# *1º de Bachillerato Ciencias*

# *Matemáticas I*

# *Ejercicios*

# *de*

# *GEOMETRÍA*

# *resueltos*

***(Solucionario libro)***

Colegio Maravillas
Recopilados por: Teresa González

1.- (16)

Calcula el perímetro de un triángulo cuyos vértices están situados en los puntos $A(1, 2)$, $B(3, 2)$ y $C(-1, 3)$.

Calculamos los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CA}$:

$\overrightarrow{AB} = (2, 0)$, $\overrightarrow{BC} = (-4, 1)$ y $\overrightarrow{CA} = (2, -1)$

Hallamos el módulo de los vectores:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

$$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

El perímetro mide:

$$2 + \sqrt{17} + \sqrt{5} = 8{,}36 \text{ u}$$

2.- (18)

Escribe las ecuaciones vectorial y paramétricas de la recta que pasa por los puntos $A(7, 3)$ y $B(2, 2)$.

$$\overrightarrow{AB} = (-5, -1)$$

Ecuación vectorial:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} \rightarrow (x, y) = (7, 3) + t(-5, -1)$$

Ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = 7 - 5t \\ y = 3 - t \end{array}\right\}$$

3.- (22)

Halla la ecuación continua de la recta que pasa por $A(2, -1)$ y tiene la dirección del vector $\vec{d} = (2, -1)$. Averigua si el punto $P(3, 1)$ está en la recta.

Calculamos la ecuación continua de la recta:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-(-1)}{-1}$$

Comprobamos si el punto $P$ cumple las ecuaciones de la recta:

$$\frac{3-2}{2} = \frac{1}{2} \qquad \frac{1-(-1)}{-1} = -2$$

Luego el punto $P$ no pertenece a la recta.

4.- (23)

Obtén la ecuación general de la recta que pasa por $A(1, -1)$ y $B(0, 2)$. Calcula también un vector perpendicular a su vector director.

Calculamos el vector director: $\overrightarrow{AB} = (-1, 3)$

Obtenemos la ecuación general:

$A = 3 \qquad B = 1 \qquad C = -3 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = -2$

$3x + y - 2 = 0$

Un vector perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ es $(-3, -1)$.

5.- (25)

Calcula la recta que pasa por el punto $A(2, 7)$ y forma con el eje de abscisas un ángulo de 60°. Explica cómo lo haces.

Calculamos la pendiente: $tg\ 60° = m \rightarrow m = \sqrt{3}$

Hallamos la ecuación punto-pendiente: $y - 7 = \sqrt{3}(x - 2)$

6.- (26)

Halla los valores de $B$ y $C$ para que las rectas $r$ y $s$ sean paralelas.

$$r:\ 3x + By + 5 = 0 \qquad s:\ x + 2y + C = 0$$

Para que las rectas sean paralelas se tiene que cumplir que:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$

$$\frac{3}{1} = \frac{B}{2} \rightarrow B = 6 \qquad \frac{3}{1} \neq \frac{5}{C} \rightarrow C \neq \frac{5}{3}$$

7.- (28)

Halla la distancia entre el punto $P(2, -1)$ y la recta $r$, cuya ecuación es:

$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{2-y}{2}$$

Expresamos la recta en forma general:

$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{2-y}{2} \rightarrow 2x + 3y - 8 = 0$$

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) - 8|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{7}{\sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{13}}{13}\ u$$

8.- (29)

Calcula la distancia que separa esta recta del origen de coordenadas.

