrow y = -x + 2$

Problema 368 Calcular la derivada de las siguientes funciones

1. $y = (9x^2+1)^7$

2. $y = 2x\arctan x$

3. $y = \dfrac{x^2+5}{\sin x}$

4. $y = (3x-1)^{\cos x}$

Solución:

1. $y = (9x^2+1)^7 \Longrightarrow y' = 7(9x^2+1)^6(18x)$

2. $y = 2x\arctan x \Longrightarrow y' = 2\arctan x + 2x\dfrac{1}{1+x^2}$

3. $y = \dfrac{x^2+5}{\sin x} \Longrightarrow y' = \dfrac{2x\sin x - (x^2+5)\cos x}{\sin^2 x}$

4. $y = \dfrac{\sin x}{x^2+1} \Longrightarrow y' = \dfrac{\cos x(x^2+1) - 2x\sin x}{(x^2+1)^2}$

5. $y = (3x-1)^{\cos x} \Longrightarrow y' = (3x-1)^{\cos x}\left(-\sin x \ln(3x-1) + \frac{3\cos x}{3x-1}\right)$

Problema 369 Calcular las rectas tangente y normal de la siguiente función en el punto de abcisa $x = 1$

$$f(x) = e^{x^2-1}$$

Solución:

$f(1) = 1$, $f'(x) = 2xe^{x^2-1} \Longrightarrow m = f'(1) = 2$

Recta tangente: $y - 1 = 2(x - 1)$

Recta normal: $y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1)$

3.4. Continuidad y derivabilidad

Problema 370 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3ax^2}{2} - bx + 1 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ & \\ ax^3 + bx^2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Calcular los parámetros a y b, de manera que la función $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 2$.

Solución:

- Para que la función sea continua en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 2} \dfrac{3ax^2}{2} - bx + 1 = 6a - 2b + 1 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 2} ax^3 + bx^2 = 8a + 4b \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$6a - 2b + 1 = 8a + 4b \Longrightarrow 2a + 6b - 1 = 0$$

- Para que sea derivable:

$$f'(x) = \begin{cases} 3ax - b & \text{si} \quad x \leq 2 \\ 3ax^2 + 2bx & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

  Para que sea derivable se tiene que cumplir que $f'(2^+) = f'(2^-)$:

$$6a - b = 12a + 4b \Longrightarrow 6a + 5b = 0$$

- Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} 2a + 6b \quad -1 = 0 \\ 6a + 5b \qquad = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{5}{26} \\ \\ b = \dfrac{3}{13} \end{cases}$$

Problema 371 Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 2kx^2 + 2x - 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2 - k^2x - 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

1. Calcular k para que $f(x)$ sea continua R.
2. Comprobar si la función es derivable para ese valor de k que hemos calculado anteriormente.

Solución:

1. Para que $f(x)$ sea continua en $x < 1$:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1} (2kx^2 + 2x - 1) = 2k + 1$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1} (x^2 - k^2x - 1) = -k^2$$

$$2k + 1 = -k^2 \Longrightarrow k^2 + 2k + 1 = 0 \Longrightarrow k = 1$$

2. La función sería

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 2x - 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2 - x - 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Para que la función sea derivable debe ser $f'(1^-) = f'(1^+)$:

$$\begin{cases} f'(1^-) = 3 \\ f'(1^+) = 1 \end{cases} \Longrightarrow \text{no es derivable en } x = 1$$

Problema 372 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2ax^2 - bx - 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ ax^3 - 3x + b & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Calcular a y b de manera que $f(x)$ cumpla las condiciones del teorema del valor medio.

Solución:

- Para que $f(x)$ sea continua:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1} (2ax^2 - bx - 1) = a - 3 + b$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1} (ax^3 - 3x + b) = 2a - b - 1$$

  Luego $-a + 2b - 2 = 0$

- Para que $f(x)$ sea derivable:

$$f'(x) = \begin{cases} 4ax - b & \text{si} \quad x < 1 \\ 3ax^2 - 3 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 4a - b, \quad f'(1^+) = 3a - 3 \Longrightarrow a - b + 3 = 0$$

Como $f(x)$ tiene que ser continua y derivable:

$$\begin{cases} -a + 2b - 2 = 0 \\ a - b + 3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = -1 \end{cases}$$

Problema 373 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - ax + b & \text{si} \quad x < 1 \\ ax^2 - bx + 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Calcular a y b de manera que $f(x)$ cumpla las condiciones del teorema del valor medio.

Solución:

- Para que $f(x)$ sea continua:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} (2x^2 - ax + b) = 2 - a + b$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} (ax^2 - bx + 1) = a - b + 1$$

  Luego $2a - 2b - 1 = 0$

- Para que $f(x)$ sea derivable:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x - a & \text{si} \quad x < 1 \\ ax - b & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 4 - a, \quad f'(1^+) = 2a - b \Longrightarrow 3a - b - 4 = 0$$

Como $f(x)$ tiene que ser continua y derivable:

$$\begin{cases} 2a - 2b - 1 = 0 \\ 3a - b - 4 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{7}{4} \\ \\ b = \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

Problema 374 Calcular a y b para que la función siguiente sea continua y derivable.

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 - 2bx + 2 & \text{si} \quad x < 1 \\ bx^2 - 3x - a & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Solución:

Por continuidad:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} = a - 2b + 2, \qquad \lim_{x \longrightarrow 1^+} = -a + b - 3$$

$$a - 2b + 2 = -a + b - 3 \Longrightarrow 2a - 3b + 5 = 0$$

Por derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} 3ax^2 - 2b & \text{si} \quad x < 1 \\ 2bx - 3 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(1^-) = 3a - 2 \\ f'(1^+) = 2b - 3 \end{cases}$$

$$3a-2=2b-3 \Longrightarrow 3a-4b+3=0$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2a-3b+5=0 \\ 3a-4b+3=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=9 \\ b=11 \end{array}\right.$$

Problema 375 Estudiar la continuidad y la derivabilidad de la función siguiente

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ccc} e^x-3x^2 & \text{si} & x\le 0 \\ 2x^2+\ln(1+x)+1 & \text{si} & x>0 \end{array}\right.$$

Solución:

Continuidad:

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} = \lim_{x\longrightarrow 0^+} = f(0)=1 \Longrightarrow \text{continua en}\, x=0$$

Derivabilidad:

$$f'(x)=\left\{\begin{array}{ccc} e^x-6x & \text{si} & x\le 0 \\ 4x+\frac{1}{1+x} & \text{si} & x>0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(0^-)=1 \\ f'(0^+)=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \text{derivable}$$

Problema 376 Estudiar la continuidad de las funciones siguientes:

1.

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ccc} 6x^2+\frac{1}{x+1}-e^x & \text{si} & x<0 \\ 2x^2+x & \text{si} & x>0 \end{array}\right.$$

2.

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ccc} 5x^2+\sin 2x & \text{si} & x\le 0 \\ x^2+\cos 2x & \text{si} & x>0 \end{array}\right.$$

Solución:

1.

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = 0 \neq f(0) \text{ no definida} \Longrightarrow \text{discontinua evitable}\, x=0$$

2.

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = 0 \neq \lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = 1 \Longrightarrow \text{discontinua inevitable}\, x=0$$

Problema 377 Dada la función real de variable real

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ccc} 3x-1 & \text{si} & x<1 \\ \dfrac{4x-2}{x} & \text{si} & x\ge 1 \end{array}\right.$$

estudiar su continuidad y derivabilidad en el punto de abcisa $x = 1$.

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{4x-2}{x} = 2 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1} (3x-1) = 2 \\ \\ f(1) = 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ continua en } x = 1$$

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{lll} 3 & \text{si} & x < 1 \\ \dfrac{2}{x^2} & \text{si} & x \geq 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(1^-) = 3 \\ f'(1^+) = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow f \text{ no derivable en } x = 1$$

Problema 378 Dada la función real de variable real

$$f(x) = |3x - 2|$$

estudiar su continuidad y derivabilidad en R.

Solución:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} -3x+2 & \text{si} & 3x-2 < 0 \\ 3x-2 & \text{si} & 3x-2 \geq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow f(x) = \left\{\begin{array}{lll} -3x+2 & \text{si} & x < 2/3 \\ 3x-2 & \text{si} & x \geq 2/3 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow (2/3)^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2/3} (3x-2) = 0 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow (2/3)^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2/3} (-3x+2) = 0 \\ \\ f(2/3) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ continua en } x = \frac{2}{3}$$

Como las dos ramas son polinomios de grado uno, concluimos con que la función es continua en R.

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{lll} -3 & \text{si} & x < 2/3 \\ 3 & \text{si} & x \geq 2/3 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} f'\left(\left(\frac{2}{3}\right)^-\right) = -3 \\ \\ f'\left(\left(\frac{2}{3}\right)^+\right) = 3 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ no derivable en } x = \frac{2}{3}$$

Por tanto, la función es derivable en $R - \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$.

Problema 379 Calcular a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} 3ax^2 - bx + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2 + ax + b & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

sea continua y derivable.

Solución:

Para que sea continua:

$$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} (x^2 + ax + b) = a + b + 1 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} (3ax^2 - bx + 1) = 3a - b + 1 \end{cases}\right\} \Longrightarrow$$

$$a + b + 1 = 3a - b + 1 \Longrightarrow a - b = 0$$

Para que sea derivable:

$$f'(x) = \begin{cases} 6ax - b & \text{si} \quad x < 1 \\ 2x + a & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \Longrightarrow \left.\begin{cases} f'(1^-) = 6a - b \\ f'(1^+) = 2 + a \end{cases}\right\} \Longrightarrow$$

$$6a - b = 2 + a \Longrightarrow 5a - b = 2$$

Luego:

$$\begin{cases} a - b = 0 \\ 5a - b = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ \\ b = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Problema 380 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x + 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ (x-1)^2 & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ \\ x^2 + 3x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

en los puntos $x = 0$ y $x = 1$.

Solución:

En $x = 0$ hay una discontinuidad evitable(agujero), y en $x = 1$ es discontinua no evitable(salto).

Problema 381 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{si} \quad x < 2 \\ \\ (x-2)^2 & \text{si} \quad 2 < x < 3 \\ \\ 2x-5 & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

en los puntos $x = 2$ y $x = 3$.

Solución:

En $x = 2$ hay una discontinuidad evitable(agujero), y en $x = 3$ es continua.

Problema 382 Dada la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} 3x-6 & \text{si} \quad x < 2 \\ \dfrac{4-2x}{x} & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

estudiar su continuidad y derivabilidad en el punto de abcisa $x = 2$.

Solución:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2} \dfrac{4-2x}{x} = 0 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2} (3x-6) = 0 \\ \\ f(2) = 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow f \text{ continua en } x = 2$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad x < 2 \\ \dfrac{-4}{x^2} & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(2^-) = 3 \\ f'(2^+) = -1 \end{cases} \Longrightarrow f \text{ no derivable en } x = 2$$

Problema 383 Dada la función real de variable real

$$f(x) = |2x-3|$$

estudiar su continuidad y derivabilidad en R.

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} -2x+3 & \text{si} \quad 2x-3 < 0 \\ 2x-3 & \text{si} \quad 2x-3 \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow f(x) = \begin{cases} -2x+3 & \text{si} \quad x < 3/2 \\ 2x-3 & \text{si} \quad x \geq 3/2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow (3/2)^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 3/2}(2x-3) = 0 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow (3/2)^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 3/2}(-2x+3) = 0 \\ \\ f(3/2) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ continua en } x = \frac{3}{2}$$

Como las dos ramas son polinomios de grado uno, concluimos con que la función es continua en R.

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{rcl} -2 & \text{si} & x < 3/2 \\ 2 & \text{si} & x \geq 3/2 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} f'\left(\left(\frac{3}{2}\right)^-\right) = -2 \\ \\ f'\left(\left(\frac{3}{2}\right)^+\right) = 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ no derivable en } x = \frac{3}{2}$$

Por tanto, la función es derivable en $R - \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Problema 384 Calcular a y b para que la función

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{ax^2 - bx}{x-2} & \text{si} & x < 1 \\ \\ 2x^2 + 3bx - a & \text{si} & x \geq 1 \end{array}\right.$$

sea continua y derivable.

Solución:

Para que sea continua:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1}(2x^2 + 3bx - a) = -a + 3b + 2 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{ax^2 - bx}{x-2} = -a + b \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$-a + 3b + 2 = -a + b \Longrightarrow b = -1$$

Para que sea derivable:

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{ax^2 - 4ax + 2b}{(x-2)^2} & \text{si} & x < 1 \\ \\ 4x + 3b & \text{si} & x \geq 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(1^-) = -3a + 2b \\ f'(1^+) = 4 + 3b \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$-3a+2b=4+3b \Longrightarrow 3a+b=-4$$

Luego:

$$\left\{\begin{array}{c} b=-1 \\ 3a+b=-4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-1 \\ \\ b=-1 \end{array}\right.$$

Problema 385 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ccc} (x+1)^2 & \text{si} & x<-1 \\ & & \\ \dfrac{x+1}{2} & \text{si} & -1\le x\le 2 \\ & & \\ x^2+x+2 & \text{si} & x>2 \end{array}\right.$$

en los puntos $x=-1$ y $x=2$.

Solución:

En $x=-1$ hay continuidad, y en $x=2$ es discontinua no evitable(salto).

Problema 386 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ccc} 2x-3 & \text{si} & x<1 \\ & & \\ 2x & \text{si} & 1<x\le 2 \\ & & \\ 3x-2 & \text{si} & x>2 \end{array}\right.$$

en los puntos $x=1$ y $x=2$.

Solución:

En $x=1$ hay una discontinuidad no evitable(salto), y en $x=2$ es continua.

Problema 387 Dada la función

$$f(x)=\left\{\begin{array}{lll} \frac{ax^2-bx+a}{x} & \text{si} & x\le -1 \\ bx^2-ax-1 & \text{si} & x>-1 \end{array}\right.$$

calcular a y b de manera sea continua y derivable.

Solución:

Para que sea continua:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -1} \dfrac{ax^2-bx+a}{x} = -2a-b \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -1}(bx^2-ax-1) = a+b-1 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$-2a-b = a+b-1 \Longrightarrow 3a+2b=1$$

Para que sea derivable:

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{lll} \frac{ax^2-a}{x^2} & \text{si} & x<-1 \\ 2bx-a & \text{si} & x\geq -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(-1^-)=0 \\ f'(-1^+)=-2b-a \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$0=-2b-a \Longrightarrow a+2b=0$$

Luego:

$$\left\{\begin{array}{l} 3a+2b=1 \\ a+2b=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=\dfrac{1}{2} \\ \\ b=-\dfrac{1}{4} \end{array}\right.$$

Problema 388 Estudiar la continuidad y la derivabilidad de las siguientes funciones:

1. $f(x) = |x-5|$
2. $$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} 2x^2+x-1 & \text{si} & x\leq 0 \\ -(2x+1) & \text{si} & x>0 \end{array}\right.$$

Solución:

1. $$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} -x+5 & \text{si} & x-5<0 \\ x-5 & \text{si} & x+5\geq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow f(x) = \left\{\begin{array}{lll} -x+5 & \text{si} & x<5 \\ x-5 & \text{si} & x\geq 5 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 5^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 5}(-x+5) = 0 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 5^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 5}(x-5) = 0 \\ \\ f(5)=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ continua en } x=5$$

Como las dos ramas son polinomios de grado uno, concluimos con que la función es continua en R.

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{lll} -1 & \text{si} & x<5 \\ 1 & \text{si} & x\geq 5 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} f'\left((5)^-\right) = -1 \\ \\ f'\left((5)^+\right) = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ no derivable en } x = 5$$

Por tanto, la función es derivable en $R - \{5\}$.

2.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x - 1 & \text{si} \quad x \le 0 \\ -(2x+1) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} (2x^2 + x - 1) = -1 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} (-(2x+1)) = -1 \\ \\ f(0) = -1 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ continua en } x = 0$$

Como las dos ramas son polinomios, concluimos con que la función es continua en R.

$$f'(x) = \begin{cases} 4x + 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ -2 & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = 1 \\ \\ f'(0^+) = -2 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ no derivable en } x = 0$$

Por tanto, la función es derivable en $R - \{0\}$.

Problema 389 Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

1.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x+7}}{x} & \text{si} & x < 1 \\ 3x & \text{si} & 1 < x \le 2 \\ x^2 + 2 & \text{si} & x > 2 \end{cases}$$

en los puntos $x = 1$ y $x = 2$

2.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2}{x} & \text{si} & x \le 1 \\ x^2 + 2 & \text{si} & 1 < x < 5 \\ 2x & \text{si} & x \ge 5 \end{cases}$$

en los puntos $x = 1$ y $x = 5$

Solución:

1. En $x = 1$ hay una discontinuidad evitable, un agujero. En $x = 2$ la función es continua.

2. En $x = 2$ la función es continua. En $x = 5$ hay una discontinuidad no evitable, un salto.

Problema 390 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 2x^2+1 & \text{si} & x < 0 \\ (3x-1)^2 & \text{si} & 0 < x \leq 1 \\ 3x+1 & \text{si} & 1 < x \leq 2 \\ 2x^3-1 & \text{si} & 2 < x \end{array} \right.$$

en los puntos $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.

Solución:

En $x = 0$ es discontinua evitable(agujero), en $x = 1$ hay continuidad, y en $x = 2$ es discontinua no evitable(salto).

Problema 391 Calcular el valor de k para que la función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 3kx^3 - kx + 1 & \text{si} & x < 2 \\ (k+1)x^2 - 2x + k & \text{si} & x \geq 2 \end{array} \right.$$

sea continua.

Solución:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 2}((k+1)x^2 - 2x + k) = 5k \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 2}(3kx^3 - kx + 1) = 22k + 1 \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$5k = 22k + 1 \Longrightarrow k = -1/17$$

Problema 392 Dada la función real de variable real

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 3x^3 - 2x^2 + x - 1 & \text{si} & x < 1 \\ 5x^2 - 6x + 2 & \text{si} & x \geq 1 \end{array} \right.$$

estudiar su continuidad y derivabilidad en el punto de abcisa $x = 1$.

Solución:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1}(5x^2 - 6x + 2) = 1 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1}(3x^3 - 2x^2 + x - 1) = 1 \\ \\ f(1) = 1 \end{array} \right\} \Longrightarrow f \text{ continua en } x = 1$$

$$f'(x) = \begin{cases} 10x - 6 & \text{si} \quad x < 1 \\ 9x^2 - 4x + 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(1^-) = 4 \\ f'(1^+) = 6 \end{cases} \Longrightarrow f \text{ no derivable en } x = 1$$

Problema 393 Calcular a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} 2ax^3 - bx^2 + 5a & \text{si} \quad x < 1 \\ 4bx^2 - ax + b + 2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

sea continua y derivable.