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 - t \\ y = 2 + 2t \end{array}\right\}$$

Expresamos la recta en forma general:

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 - t \\ y = 2 + 2t \end{array}\right\} \rightarrow -x + 3 = \frac{y-2}{2} \rightarrow -2x - y + 8 = 0$$

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 8|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}\ u$$

9.- (30)

Halla la distancia entre estas rectas.

$$r\colon \frac{x}{2} = \frac{y-1}{5} \qquad s\colon \left.\begin{array}{l} x = 2t \\ y = 3 + 5t \end{array}\right\}$$

Calculamos el vector director de la recta $r$: $\vec{u_r} = (2, 5)$

Hallamos el vector director de la recta $s$: $\vec{u_s} = (2, 5)$

Tomamos un punto de la recta $r$, $A(0, 1)$, y vemos si pertenece a $s$:

$$s\colon \left.\begin{array}{l} 0 = 2t \\ 1 = 3 + 5t \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \dfrac{-2}{5} \end{array}\right\} \rightarrow A \notin s$$

Expresamos la recta, s, en forma general:

$$s\colon \left.\begin{array}{l} x = 2t \\ y = 3 + 5t \end{array}\right\} \rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y-3}{5} \rightarrow 5x - 2y + 6 = 0$$

Las rectas son paralelas, y calculamos la distancia de $A$ a $s$:

$$d(A, s) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|5 \cdot 0 - 2 \cdot 1 + 6|}{\sqrt{5^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{\sqrt{29}} = \frac{4\sqrt{29}}{29}\ u$$

10.- (31)

Calcula el ángulo que forman las rectas.

$$r\colon \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{3} \qquad s\colon \left.\begin{array}{l} x = 1 - 2t \\ y = -3 + t \end{array}\right\}$$

$$\cos\alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|3 \cdot (-2) + 3 \cdot 1|}{\sqrt{3^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{3}{3\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\rightarrow \alpha = 71^\circ\ 33'\ 54{,}18''$$

11.- (44)

Decide si los siguientes vectores son perpendiculares o paralelos.

a) $\vec{a} = (-2, 4)$ y $\vec{b} = (3, 2)$ b) $\vec{c} = (4, -3)$ y $\vec{d} = (6, 8)$

a) $\dfrac{-2}{3} \neq \dfrac{4}{2}$

No son paralelos.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-2, 4) \cdot (3, 2) = -6 + 8 \neq 0$

No son perpendiculares.

b) $\dfrac{4}{6} \neq \dfrac{-3}{8}$

No son paralelos.

$\vec{c} \cdot \vec{d} = (4, -3) \cdot (6, 8) = 24 - 24 = 0$

Son perpendiculares.

12.- (45)

Encuentra un vector $\vec{u} = (a, b)$ que es perpendicular a $\vec{v} = (3, 5)$ y cuyo módulo sea $|\vec{u}| = 2\sqrt{34}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (a, b) \cdot (3, 5) = 3a + 5b = 0 \rightarrow a = -\frac{5b}{3}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(-\frac{5b}{3}\right)^2 + b^2} = 2\sqrt{34} \rightarrow \frac{25b^2}{9} + b^2 = 136 \rightarrow 34b^2 = 1.224 \rightarrow b = \sqrt{36} = \pm 6$$

Si $b = 6 \rightarrow a = -10$ Si $b = -6 \rightarrow a = 10$

13.- (46)

Dado el vector $\vec{p} = (6, 2)$, obtén un vector $\vec{q}$ con módulo $\sqrt{89}$ y tal que $\vec{p} \cdot \vec{q} = 14$.

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = (6, 2) \cdot (a, b) = 6a + 2b = 14 \rightarrow b = 7 - 3a$$

$$|\vec{q}| = \sqrt{a^2 + (7 - 3a)^2} = \sqrt{89} \rightarrow 10a^2 - 42a - 40 = 0 \rightarrow \begin{cases} a_1 = -\frac{4}{5} \\ a_2 = 5 \end{cases}$$

Si $a = -\frac{4}{5} \rightarrow b = \frac{47}{5}$

Si $a = 5 \rightarrow b = -8$

14.- (47)

Halla $m$ y $n$ para que los vectores $\vec{u} = (3, m)$ y $\vec{v} = (n, -1)$ sean perpendiculares y se verifique que $|\vec{u}| = 5$.