Solución:

Para que sea continua:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} (2ax^3 - bx^2 + 5a) = 7a - b \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} (4bx^2 - ax + b + 2) = -a + 5b + 2 \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$7a - b = -a + 5b + 2 \Longrightarrow 4a - 3b - 1 = 0$$

Para que sea derivable:

$$f'(x) = \begin{cases} 6ax^2 - 2bx & \text{si} \quad x < 1 \\ 8bx - a & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'(1^-) = 6a - 2b \\ f'(1^+) = 8b - a \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$6a - 2b = 8b - a \Longrightarrow 7a - 10b = 0$$

Luego:

$$\begin{cases} 4a - 3b - 1 = 0 \\ 7a - 10b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 10/19 \\ b = 7/19 \end{cases}$$

Problema 394 Calcular a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} 3ax^3 - 2bx^2 + 3 & \text{si} \quad x < 1 \\ ax^2 + bx - 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

sea continua y derivable.

Solución:

Para que sea continua:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} (3ax^3 - 2bx^2 + 3) = 3a - 2b + 3 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} (ax^2 + bx - 1) = a + b - 1 \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$a+b-1=3a-2b+3 \Longrightarrow 2a-3b+4=0$$

Para que sea derivable:

$$f'(x)=\left\{\begin{array}{lll} 9ax^2-4b & \text{si} & x<1 \\ 2ax+b & \text{si} & x\geq 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(1^-)=9a-4b \\ f'(1^+)=2a+b \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$9a-4b=2a+b \Longrightarrow 7a-5b=0$$

Luego:

$$\left\{\begin{array}{l} 2a-3b+4=0 \\ 7a-5b=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=20/11 \\ b=28/11 \end{array}\right.$$

Problema 395 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x)=\left\{\begin{array}{lll} x^2-1 & \text{si} & x<0 \\ 2x-1 & \text{si} & 0\leq x<1 \\ x^3 & \text{si} & 1<x\leq 2 \\ x^2+2 & \text{si} & 2<x \end{array}\right.$$

en los puntos $x=0$, $x=1$ y $x=2$.

Solución:

En $x=0$ es continua, en $x=1$ hay una discontinua evitable(agujero) y en $x=2$ es discontinua no evitable (salto).

Problema 396 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x)=\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{x^2}{x-1} & \text{si} & x<2 \\ \\ \dfrac{2x}{x-1} & \text{si} & x\geq 2 \end{array}\right.$$

en toda la recta real.

Solución:

En $x=2$ es continua, en $x=1$ hay una discontinua no evitable(salto).

Problema 397 Calcular el valor de k para que la función

$$f(x)=\left\{\begin{array}{lll} kx^2-\sin(x-1)+k+1 & \text{si} & x<1 \\ x^3+kx^2-lnx+2 & \text{si} & x\geq 1 \end{array}\right.$$

sea continua.

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+}(x^3 + kx^2 - lnx + 2) = k + 3 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-}(kx^2 - \sin(x-1) + k + 1) = 2k + 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$2k + 1 = k + 3 \Longrightarrow k = 2$$

Problema 398 Calcular a y b para que la función

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lcl} ax^2 - 2bx + 3 & \text{si} & x < 1 \\ x^2 + 2ax - b & \text{si} & x \geq 1 \end{array}\right.$$

sea continua y derivable.

Solución:

Para que sea continua:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+}(x^2 + 2ax - b) = 2a - b + 1 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-}(ax^2 - 2bx + 3) = a - 2b + 3 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$a - 2b + 3 = 2a - b + 1 \Longrightarrow a + b = 2$$

Para que sea derivable:

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{lcl} 2ax - 2b & \text{si} & x < 1 \\ 2x + 2a & \text{si} & x \geq 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(1^-) = 2a - 2b \\ f'(1^+) = 2 + 2a \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$2a - 2b = 2 + 2a \Longrightarrow b = -1$$

Luego:

$$\left\{\begin{array}{l} a + b = 2 \\ b = -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 3 \\ b = -1 \end{array}\right.$$

Problema 399 Estudiar la continuidad y la derivabilidad de la siguiente función, esbozando su representación gráfica:

$$f(x) = |x^2 + 3x - 10|$$

Solución:

1. Se trata de una función por ramas

$$f(x) = \begin{cases} -(x^2+3x-10) & \text{si} \quad x^2+3x-10<0 \\ x^2+3x-10 & \text{si} \quad x^2+3x-10 \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2+3x-10 & \text{si} \quad x \leq -5 \\ -(x^2+3x-10) & \text{si} \quad -5 < x \leq 2 \\ x^2+3x-10 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

2. Habrá que estudiar la continuidad de f en $x=-5$ y en $x=2$. En el resto de puntos de R es continua:

   - en $x=-5$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow -5^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -5^-}(x^2+3x-10) = 0 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -5^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -5^+}[-(x^2+3x-10)] = 0 \\ \\ f(-5)=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ continua en } x=-5$$

   - en $x=2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+}(x^2+3x-10) = 0 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-}[-(x^2+3x-10)] = 0 \\ \\ f(2)=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ continua en } x=2$$

   - En conclusión la función es continua en toda la recta real.

3. Habrá que estudiar la derivabilidad de f en $x=-5$ y en $x=2$. En el resto de puntos de R es derivable:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si} \quad x \leq -5 \\ -2x+3 & \text{si} \quad -5 < x \leq 2 \\ 2x+3 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

   - en $x=-5$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-5^-) = -7 \\ f'(-5^+) = 7 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ no derivable en } x=-5$$

   - en $x=2$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = -7 \\ f'(2^+) = 7 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ no derivable en } x=2$$

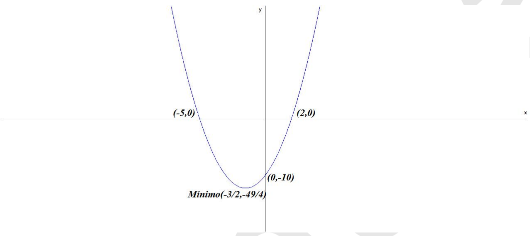
- En conclusión la función es derivable en todos los puntos de R distintos de $x = 2$ y $x = -5$ donde no lo es.

4. Representación:

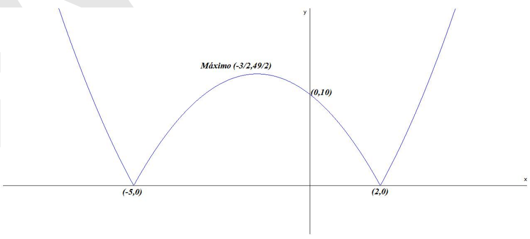
- Analizamos la función $f(x) = x^2 + 3x - 10$
  - Puntos de corte: $(0, -10)$, $(2, 0)$, $(-5, 0)$
  - Monotonía: $f'(x) = 2x + 3 = 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$

	$(-\infty, -3/2)$	$(-3/2, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Decrece	Crece

  - Curvatura: $f''(x) = 2 > 0$ siempre, luego la curva es cóncava.



- La función $f(x) = |x^2 + 3x - 10|$ será igual que la anterior pasando todo lo que está por debajo del eje de abcisas a su correspondiente simétrico por encima del eje, es decir:
  - Puntos de corte: $(0, 10)$, $(2, 0)$, $(-5, 0)$
  - Extremos: La función tiene un máximo en el punto $(-3/2, 49/4)$



Problema 400 Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2bx + 1 & \text{si} \quad x < 2 \\ 2ax^2 + bx + 2 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Hallar a y b de manera que f cumpla las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0,3]$. Encontrar aquellos puntos que el teorema asegura su existencia.

Solución:

1. f es continua en ambas ramas, para cualquier valor de a y b, hay que calcular a y b para afirmar la continuidad en $x=2$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1}(ax^2-2bx+1) = 4a-4b+1 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1}(2ax^2+bx+2) = 8a+2b+2 \end{array}\right. \Longrightarrow 4a+6b=-1$$

2. f es derivable en ambas ramas, para cualquier valor de a y b, hay que calcular a y b para afirmar la derivabilidad en $x=2$

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{lll} 2ax-2b & \text{si} & x<2 \\ \\ 4ax+b & \text{si} & x\geq 2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} f'(2^-) = 4a-2b \\ f'(2^+) = 8a+b \end{array}\right. \Longrightarrow 4a+3b=0$$

3. $$\left\{\begin{array}{l} 4a+6b=-1 \\ 4a+3b=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=1/4 \\ b=-1/3 \end{array}\right.$$

4. Tenemos:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} \frac{1}{4}x^2+\frac{2}{3}x+1 & \text{si} & x<2 \\ \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x+2 & \text{si} & x\geq 2 \end{array}\right.$$

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{lll} \frac{1}{2}x+\frac{2}{3} & \text{si} & x<2 \\ x-\frac{1}{3} & \text{si} & x\geq 2 \end{array}\right.$$

Esta función cumple las condiciones del Teorema del Valor Medio, es decir, es continua en el intervalo $[0,3]$ y derivable en el $(0,3)$. El Teorema afirma que existe al menos un punto $c\in(0,3)$ que cumple $f'(c) = \dfrac{f(3)-f(0)}{3-0} = \dfrac{9/2}{3} = \dfrac{3}{2}$.