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + m^2} = 5 \rightarrow 9 + m^2 = 25 \rightarrow m = \pm 4$$

Si $m = 4$:

$$(3, 4) \cdot (n, -1) = 0 \rightarrow 3n - 4 = 0 \rightarrow n = \frac{4}{3}$$

Si $m = -4$:

$$(3, -4) \cdot (n, -1) = 0 \rightarrow 3n + 4 = 0 \rightarrow n = -\frac{4}{3}$$

15.- (50)

¿Podrías conseguir un vector $\vec{a}$ tal que $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$, siendo $\vec{b} = (2, 1)$, y que sea perpendicular a $\vec{c} = (2, 6)$?

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \rightarrow (a, b) \cdot (2, 1) = 5 \rightarrow 2a + b = 5$$
$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \rightarrow (a, b) \cdot (2, 6) = 0 \rightarrow 2a + 6b = 0$$

Resolvemos el sistema:

$a = 3, b = -1$

16.- (53)

Halla el ángulo que forman los vectores.

a) $\vec{a} = (-1, 5)$ y $\vec{b} = (3, 2)$

b) $\vec{c} = (1, \sqrt{3})$ y $\vec{d} = (-1, \sqrt{3})$

c) $\vec{e} = (-6, 4)$ y $\vec{f} = (-9, 6)$

d) $\vec{g} = (2, -5)$ y $\vec{h} = (4, 6)$

a) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \dfrac{7}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{13}} = 0{,}38 \to \alpha = 67°\ 37'\ 11{,}51''$

b) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{|\vec{c}|\cdot|\vec{d}|} = \dfrac{2}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{4}} = 0{,}5 \to \alpha = 60°$

c) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{e}\cdot\vec{f}}{|\vec{e}|\cdot|\vec{f}|} = \dfrac{78}{\sqrt{52}\cdot\sqrt{117}} = 1 \to \alpha = 0°$

d) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{g}\cdot\vec{h}}{|\vec{g}|\cdot|\vec{h}|} = \dfrac{-22}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{52}} = -0{,}56 \to \alpha = 124°\ 30'\ 30{,}6''$

17.- (59)

**Halla las coordenadas del punto simétrico de $P(-4, 2)$ respecto del punto $Q(5, -1)$. Determina también el punto simétrico de $A(3, -2)$ respecto de $B(-3, 4)$.**

Como $P(-4, 2)$ es el punto medio de $Q(5, -1)$ y $Q'(x, y)$:

$$(-4, 2) = \left(\frac{5+x}{2}, \frac{-1+y}{2}\right) \to \left.\begin{aligned} -4 &= \frac{5+x}{2} \\ 2 &= \frac{-1+y}{2} \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} x &= -13 \\ y &= 5 \end{aligned}\right\}$$

Y como $B(-3, 4)$ es el punto medio de $A(3, -2)$ y $A'(x, y)$:

$$(-3, 4) = \left(\frac{3+x}{2}, \frac{-2+y}{2}\right) \to \left.\begin{aligned} -3 &= \frac{3+x}{2} \\ 4 &= \frac{-2+y}{2} \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} x &= -9 \\ y &= 10 \end{aligned}\right\}$$

18.- (60)

**Si $A(3, 1)$, $B(5, 7)$ y $C(6, 4)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo, ¿cuál es el cuarto vértice?**

Calculamos el punto medio del segmento $AC$:

$$M = \left(\frac{3+6}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

El cuarto vértice, $D(x, y)$, es simétrico de $B$ respecto de $M$.

$$\left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5+x}{2}, \frac{7+x}{2}\right) \to \left.\begin{aligned} x &= 4 \\ y &= -2 \end{aligned}\right\}$$

19.- (63)

**Calcula las coordenadas de los puntos que dividen el segmento de extremos $A(5, -1)$ y $B(17, 8)$ en tres partes iguales.**

Calculamos el vector $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} = (12, 9)$

El primer punto estará situado a $\dfrac{1}{3}$ de distancia de uno de los extremos del segmento, y el segundo, a $\dfrac{2}{3}$ de distancia.

$$P_1 = A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (5, -1) + \frac{1}{3}(12, 9) = (9, 2)$$

$$P_2 = A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = (5, -1) + \frac{2}{3}(12, 9) = (13, 5)$$

20.- (65)

Demuestra que el triángulo de vértices $A(3, 1)$, $B(9, -1)$ y $C(5, -5)$ es isósceles. ¿Es equilátero? ¿Cuáles son sus lados iguales? Calcula su área.

Hallamos los vectores formados por los vértices del triángulo:

$\overrightarrow{AB} = (6, -2)$, $\overrightarrow{BC} = (-4, -4)$ y $\overrightarrow{AC} = (2, -6)$

Calculamos los módulos de los vectores:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}\ u$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32}\ u$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40}\ u$$

Como el triángulo tiene dos lados iguales, $AB$ y $AC$, es un triángulo isósceles.

Para hallar el área calculamos la altura, $h$, sobre el lado $BC$ aplicando el teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{(\sqrt{40})^2 - \left(\frac{\sqrt{32}}{2}\right)^2} = \sqrt{40 - 8} = \sqrt{32}\ u$$

$$A = \frac{B \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{32} \cdot \sqrt{32}}{2} = 16\ u^2$$

21.- (66)

Determina si el triángulo de vértices $A(12, 10)$, $B(20, 16)$ y $C(8, 32)$ es rectángulo.

Calculamos los vectores formados por los vértices del triángulo:

$\overrightarrow{AB} = (8, 6)$, $\overrightarrow{BC} = (-12, 16)$ y $\overrightarrow{AC} = (-4, 22)$

Hallamos los módulos de los vectores:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{64 + 36} = 10\ u$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20\ u$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{16 + 484} = \sqrt{500}\ u$$

Si el triángulo es rectángulo, debe verificar el teorema de Pitágoras.

$$|\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2$$

$$10^2 + 20^2 = 500$$

Luego el triángulo es rectángulo.

22.- (73)

Escribe las ecuaciones vectorial y paramétricas de las rectas que cumplen estas condiciones.

a) Pasa por los puntos $(-3, 1)$ y $(5, 3)$.

b) Pasa por el punto $P(3, -4)$ y su vector director es $\vec{v} = (-2, 7)$.

c) Su ecuación explícita es $y = -3x + 4$.

a) Calculamos el vector director: (8, 2)

Ecuación vectorial $\rightarrow (x, y) = (5, 3) + t(8, 2)$

Ecuaciones paramétricas $\rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 5 + 8t \\ y = 3 + 2t \end{array}\right\}$

b) Ecuación vectorial $\rightarrow (x, y) = (3, -4) + t(-2, 7)$

Ecuaciones paramétricas $\rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 3 - 2t \\ y = -4 + 7t \end{array}\right\}$

c) Hallamos dos puntos de la recta: $A(0, 4)$ y $B(1, 1)$

Calculamos el vector director: $\overrightarrow{AB} = (1, -3)$

Ecuación vectorial $\rightarrow (x, y) = (1, 1) + t(1, -3)$

Ecuaciones paramétricas $\rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 1 - 3t \end{array}\right\}$

23.- (74)

Expresa la ecuación continua de la recta que:

a) Pasa por los puntos (8, 3) y (1, 5).

b) Pasa por el punto $P(-2, 5)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (3, -4)$.

c) Su ecuación general es $-2x + y + 7 = 0$.

a) Calculamos el vector director: $(-7, 2)$

Ecuación continua $\rightarrow \dfrac{x-8}{-7} = \dfrac{y-3}{2}$

b) Ecuación continua $\rightarrow \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-5}{-4}$

c) Hallamos dos puntos de la recta: $A(0, -7)$ y $B(1, -5)$

Calculamos el vector director: $\overrightarrow{AB} = (1, 2)$

Ecuación continua $\rightarrow \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+7}{2}$

24.- (75)

Escribe la ecuación explícita de la recta que:

a) Pasa por los puntos $(-3, 5)$ y $(3, -1)$.