Si cogemos la primera rama $c<2$:

$$f'(c) = 1/2c+2/3 = 3/2 \Longrightarrow c=5/3 \text{ si vale}$$

Si cogemos la segunda rama $c\geq 2$:

$$f'(c) = c-1/3 = 3/2 \Longrightarrow c=11/6 \text{ no vale}$$

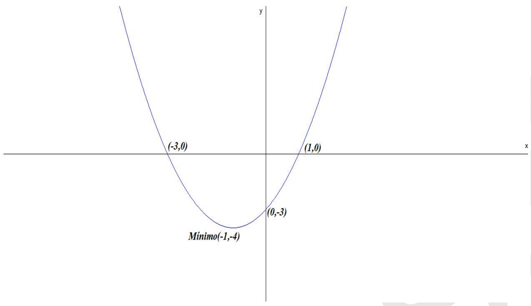
El punto $c\in(0,3)$ al que hace referencia el teorema es $c=5/3$.

Problema 401 Dada la función $f(x) = |x^2 + 2x - 3|$ se pide:

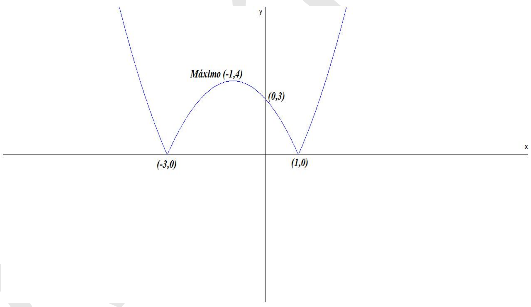
1. Representación gráfica de forma aproximada y su forma como una función definida por ramas
2. Estudiar su continuidad y derivabilidad a la vista del estudio anterior.

Solución:

1. LLamamos $g(x) = x^2 + 2x - 3$ y la representamos gráficamente:



La función $f(x) = |x^2 + 2x - 3|$ no puede tener recorrido por debajo del eje de abcisas. Esta función sería:



Luego:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{si} \quad x < -3 \\ -x^2 - 2x + 3 & \text{si} \quad -3 \le x < 1 \\ x^2 + 2x - 3 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

2. Claramente y a la vista de la gráfica la función es continua en todo R pero no sería derivable en los puntos $x = -3$ y $x = 1$ donde presenta picos. En esos picos podríamos trazar infinitas tangentes a la gráfica de f.

Problema 402 Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 2ax^2 - bx + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 3ax^2 + 2bx + 2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Hallar a y b de manera que f cumpla las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$. Encontrar aquellos puntos que el teorema asegura su existencia.

Solución:

1. f es continua en ambas ramas, para cualquier valor de a y b, hay que calcular a y b para afirmar la continuidad en $x = 1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1}(2ax^2 - bx + 1) = 2a - b + 1 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1}(3ax^2 + 2bx + 2) = 3a + 2b + 2 \end{cases} \Longrightarrow a+3b = -1$$

2. f es derivable en ambas ramas, para cualquier valor de a y b, hay que calcular a y b para afirmar la derivabilidad en $x = 1$

$$f'(x) = \begin{cases} 4ax - b & \text{si} \quad x < 1 \\ \\ 6ax + 2b & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(1^-) = 4a - b \\ f'(1^+) = 6a + 2b \end{cases} \Longrightarrow 2a + 3b = 0$$

3.

$$\begin{cases} a + 3b = -1 \\ 2a + 3b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2/3 \end{cases}$$

4. Tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + \frac{2}{3}x + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 3x^2 - \frac{4}{3}x + 2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 4x + \frac{2}{3} & \text{si} \quad x < 1 \\ 6x - \frac{4}{3} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Esta función cumple las condiciones del Teorema del Valor Medio, es decir, es continua en el intervalo $[0, 2]$ y derivable en el $(0, 2)$. El Teorema afirma que existe al menos un punto $c \in (0, 2)$ que cumple $f'(c) = \dfrac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \dfrac{31/3}{2} = \dfrac{31}{6}$.

Si cogemos la primera rama $c < 1$:

$$f'(c) = 4c + 2/3 = 31/6 \Longrightarrow c = 9/8 \text{ no vale}$$

Si cogemos la segunda rama $c \geq 1$:

$$f'(c) = 6c - 4/3 = 31/6 \Longrightarrow c = 13/12 \text{ si vale}$$

El punto $c \in (0, 2)$ al que hace referencia el teorema es $c = 13/12$.

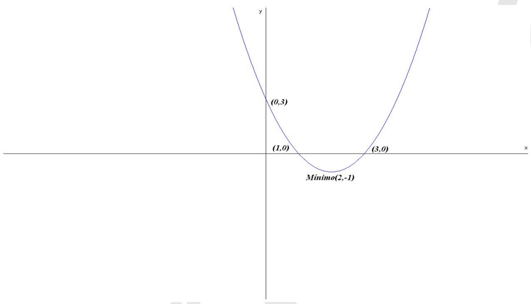
Problema 403 Dada la función $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$ se pide:

1. Representación gráfica de forma aproximada y su forma como una función definida por ramas

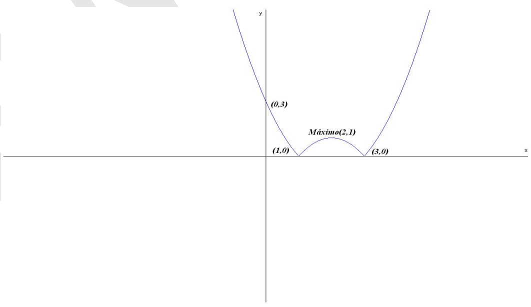
2. Estudiar su continuidad y derivabilidad a la vista del estudio anterior.

Solución:

1. LLamamos $g(x) = x^2 - 4x + 3$ y la representamos gráficamente:



La función $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$ no puede tener recorrido por debajo del eje de abcisas. Esta función sería:



Luego:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si} \quad x < 1 \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{si} \quad 1 \leq x < 3 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

2. Claramente y a la vista de la gráfica la función es continua en todo R pero no sería derivable en los puntos $x = 1$ y $x = 3$ donde presenta picos. En esos picos podríamos trazar infinitas tangentes a la gráfica de f.

Problema 404 Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 3ax^2 - 2bx + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ bx^2 + 2ax - 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Hallar a y b de manera que f cumpla las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$. Encontrar aquellos puntos que el teorema asegura su existencia.

Solución:

1. f es continua en ambas ramas, para cualquier valor de a y b, hay que calcular a y b para afirmar la continuidad en $x = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} (3ax^2 - 2bx + 1) = 3a - 2b + 1 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} (bx^2 + 2ax - 1) = b + 2a - 1 \end{array} \right. \Longrightarrow a - 3b = -2$$

2. f es derivable en ambas ramas, para cualquier valor de a y b, hay que calcular a y b para afirmar la derivabilidad en $x = 1$

$$f'(x) = \begin{cases} 6ax - 2b & \text{si} \quad x < 1 \\ \\ 2bx + 2a & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(1^-) = 6a - 2b \\ f'(1^+) = 2a + 2b \end{cases} \Longrightarrow a - b = 0$$

3. $$\begin{cases} a - 3b = -2 \\ a - b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

4. Tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2 + 2x - 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 6x - 2 & \text{si} \quad x < 1 \\ 2x + 2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Esta función cumple las condiciones del Teorema del Valor Medio, es decir, es continua en el intervalo $[0, 2]$ y derivable en el $(0, 2)$. El Teorema afirma que existe al menos un punto $c \in (0, 2)$ que cumple

$f'(c) = \dfrac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \dfrac{7 - 1}{2} = 3.$

Si cogemos la primera rama $c < 1$:

$$f'(c) = 6c - 2 = 3 \Longrightarrow c = 5/6 \text{ si vale}$$

Si cogemos la segunda rama $c \geq 1$:

$$f'(c) = 2c + 2 = 3 \Longrightarrow c = 1/2 \text{ no vale}$$

El punto $c \in (0, 2)$ al que hace referencia el teorema es $c = 5/6$.

3.5. Integrales

Problema 405

Calcular las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx$
2. $\displaystyle\int \frac{3x^2}{2x^3-1}\,dx$
3. $\displaystyle\int e^x \sin e^x\,dx$
4. $\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$
6. $\displaystyle\int 2x^2 e^{x^3-1}\,dx$
7. $\displaystyle\int x2^{x^2+1}\,dx$
8. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x-1}\,dx$
9. $\displaystyle\int \frac{2x^2}{\cos^2(x^3)}\,dx$
10. $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-1}\,dx$

Solución:

1. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$
2. $\displaystyle\int \frac{3x^2}{2x^3-1}\,dx = \frac{\ln(2x^3-1)}{2} + C$
3. $\displaystyle\int e^x \sin e^x\,dx = -\cos e^x + C$
4. $\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \ln(1+x^2) + C$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$
6. $\displaystyle\int 2x^2 e^{x^3-1}\,dx = \frac{2e^{x^3-1}}{3} + C$

7. $\displaystyle\int x2^{x^2+1}\,dx = \frac{2^{x^2}}{\ln 2} + C$

8. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x-1}\,dx = \ln|x^2+x-1| + C$

9. $\displaystyle\int \frac{2x^2}{\cos^2(x^3)}\,dx = \frac{2\tan x^3}{3} + C$

10. $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{(x^2-1)^{3/2}}{3} + C$

Problema 406 Calcular las siguientes integrales

1. $\displaystyle\int \left(2x^3 - \frac{3}{\sqrt{4x-8}} + \frac{5}{x}\right)\,dx$