b) Pasa por el punto $P(-1, 0)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (-3, -2)$.

c) Su ecuación continua es $\dfrac{x}{-2} = \dfrac{y-3}{5}$.

a) $\left.\begin{array}{l} y = mx + n \xrightarrow{(-3,\,5)} 5 = -3m + n \\ y = mx + n \xrightarrow{(3,\,-1)} -1 = 3m + n \end{array}\right\}$

Resolviendo el sistema obtenemos: $m = -1$ y $n = 2 \rightarrow y = -x + 2$

b) Calculamos la pendiente: $m = \dfrac{2}{3}$

El punto $P(-1, 0)$ debe cumplir la ecuación de la recta.

$$y = \frac{2}{3}x + n \rightarrow 0 = -\frac{2}{3} + n \rightarrow n = \frac{2}{3}$$

Por tanto, la ecuación explícita de la recta es:

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$$

c) $\frac{x}{-2} = \frac{y-3}{5} \rightarrow 5x = -2y + 6 \rightarrow y = -\frac{5}{2}x + 3$

25.- (77)

Expresa en forma vectorial, paramétrica y continua la ecuación de la recta que:

a) Pasa por el punto (1, 3) y es paralela a la recta $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-4}$.

b) Es paralela a la recta $5x - 2y + 12 = 0$ y pasa por el punto (−2, 5).

a) Vector director de la recta: (2, −4)

Ecuación vectorial $\rightarrow (x, y) = (1, 3) + t(2, -4)$

Ecuaciones paramétricas $\rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 4t \end{array}\right\}$

Ecuación continua $\rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-4}$

b) Vector director de la recta: (2, 5)

Ecuación vectorial $\rightarrow (x, y) = (-2, 5) + t(2, 5)$

Ecuaciones paramétricas $\rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -2 + 2t \\ y = 5 + 5t \end{array}\right\}$

Ecuación continua $\rightarrow \frac{x+2}{2} = \frac{y-5}{5}$

26.- (78)

Expresa en forma explícita la recta que:

a) Pasa por el punto (0, −1) y es paralela a la recta $\left.\begin{array}{l} x = 2 + 3\lambda \\ y = -4 \end{array}\right\}$.

b) Es paralela a la recta $\frac{x-3}{4} = \frac{y}{-1}$ y pasa por el punto (5, −2).

a) Vector director de la recta: (3, 0)

Pendiente: $m = 0$

$-1 = 0x + n \rightarrow n = -1$

Ecuación explícita $\rightarrow y = -1$

b) Vector director de la recta: (4, −1)

Pendiente: $m = -\frac{1}{4}$

$-2 = -\frac{5}{4} + n \rightarrow n = -\frac{3}{4}$

Ecuación explícita $\rightarrow y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$

27.- (79)

Escribe la ecuación general de la recta que:

a) Pasa por el punto (10, −2) y es paralela a la recta $\left.\begin{array}{l} x = -1 - 3\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \end{array}\right\}$.

b) Es paralela a la recta $y = \dfrac{8x - 3}{2}$ y pasa por el punto (4, 0).

a) Expresamos la recta en forma continua: $\dfrac{x - 10}{-3} = \dfrac{y + 2}{-2}$

Y la expresamos en forma general: $-2x + 20 = -3y - 6 \rightarrow -2x + 3y + 26 = 0$

b) Vector director de la recta: (1, 4)

Expresamos la recta en forma continua: $\dfrac{x - 4}{1} = \dfrac{y}{4}$

Y la expresamos en forma general: $4x - 16 = y \rightarrow 4x - y - 16 = 0$

28.- (80)

Escribe las ecuaciones vectorial y paramétricas de la recta.

a) Pasa por el punto (0, −3) y es perpendicular a la recta $\dfrac{x + 2}{-3} = \dfrac{y + 1}{4}$.

b) Pasa por el punto (−5, 0) y es perpendicular a la recta $-3x - 2y + 7 = 0$.

a) Un vector perpendicular a (−3, 4) es (4, 3).

Ecuación vectorial $\rightarrow (x, y) = (0, -3) + t(4, 3)$

Ecuaciones paramétricas $\rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 4t \\ y = -3 + 3t \end{array}\right\}$

b) Calculamos el vector director de la recta:

$A(1, 2), B(-1, 5) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2, 3)$

Un vector perpendicular a (−2, 3) es (−3, −2)

Ecuación vectorial $\rightarrow (x, y) = (-5, 0) + t(-3, -2)$

Ecuaciones paramétricas $\rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -5 - 3t \\ y = -2t \end{array}\right\}$

29.- (82)

Halla la ecuación explícita de la recta que:

a) Pasa por el punto (2, −5) y es perpendicular a la recta $\dfrac{x + 1}{2} = \dfrac{y - 4}{-3}$.

b) Pasa por el punto (−4, 8) y es perpendicular a la recta $-2x + 3y - 16 = 0$.

a) Calculamos el vector director de la recta: $\vec{u}_r = (3, 2)$

La pendiente de la recta es $m = \dfrac{2}{3}$.

Como pasa por el punto (2, −5):

$$-5 = \frac{2}{3} \cdot 2 + n \rightarrow n = -\frac{19}{3}$$

La ecuación de la recta es $y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{19}{3}$.

b) Calculamos el vector director de la recta: $\vec{u}_r = (-2, 3)$

La pendiente de la recta es $m = -\frac{3}{2}$.

Como pasa por el punto $(-4, 8)$:

$8 = -\frac{3}{2} \cdot (-4) + n \rightarrow n = 2$

La ecuación de la recta es $y = -\frac{3}{2}x + 2$.

30.- (83)

**Determina la ecuación de una recta que pasa por los puntos $(-1, -10)$ y $(2, c)$, sabiendo que su pendiente es 7. Expresa la recta en forma continua y general.**

Hallamos el vector director: $(3, c + 10)$

Como sabemos que la pendiente es: $7 = \frac{c+10}{3} \rightarrow 21 = c + 10 \rightarrow c = 11$

$\vec{u}_r = (3, 21)$

Expresamos la recta en forma continua:

$\frac{x+1}{3} = \frac{y+10}{21}$

Y la expresamos en forma general:

$21x + 21 = 3y + 30 \rightarrow 21x - 3y - 9 = 0$

31.- (92)

**Determina la ecuación de la recta $r$, que es perpendicular a $s$: $3x - 2y + 1 = 0$ y que pasa por el punto de coordenadas $P(0, 2)$.**

Hallamos el vector director de la recta: $m = \frac{3}{2} \rightarrow (2, 3)$

Por tanto, un vector perpendicular a ella es vector director de la recta $r$.

$\vec{u}_r = (-3, 2)$

$\left.\begin{array}{l} x = -3t \\ y = 2 + 2t \end{array}\right\}$

32.- (94)

**Halla el valor que debe tomar $k$ para que la recta $\frac{x+1}{k} = \frac{y-2}{3}$ sea paralela a $\left.\begin{array}{l} x = 3 - \lambda \\ y = 2 + 5\lambda \end{array}\right\}$.**

Para que las rectas sean paralelas, los vectores directores deben ser proporcionales.

$\frac{k}{-1} = \frac{3}{5} \rightarrow k = -\frac{3}{5}$

33.- (95)

**Encuentra el valor de $a$ para que la recta $ax + 3y - 7 = 0$ sea paralela a $\frac{x-1}{5} = y + 2$.**

Para que las rectas sean paralelas, los vectores directores deben ser proporcionales.