2. $\displaystyle\int x(6x^2+1)^{12}\,dx$

3. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x^2+3x-1)^5}\,dx$

4. $\displaystyle\int \frac{5x^2}{x^3+8}\,dx$

5. $\displaystyle\int (6x^2-1)e^{2x^3-x}\,dx$

6. $\displaystyle\int 5x^2\sin(3x^3+2)\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+(x^3+1)^2}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\cos^2(x^3+3)}\,dx$

Solución:

1. $\displaystyle\int \left(2x^3 - \frac{3}{\sqrt{4x-8}} + \frac{5}{x}\right)\,dx = \frac{x^4}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{4x-8} + 5\ln|x| + C$

2. $\displaystyle\int x(6x^2+1)^{12}\,dx = \frac{(6x^2+1)^{13}}{156} + C$

3. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x^2+3x-1)^5}\,dx = \frac{1}{4(x^2+3x-1)^4} + C$

4. $\displaystyle\int \frac{5x^2}{x^3+8}\,dx = \frac{5}{3}\ln|x^3+8| + C$

5. $\displaystyle\int (6x^2-1)e^{2x^3-x}\,dx = e^{2x^3-x}+C$

6. $\displaystyle\int 5x^2\sin(3x^3+2)\,dx = -\frac{5}{9}\cos(3x^3+2)+C$

7. $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+(x^3+1)^2}\,dx = \frac{1}{3}\arctan(x^3+1)+C$

8. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\cos^2(x^3+3)}\,dx = \frac{1}{3}\tan(x^3+3)+C$

Problema 407 Calcular las siguientes Integrales:

1. $\displaystyle\int \frac{x^2+\sqrt{x}-1}{x}\,dx$

2. $\displaystyle\int xe^{x^2-1}\,dx$

3. $\displaystyle\int \left(x^2-\frac{1}{x}\right)\,dx$

4. $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2(x^2-1)}\,dx$

5. $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{x^2+1}\,dx$

Solución:

1. $\displaystyle\int \frac{x^2+\sqrt{x}-1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}+\sqrt{x}-\ln x+C$

2. $\displaystyle\int xe^{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2-1}+C$

3. $\displaystyle\int \left(x^2-\frac{1}{x}\right)\,dx = \frac{x^3}{3}-\ln x+C$

4. $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2(x^2-1)}\,dx = \frac{1}{2}\tan(x^2-1)+C$

5. $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{x^2+1}\,dx = \frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\arctan x+C$

Problema 408 Calcular las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int x\,e^{5x^2-1}\,dx$

2. $\displaystyle\int x\,e^{x}\,dx$

3. $\displaystyle\int \frac{5x}{x^2+8}\,dx$

Solución:

1. $\displaystyle\int x\,e^{5x^2-1}\,dx = \frac{e^{5x^2-1}}{10} + C$

2. $\displaystyle\int x\,e^{x}\,dx = e^{x}(x-1) + C$

3. $\displaystyle\int \frac{5x}{x^2+8}\,dx = \frac{5}{2}\ln|x^2+8| + C$

Problema 409 Resuelve las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int \frac{x^3+2}{x^2-4x+3}\,dx$

2. $\displaystyle\int x\ln x\,dx$

3. $\displaystyle\int \frac{4x}{1+x^4}\,dx$

Solución:

1. $\displaystyle\int \frac{x^3+2}{x^2-4x+3}\,dx = \frac{x^2}{2} + 4x + \frac{29}{2}\ln|x-3| - \frac{3}{2}\ln|x-1| + C$

2. $\displaystyle\int x\ln x\,dx = \frac{x^2(2\ln|x|-1}{4} + C$

3. $\displaystyle\int \frac{4x}{1+x^4}\,dx = 2\arctan x^2 + C$

Problema 410 Calcular las integrales siguientes:

1. $\displaystyle\int xe^{7x^2-1}\,dx$

2. $\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^4}\,dx$

3. $\displaystyle\int x^4\ln x\,dx$

4. $\displaystyle\int \frac{x^3-\sqrt{x}+5x-1}{x^2}\,dx$

Solución:

1. $\displaystyle\int xe^{7x^2-1}\,dx = \frac{e^{7x^2-1}}{14} + C$

2. $\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^4}\,dx = \arctan(x^2) + C$

3. $\displaystyle\int x^4 \ln x\,dx = \frac{x^5(5\ln x - 1)}{25} + C$

4. $\displaystyle\int \frac{x^3 - \sqrt{x} + 5x - 1}{x^2}\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + 5\ln x + C$

Problema 411 Calcular las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int \left(\frac{3x^2 + \sqrt{x} - 2}{x^3}\right) dx$

2. $\displaystyle\int \left(x^3 + 3x + 5e^x\right) dx$

3. $\displaystyle\int \frac{x^2}{5x^3+1}\,dx$

4. $\displaystyle\int x\sin(3x^2+8)\,dx$

Solución:

1. $\displaystyle\int \left(\frac{3x^2 + \sqrt{x} - 2}{x^3}\right) dx = 3\ln|x| - \frac{2}{3x\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} + C$

2. $\displaystyle\int \left(x^3 + 3x + 5e^x\right) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + 5e^x + C$

3. $\displaystyle\int \frac{x^2}{5x^3+1}\,dx = \frac{1}{15}\ln|5x^3+1| + C$

4. $\displaystyle\int x\sin(3x^2+8)\,dx = -\frac{1}{6}\cos(3x^2+8) + C$

Problema 412 Resuelve las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int \left(\frac{x^2 + x - 1}{x^2}\right) dx$

2. $\displaystyle\int \left(5xe^{x^2+3}\right) dx$

3. $\displaystyle\int x\cos x\,dx$

4. $\displaystyle\int xe^x\,dx$

5. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+x-2}\,dx$

Solución:

1. $\int \left(\frac{x^2+x-1}{x^2}\right) dx = x + \ln|x| + \frac{1}{x} + C$

2. $\int \left(5xe^{x^2+3}\right) dx = \frac{5}{2}e^{x^2+3}$

3. $\int x\cos x\, dx = x\sin x + \cos x + C$

4. $\int xe^x\, dx = e^x(x-1) + C$

5. $\int \frac{x^3}{x^2+x-2}\, dx = \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{8}{3}\ln|x+2| + C$

Problema 413 Resuelve las siguientes integrales:

1. $\int \left(\frac{3x^2+2x-5}{x^2}\right) dx$

2. $\int \left(9xe^{3x^2-5}\right) dx$

3. $\int x\sin x\, dx$

4. $\int x^2e^x\, dx$

5. $\int \frac{2x^3+1}{x^2-3x+2}\, dx$

Solución:

1. $\int \left(\frac{3x^2+2x-5}{x^2}\right) dx = 3x + 2\ln|x| + \frac{5}{x} + C$

2. $\int \left(9xe^{3x^2-5}\right) dx = \frac{3}{2}e^{3x^2-5}$

3. $\int x\sin x\, dx = -x\cos x + \sin x + C$

4. $\int x^2e^x\, dx = e^x(x^2-2x+2) + C$

5. $\int \frac{2x^3+1}{x^2-3x+2}\, dx = x^2 + 6x - 3\ln|x-1| + 17\ln|x-2| + C$

Problema 414 Resuelve las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int \left(\frac{3x-2\sqrt{x}+1}{x^2}\right) dx$

2. $\displaystyle\int \frac{5x}{\cos^2(x^2-1)}\, dx$

3. $\displaystyle\int x^2 \ln x\, dx$

4. $\displaystyle\int x \sin 2x\, dx$

5. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2+x-2}\, dx$

Solución:

1. $\displaystyle\int \left(\frac{3x-2\sqrt{x}+1}{x^2}\right) dx = 3\ln|x| + \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} + C$

2. $\displaystyle\int \frac{5x}{\cos^2(x^2-1)}\, dx = \frac{5}{2}\tan(x^2-1) + C$

3. $\displaystyle\int x^2 \ln x\, dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C$

4. $\displaystyle\int x \sin 2x\, dx = -\frac{x\cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$

5. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2+x-2}\, dx = x + \frac{2\ln|x-1|}{3} - \frac{5\ln|x+2|}{3} + C$

Problema 415 Resuelve las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int \left(\frac{3x^2-2\sqrt{x}-1}{x}\right) dx$

2. $\displaystyle\int x\cos(7x^2+1)\, dx$

3. $\displaystyle\int (x^2+1)\ln x\, dx$

4. $\displaystyle\int x^2 e^x\, dx$

5. $\displaystyle\int \frac{x^3+3}{x^2-2x-3}\, dx$

Solución:

1. $\displaystyle\int \left(\frac{3x^2-2\sqrt{x}-1}{x}\right) dx = \frac{3x^2}{2} - 4\sqrt{x} - \ln|x| + C$

2. $\displaystyle\int x\cos(7x^2+1)\,dx = \frac{1}{14}\sin(7x^2+1)+C$

3. $\displaystyle\int (x^2+1)\ln x\,dx = \frac{(x^3+3x)\ln|x|}{3} - \frac{x^3+9x}{9} + C$

4. $\displaystyle\int x^2e^x\,dx = e^x(x^2-2x+2)+C$

5. $\displaystyle\int \frac{x^3+3}{x^2-2x-3}\,dx = \frac{x^2}{2}+2x-\frac{\ln|x+1|}{2}+\frac{15\ln|x-3|}{2}+C$

Problema 416 Resuelve las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int 5x\,e^{2x^2-1}\,dx$

2. $\displaystyle\int x\,e^x\,dx$

Solución:

1. $\displaystyle\int 5x\,e^{2x^2-1}\,dx = \frac{5}{2}e^{2x^2-1}+C$

2. $\displaystyle\int x\,e^x\,dx = e^x(x-1)+C$

3.6. Áreas

Problema 417 Calcular el área que encierran las gráficas de las funciones $f(x) = 2x^2 + x - 1$ y $g(x) = 3x + 3$.