$\frac{-3}{5} = \frac{a}{1} \rightarrow a = -\frac{3}{5}$

34.- (99)

Determina la recta paralela a $r$ que pasa por el punto simétrico de $P$ respecto de la recta $r$.

a) $r$: $2x - 3y + 10 = 0$ $\qquad P(4, -7)$

b) $r$: $\left.\begin{array}{l} x = -2\lambda \\ y = 2 - \lambda \end{array}\right\}$ $\qquad P(4, 4)$

c) $r$: $y = \dfrac{3x - 1}{4}$ $\qquad P(5, -9)$

a) Calculamos la recta $s$, perpendicular a $r$, y que pasa por $P$:

$s$: $\dfrac{x-4}{-2} = \dfrac{y+7}{3}$

Hallamos el punto de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} 2x - 3y + 10 = 0 \\ 3x - 12 = -2y - 14 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x - 3y = -10 \\ 3x + 2y = -2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 2 \end{array}\right\}$$

$(-2, 2)$ es el punto medio de $P$ y su simétrico, $P'$, respecto de $r$.

Calculamos $P'(x, y)$:

$$(-2,\ 2) = \left(\frac{4+x}{2}, \frac{-7+y}{2}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -8 \\ y = 11 \end{array}\right\}$$

La recta es: $\left.\begin{array}{l} x = -8 + 3\lambda \\ y = 11 + 2\lambda \end{array}\right\}$

b) Calculamos la recta $s$, perpendicular a $r$, y que pasa por $P$:

$s$: $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-4}{-2}$

Hallamos el punto de corte de las rectas:

$$\frac{-2\lambda - 4}{1} = \frac{2 - \lambda - 4}{-2} \rightarrow \lambda = 2$$

$(-4, 0)$ es el punto medio de $P$ y su simétrico, $P'$, respecto de $r$.

Calculamos $P'(x, y)$:

$$(-4, 0) = \left(\frac{4+x}{2}, \frac{4+y}{2}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -12 \\ y = -4 \end{array}\right\}$$

La recta es: $\left.\begin{array}{l} x = -12 - 2\lambda \\ y = -4 - \lambda \end{array}\right\}$

c) Calculamos la recta $s$, perpendicular a $r$, y que pasa por $P$:

$s$: $\dfrac{x-5}{-3} = \dfrac{y+9}{4}$

Hallamos el punto de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} 4y = 3x - 1 \\ 4x - 20 = -3y - 27 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} -3x + 4y = -1 \\ 4x + 3y = -7 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -1 \\ y = -1 \end{array}\right\}$$

$(-1, -1)$ es el punto medio de $P$ y su simétrico, $P'$, respecto de $r$.

Calculamos $P'(x, y)$:

$$(-1, -1) = \left(\frac{5+x}{2}, \frac{-9+y}{2}\right) \rightarrow \left.\begin{matrix} x = -7 \\ y = 7 \end{matrix}\right\}$$

La recta es: $\left.\begin{matrix} x = -7 + 4\lambda \\ y = 7 + 3\lambda \end{matrix}\right\}$

35.- (103)

Encuentra el ángulo que forman la recta que pasa por los puntos $P(-1, 4)$ y $Q(3, 8)$ y la recta $\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{8}$.

$\overrightarrow{PQ} = (4, 4)$, $\vec{u}_r = (2, 8)$

$$\cos\alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|4 \cdot 2 + 4 \cdot 8|}{\sqrt{4^2 + 4^2} \cdot \sqrt{2^2 + 8^2}} = \frac{40}{\sqrt{2.176}}$$

$\alpha = 30° \, 57' \, 49{,}52''$

36.- (105)

Encuentra el valor de $m$ para que $y = mx - 1$ forme un ángulo de 45° con $\frac{x+2}{-3} = \frac{y-3}{6}$.

$\vec{u}_r = (-3, 6)$, $\vec{u}_s = (1, m)$

$$\cos 45° = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|-3 \cdot 1 + 6 \cdot m|}{\sqrt{(-3)^2 + 6^2} \cdot \sqrt{1^2 + m^2}}$$

$$\rightarrow m = 3, \; m = -\frac{1}{3}$$

37.- (106)

Obtén el valor que debe tener $b$ para que la recta $3x + by + 6 = 0$ forme un ángulo de 60° con la recta $y = \frac{x+4}{-3}$.