Solución:

Primero buscamos los puntos de corte de ambas gráficas, bastará igualarlas:

$$2x^2 + x - 1 = 3x + 3 \Longrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 2, \;\; x = -1$$

El área que encierran estas gráficas estará comprendidad entre estos dos puntos y será $\int_{-1}^{2} |f(x) - g(x)|\, dx$. Calcularemos la diferencia entre las dos funciones, después su integral definida, y el valor absoluto de este valor será el área pedida

$$\int_{-1}^{2} (2x^2 - 2x - 4)\, dx = \left.\frac{2x^3}{3} - x^2 - 4x\right]_{-1}^{2} = -9$$

$$S = |-9| = 9\, u^2$$

Problema 418 Calcular el área que encierran la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{5x^2}{x^3 + 8}$$

el eje de abcisas, la recta $x = 0$ y la recta $x = 2$.

Solución:

Primero tendremos que comprobar si la función corta al eje de abcisas en el intervalo de integración $[0, 2]$, para ello hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$, luego la gráfica de la función está o por encima o por debajo del eje de abcisas en todo el intervalo, por tanto, el área será

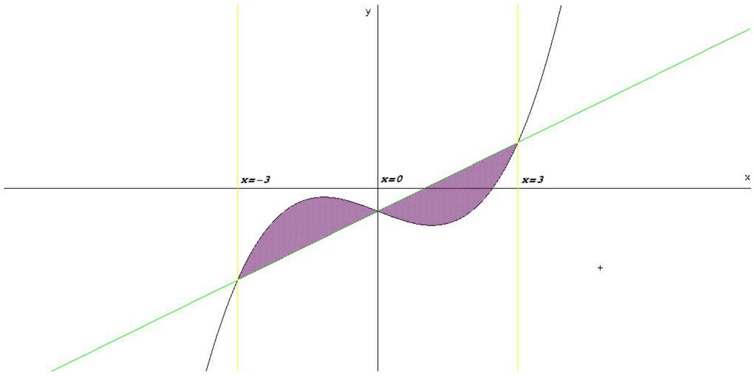
$$\int_0^2 \frac{5x^2}{x^3 + 8}\, dx = \left.\frac{5}{3} \ln |x^3 + 8|\right]_0^2 = \frac{5}{3} \ln 2$$

$$S = \left| \frac{5}{3} \ln 2 \right| = \frac{5}{3} \ln 2 \; u^2$$

Problema 419 Calcular el área encerrada por las curvas:

$$f(x) = x^3 - 4x - 5, \quad \text{y} \quad g(x) = 5x - 5$$

Solución:



$$f(x) = g(x) \Longrightarrow \ x^3 - 4x - 5 = 5x - 5 \Longrightarrow x = -3, \ x = 0, \ x = 3$$

$$F(x) = \int (f(x) - g(x))\, dx = \int (x^3 - 9x)\, dx = \frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F(0) = 0 \\ \\ F(3) = \dfrac{81}{4} - \dfrac{81}{2} = -\dfrac{81}{4} \\ \\ F(-3) = \dfrac{81}{4} - \dfrac{81}{2} = \dfrac{81}{4} \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} S_1 = F(0) - F(-3) = \dfrac{81}{4} \\ \\ S_2 = F(3) - F(0) = -\dfrac{81}{4} \end{array} \right.$$

$$\text{Área} = |S_1| + |S_2| = \frac{81}{2}\ u^2$$

Problema 420 Calcular el área encerrada por las gráficas de las funciones:

$$f(x) = x^2 + 3x - 1 \ \text{ y } \ g(x) = x + 2$$

Solución:

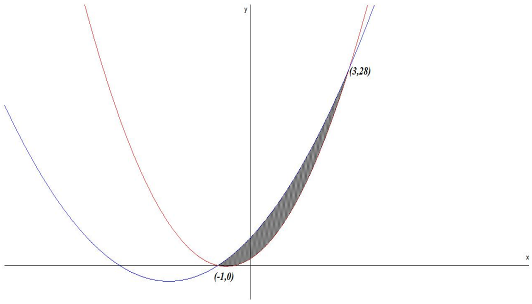
Calculamos los puntos de corte:

$$f(x) = g(x) \Longrightarrow x^2 + 3x - 1 = x + 2 \Longrightarrow x = -3, \ \ x = 1$$

$$\in_{-3}^{1} (x^2 + 2x - 3)\, dx = \left.\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x\right]_{-3}^{1} = -\frac{32}{3}$$

$$S = \left| -\frac{32}{3} \right| = \frac{32}{3}\, u^2$$

Problema 421 Hallar el área encerrada por las funciones $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ y $g(x) = x^2 + 5x + 4$.



Solución:

$$f(x) = g(x) \Longrightarrow 2x^2 + 3x + 1 = x^2 + 5x + 4 \Longrightarrow x = -1, \;\; x = 3$$

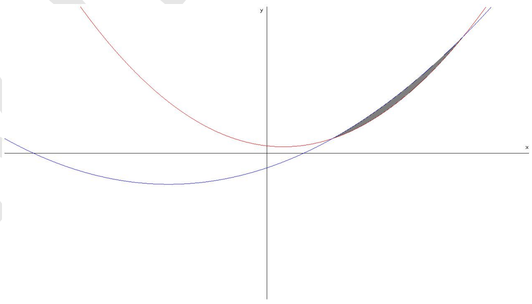
$$H(x) = \int (f(x) - g(x))\, dx = \int (x^2 - 2x - 3)\, dx = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$$

$$S = \int_{-1}^{3} (f(x) - g(x))\, dx = H(3) - H(-1) = -\frac{32}{3}$$

$$S = |S| = \frac{32}{3}\, u^2$$

Problema 422 Hallar el área encerrada por las funciones $f(x) = 2x^2 - x + 1$ y $g(x) = x^2 + 3x - 2$.

Solución:



$$f(x) = g(x) \Longrightarrow 2x^2 - x + 1 = x^2 + 3x - 2 \Longrightarrow x = 1, \;\; x = 3$$

$$H(x) = \int (f(x) - g(x))\, dx = \int (x^2 - 4x + 3)\, dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$$

$$S = \int_{1}^{3} (f(x) - g(x))\, dx = H(3) - H(1) = -\frac{4}{3}$$

$$S = |S| = \frac{4}{3}\, u^2$$

3.7. Optimización

Problema 423 Tenemos 500 metros de alambre para vallar un campo rectangular, uno de cuyos lados da a un río. Calcular la longitud que deben tener estos lados para que el área encerrada sea la máxima posible.

Solución:

$$2x + y = 500 \Longrightarrow y = 500 - 2x$$

$$S = x \cdot y = x(500 - 2x) = 500x - 2x^2$$

$$S' = 500 - 4x = 0 \Longrightarrow x = 125$$

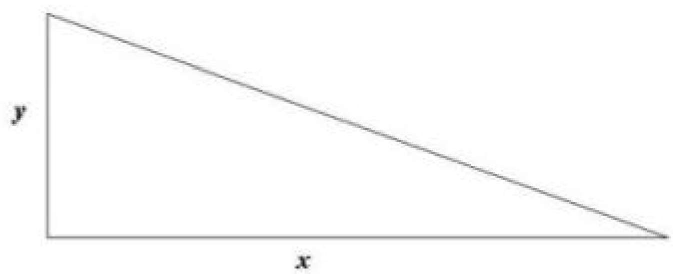
$$S'' = -4 \Longrightarrow \text{Máximo}$$

La solución sería $x = 125$ m. y $y = 250$ m.

Problema 424 Calcula el área máxima que puede tener un triángulo rectángulo tal que la suma de las longitudes de sus dos catetos vale $6\,cm$.

Solución:

Si los catetos valen x e y tendremos que el área del triángulo viene da-

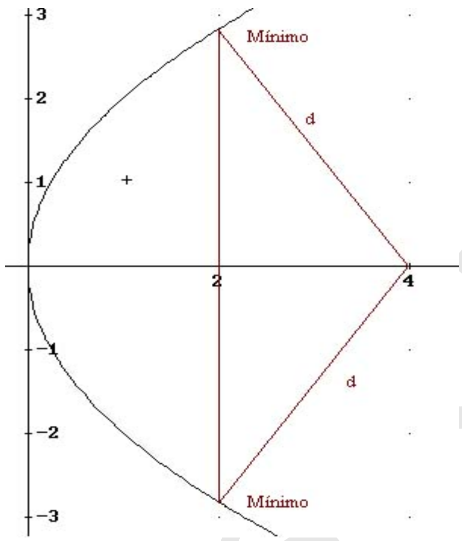


da por $S = \dfrac{x \cdot y}{2}$, pero sabemos que $x + y = 6 \Longrightarrow y = 6 - x$. Sustituyendo la segunda expresión en la primera tenemos que $S(x) = \dfrac{x(6-x)}{2} = \dfrac{6x - x^2}{2}$, función de la que tendremos que encontrar el mínimo. Para ello recurrimos a $S'(x) = 0$, y al criterio de la segunda derivada:

$S'(x) = 3 - x = 0 \Longrightarrow x = 3$

$S''(x) = -1 < 0$ luego en $x = 3$ tenemos un máximo y la solución pedida sería $x = 3$ e $y = 3$, con un área $S(3) = \dfrac{9}{2}\, u^2$

Problema 425 Determina los puntos de la curva $y^2 = 4x$ que estén a distancia mínima del punto $(4,0)$.
Solución:



Un punto genérico de la gráfica sería de la forma $(x, \sqrt{4x})$, y la distancia de este punto al $(4,0)$ será:

$$d = \sqrt{(x-4)^2 + (\sqrt{4x} - 0)^2} = \sqrt{x^2 + 4x + 16}$$

Tendremos que calcular los mínimos de esta función, y para ello calculamos la primera derivada.

$$d' = \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 16)^{-1/2}(2x - 4) = \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 + 4x + 16}} = 0 \Longrightarrow \ x = 2$$

Vamos a estudiar el signo de la derivada primera. Como el denominador es siempre positivo, basta estudiar el numerador:
Si $x < 2 \Longrightarrow \ d' < 0 \Longrightarrow$ decrece
Si $x > 2 \Longrightarrow \ d' > 0 \Longrightarrow$ crece
Con ésto concluimos con que en la abcisa $x = 2$ tenemos un mínimo, calculamos ahora las ordenadas correspondientes sustituyendo en la función $y^2 = 4x$, y obtenemos: $y = \pm\sqrt{4x} = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$.
Tenemos, por tanto, dos puntos que cumplen la condición de mínimo $(2, -2\sqrt{2})$ y $(2, 2\sqrt{2})$.

Problema 426 Expresar el número 60 como suma de tres "enteros positivos" de forma que el segundo sea el doble del primero y su producto sea máximo. Determinar el valor de dicho producto.

Solución:

Tenemos

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=60 \\ y=2x \end{array}\right. \Longrightarrow z=60-3x$$

El producto de los tres números es $P(x) = x \cdot y \cdot z = x \cdot 2x \cdot (60 - x) = -6x^3 + 120x^2$, y este producto tiene que ser máximo.

$$P'(x) = -18x^2 + 240x = 0 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ -18x+240=0 \Longrightarrow x=\frac{40}{3} \end{array}\right.$$

Ahora tenemos que decidir el valor que corresponde a un máximo, para ello recurrimos a la segunda derivada

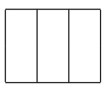
$$P''(x) = -36x + 240 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} P''(0) = 240 > 0 \\ P''\left(\frac{40}{3}\right) = -240 < 0 \end{array}\right.$$

Luego cuando $x = 0$ tenemos un mínimo, y cuando $x = \dfrac{40}{3}$ es un máximo. Pero el problema nos dice sean "enteros positivos". Esto quiere decir que tendremos que decidirnos entre los dos números más próximos a $\dfrac{40}{3}$ que sean enteros, tenemos $13 < \dfrac{40}{3} < 14$, si sustituimos estos valores en la función $P(x)$ tendremos

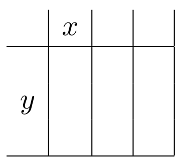
$$\left\{\begin{array}{l} P(13) = 120 \cdot 13^2 - 6 \cdot 13^3 = 7098 \\ P(14) = 120 \cdot 14^2 - 6 \cdot 14^3 = 7056 \end{array}\right.$$

Los tres números buscados son $x = 13$, $y = 26$ y $z = 60 - 3x = 21$. El valor del producto será $P(13) = 7098$.

Problema 427 Un solar rectangular de $11250\,m^2$ se divide en tres zonas rectangulares iguales (ver dibujo) para su venta. Se valla el borde del campo y la separación de las zonas. Calcula las dimensiones del solar para que la longitud de la valla utilizada sea mínima.



Solución:



La función que hay que minimizar será $L = 6x + 4y$. Y sabemos que

$$S = 3x \cdot y = 11250 \Longrightarrow y = \frac{11250}{3x} = \frac{3750}{x} \Longrightarrow L(x) = 6x + \frac{15000}{x}$$

Para obtener los máximos y los mínimos utilizamos la primera derivada $L(x) = 0$.

$$L'(x) = 6 - \frac{15000}{x^2} = 0 \Longrightarrow 6x^2 - 15000 = 0 \Longrightarrow x = 50,\ y = L(50) = 75$$

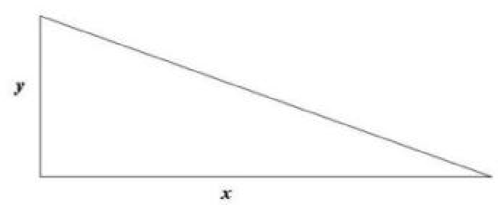
Por el criterio de la segunda derivada tenemos que

$$L''(x) = \frac{30000}{x^3} \Longrightarrow L''(50) = \frac{30000}{50^3} > 0$$

Luego $x = 50$ es un mínimo, y podemos concluir con que la parcela tiene que tener de dimensiones $3x = 150\,m$ e $y = 75\,m$ para utilizar la menor valla posible.

Problema 428 Calcula el área máxima que puede tener un triángulo rectángulo tal que la suma de las longitudes de sus dos catetos vale $4\,cm$.

Solución:
Si los catetos valen x e y tendremos que el área del triángulo viene dada

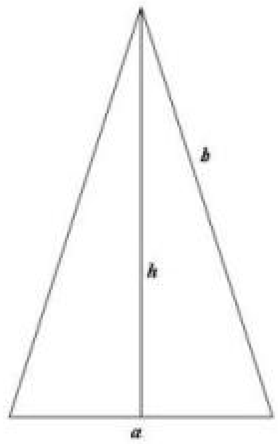


por $S = \frac{x \cdot y}{2}$, pero sabemos que $x + y = 4 \Longrightarrow y = 4 - x$. Sustituyendo la segunda expresión en la primera tenemos que $S(x) = \frac{x(4-x)}{2} = \frac{4x - x^2}{2}$, función de la que tendremos que encontrar el mínimo. Para ello recurrimos a $S'(x) = 0$, y al criterio de la segunda derivada:

$S'(x) = 2 - x = 0 \Longrightarrow x = 2$

$S''(x) = -1 < 0$ luego en $x = 2$ tenemos un máximo y la solución pedida sería $x = 2$ e $y = 2$, con un área $S(2) = 2\ u^2$

Problema 429 Halla la longitud de los lados del triángulo isósceles de área máxima cuyo perímetro sea $60\,m$.



Solución:
Sea a la longitud de la base de este triángulo isósceles y b la de los dos lados iguales, sea h la altura sobre a de este triángulo, que dividirá a dicha base en dos partes iguales, formando dos triángulos rectángulos con los lados b. Tendremos que el área viene dado por $S = \dfrac{a\cdot h}{2}$, pero por otra parte tenemos que $h = \sqrt{b^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2}$, que sustituyendo en la primera expresión, y teniendo en cuenta $a + 2b = 60 \Longrightarrow a = 60 - 2b$, quedaría

$$S = \frac{a\cdot\sqrt{b^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2}}{2} = \frac{(60-2b)\cdot\sqrt{b^2 - \left(\dfrac{60-2b}{2}\right)^2}}{2} =$$

$$(30-b)\cdot\sqrt{b^2-(30-b)^2} = (30-b)\cdot\sqrt{b^2-(900+b^2-60b)} \Longrightarrow$$

$$S(b) = (30-b)\cdot\sqrt{60b-900}$$

Derivamos e igualamos a cero esta derivada

$$S'(b) = -\sqrt{60b-900} + (30-b)\cdot\frac{60}{2\cdot\sqrt{60b-900}} =$$

$$-\sqrt{60b-900} + (30-b)\cdot\frac{30}{\sqrt{60b-900}} = \frac{-(\sqrt{60b-900})^2 + (30-b)\cdot 30}{\sqrt{60b-900}} =$$

$$\frac{-(60b-900)+(900-30b)}{\sqrt{60b-900}} = \frac{-60b+900+900-30b}{\sqrt{60b-900}} = \frac{1800-90b}{\sqrt{60b-900}}$$

$$S'(b) = \frac{1800-90b}{\sqrt{60b-900}} = 0 \Longrightarrow b = 20,\ \ a = 20$$

Para comprobar si se trata de un máximo recurrimos a la segunda derivada y calculamos $S''(20)$

$$S''(b)=\frac{-90\cdot\sqrt{60b-900}-(1800-90b)\cdot\dfrac{60}{2\cdot\sqrt{60b-900}}}{(\sqrt{60b-900})^2}=$$

$$\frac{-90(60b-900)-30(1800-90b)}{(60b-900)^{3/2}}=\frac{5400b+81000-54000+2700b)}{(60b-900)^{3/2}}\Longrightarrow$$

$$S''(b)=\frac{2700(1-10b)}{(60b-900)^{3/2}}\Longrightarrow S''(20)=-3\sqrt{3}<0$$

Luego es un máximo.

Problema 430 Un número más el cuadrado de otro número suman 48. Hallar ambos números para que su producto sea máximo.

Solución:

Sean los números x e y tenemos que $P=x\cdot y$, y sabemos que $x+y^2=48\Longrightarrow x=48-y^2$, sustituyendo en la primera función tenemos que $P(y)=y(48-y^2)=48y-y^3$. Para calcular el máximo calculamos la primera derivada e igualamos a cero, $P'(y)=0$.

$P'(y)=48-3y^2=0\Longrightarrow y^2=16\Longrightarrow y=4,\ y=-4$ con ambas tenemos que $x=32$. Comprobamos si es máximo o mínimo con la segunda derivada.

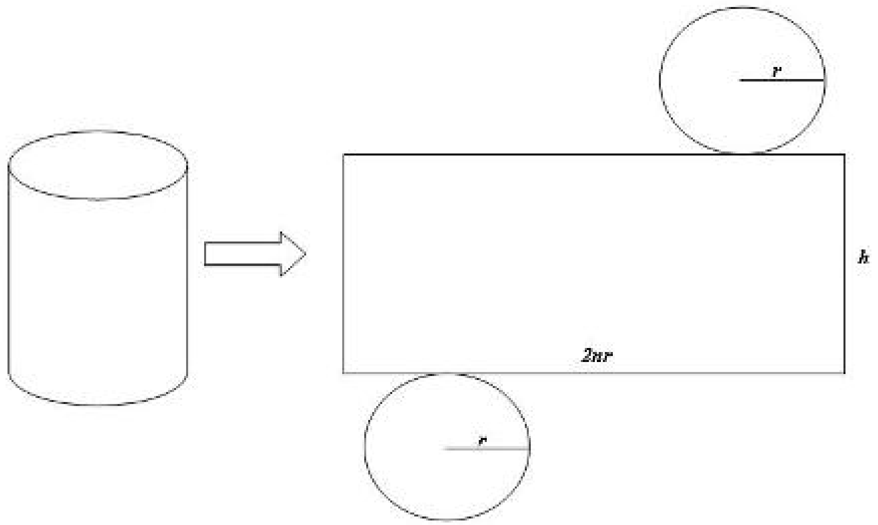
$P''(x)=-6y\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}P''(-4)=24\\P''(4)=-24\end{array}\right.\Longrightarrow$ cuando $y=-4$ tenemos un mínimo, mientras que cuando $y=4$ es máximo. La solución buscada es, por tanto, $x=32$ e $y=4$.

Problema 431 Se ha construido un gran depósito cilíndrico de $81\pi\,m^3$ de volumen. La superficie lateral ha de ser construida con un material que cuesta $30\,euros/m^2$, y las dos bases con un material que cuesta $45\,euros/m^2$.

1. Determina la relación que hay entre el radio, r, de las bases circulares y la altura, h, del cilindro, y da el coste, $C(r)$, del material necesario para construir este depósito en función de r.

2. ¿Qué dimensiones (radio y altura) ha de tener el depósito para que el coste de los materiales necesarios para construirlo sea el mínimo posible?.

3. ¿Cúal será, en este caso, el coste del material?.



Solución:

1. Sabemos que

$$V = \pi r^2 \cdot h = 81\pi \Longrightarrow h = \frac{81}{r^2}$$

$$C(r) = 2\pi r h \cdot 30 + 2 \cdot \pi r^2 \cdot 45 = \frac{4860}{r}\pi + 90\pi r^2$$

2. Para que este coste sea mínimo calculamos su derivada e igualamos a cero $C'(r) = 0$.

$$C'(r) = -\frac{4860\pi}{r^2} + 180\pi r = 0 \Longrightarrow -4860 + 180\pi r^3 = 0 \Longrightarrow$$
$$r^3 = 27 \Longrightarrow r = 3\,m,\ h = 9\,m$$

Calculamos la segunda derivada para comprobar si es un mínimo.

$$C''(r) = \frac{4860\pi \cdot 2r}{r^4} + 180\pi \Longrightarrow C''(3) = 540\pi > 0$$

Por tanto, en $r = 3m$, $h = 9m$, hay un mínimo.

3. El coste del material será $C(3) = \dfrac{4860}{3} r + 90\pi 3^2 = 2430\pi\, euros$.

Problema 432 Determine los puntos de la curva $y^2 = 4x$ que están a distancia mínima del punto $(4, 0)$.

Solución:

La función es $y^2 = 4x \iff y = \pm 2\sqrt{x}$, un punto genérico de la curva sería $(x, \pm 2\sqrt{x})$, cuya distancia al punto $(4, 0)$ será la función

$$d(x) = \sqrt{(x-4)^2 + (\pm 2\sqrt{x} - 0)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + 4x} = \sqrt{x^2 - 4x + 16}$$

Para minimizar esta función recurrimos a la primera derivada

$$d'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x + 16}} = 0 \Longrightarrow x = 2$$

Para comprobar si es un mínimo recurrimos a la segunda derivada

$$d''(x) = \frac{12}{(x^2 - 4x + 16)\sqrt{x^2 - 4x + 16}} \Longrightarrow d''(2) = \frac{\sqrt{3}}{6} > 0$$

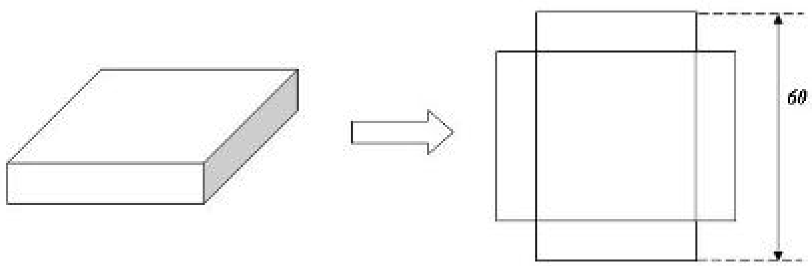
Luego se trata de un mínimo.

Para $x = 2$ tenemos que $y^2 = 4 \cdot 2 \Longrightarrow y = \pm 2\sqrt{2}$ luego los puntos buscados son $(2, 2\sqrt{2})$ y $(2, -2\sqrt{2})$.

Problema 433 A partir de una cartulina cuadrada de $60cm$ de lado se va a construir caja de base cuadrada, sin tapa, a base de recortar cuatro cuadrados iguales en las esquinas de la cartulina y doblando después de la manera adecuada. Un observador indica que la caja de más capacidad se obtendrá si los cuadrados elimininados tienen $10cm$ de lado. Decidir si la observación es correcta o no.

Solución:

Sea x la longitud del lado del cuadrado recortado, esto quiere decir que, la



base de la caja es un cuadrado de lado $60 - 2x$ y la altura de la caja será x. El volumen de la caja será

$$V(x) = (60 - 2x)^2 \cdot x = (3600 + 4x^2 - 240x)x = 4x^3 - 240x^2 + 3600x$$

Para que este volumen sea máximo utilizamos la primera derivada

$$V'(x) = 12x^2 - 480x + 3600 = 0 \Longrightarrow x = 30,\ x = 10$$

Para comprobar cúal de estos valores es el máximo recurrimos a la segunda derivada

$$V''(x) = 24x - 480 \Longrightarrow \begin{cases} V''(30) = 240 > 0 \\ V''(10) = -240 < 0 \end{cases}$$

Luego cuando $x = 30$ el volumen es mínimo, mientras que cuando $x = 10$ el volumen es máximo y, por tanto, la observación es correcta.

Problema 434 Calcule las dimensiones de tres campos cuadrados de modo que: el perímetro de uno de ellos sea triple del perímetro de otro, se necesiten exactamente 1248 metros de valla para vallar los tres y la suma de las áreas de los tres campos sea la mínima posible.

Solución:

Si el lado del primer cuadrado es x su perímetro es $4x$.
El perímetro del segundo cuadrado será $12x$, y su lado $3x$
El perímetro del tercer cuadrado será $4y$
La suma de los perímetros será $4x + 12x + 4y = 1248 \Longrightarrow y = 312 - 4x$
El área del primer cuadrado es x^2
El área del segundo cuadrado es $9x^2$
El área del tercer cuadrado es $y^2 = (312 - 4x)^2$
La función suma de áreas que hay que minimizar será

$$S(x) = x^2 + 9x^2 + (312 - 4x)^2 = 26x^2 - 2496x + 97344$$

Para calcular el mínimo derivamos

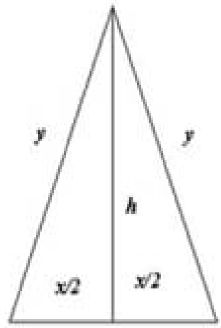
$$S'(x) = 52x - 2496 = 0 \Longrightarrow x = 48$$

Para comprobar si es un mínimo recurrimos a la segunda derivada $S''(x) = 52 > 0 \Longrightarrow$ mínimo.

Las dimensiones de los campos son:

El primer campo tiene de lado $48m$
El segundo campo tiene de lado $144m$
El tercer campo tiene de lado $120m$

Problema 435 Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.



Solución:

$$S = \frac{x \cdot h}{2}; \quad x + 2y = 8; \quad h = \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}$$

$$S(x) = \frac{x\sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}}{2} = x\sqrt{4-x}$$

$$S'(x) = \frac{8-3x}{2\sqrt{4-x}} = 0 \Longrightarrow x = \frac{8}{3}$$

$$S''(x) = \frac{-88+21x}{16(4-x)\sqrt{4-x}}; \quad S''\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4} < 0$$

Luego se trata de un máximo. Si $x = \frac{8}{3} \Longrightarrow y = \frac{8}{3}$ y, por tanto se trata de un triángulo equilátero. Su altura será: $h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.