$\vec{u}_r = (-3, 1)$, $\vec{u}_s = (b, -3)$

$$\cos 60° = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{|-3 \cdot b + 1 \cdot (-3)|}{\sqrt{(-3)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{b^2 + (-3)^2}}$$

$$\rightarrow m = \frac{-18 - 15\sqrt{3}}{13}, \; m = \frac{-18 + 15\sqrt{3}}{13}$$

38.- (107)

Halla la distancia del punto $P(4, -2)$ a las rectas.

a) $-6x + 8y - 5 = 0$ b) $\left.\begin{matrix} x = 2 - \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \end{matrix}\right\}$ c) $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{6}$ d) $y = \frac{4x-5}{3}$

a) $$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-6 \cdot 4 + 8 \cdot (-2) - 5|}{\sqrt{(-6)^2 + 8^2}} = \frac{45}{10} = \frac{9}{2} \, u$$

b) Calculamos la ecuación general de la recta:

$$-x+2=\frac{y-2}{2} \rightarrow 2x+y-6=0$$

$$d(P,\,r)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|2\cdot 4+1\cdot(-2)-6|}{\sqrt{2^2+1^2}}=0\ u$$

c) Hallamos la ecuación general de la recta:

$$6x-6=3y-6 \rightarrow 6x-3y=0 \rightarrow 2x-y=0$$

$$d(P,\,r)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|2\cdot 4-1\cdot(-2)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}\ u$$

d) Determinamos la ecuación general de la recta:

$$3y=4x-5 \rightarrow -4x+3y+5=0$$

$$d(P,\,r)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|-4\cdot 4+3\cdot(-2)+5|}{\sqrt{(-4)^2+3^2}}=\frac{17}{5}\ u$$

39.- (108)

**Calcula la distancia del origen de coordenadas a la recta que pasa por $(-3, 6)$ y es paralela a $\frac{x-1}{-6}=\frac{y-2}{8}$.**

Determinamos la recta pedida: $\frac{x+3}{-6}=\frac{y-6}{8}$

Calculamos la ecuación general de la recta:

$$8x+24=-6y+36 \rightarrow 8x+6y-12=0$$

$$d(P,\,r)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|8\cdot 0+6\cdot 0-12|}{\sqrt{8^2+6^2}}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}\ u$$

40.- (109)

**¿Qué distancia hay entre los pares de rectas?**

a) $r\!:\ \left.\begin{array}{l} x=-1+2\lambda \\ y=3+\lambda \end{array}\right\}$ $\quad s\!:\ -x+2y+5=0$

c) $r\!:\ \left.\begin{array}{l} x=2+3\lambda \\ y=-1-\lambda \end{array}\right\}$ $\quad s\!:\ y=\frac{-x-1}{3}$

b) $r\!:\ \frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{6}$ $\quad s\!:\ y=\frac{8x-3}{4}$

a) $\vec{u}_r=(2,1)$, $\vec{u}_s=(-2,-1)$. Los vectores son proporcionales. Un punto de $r$ es $P(-1, 3)$

$$d(r,\,s)=\frac{12\sqrt{5}}{5}$$

b) $\vec{u}_r=(2,6)$, $\vec{u}_s=(4,8)$. Los vectores no son proporcionales; por tanto, las rectas son secantes.

c) $\vec{u}_r=(3,-1)$, $\vec{u}_s=(3,-1)$. Como los vectores son iguales, las rectas son paralelas o coincidentes.

Tomamos un punto de la recta $r$, $A(2,-1)$, y vemos si pertenece a $s$: $-1=\frac{-2-1}{3}$.

Las rectas son coincidentes.

41.- (110)

Calcula el valor de $a$ para que la distancia del punto a la recta sea de 4 unidades.

$$r:\ 12x + 5y - 19 = 0 \qquad P(3, a)$$

$$4 = \frac{|12 \cdot 3 + 5a - 19|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} \rightarrow 52 = |17 + 5a|$$

$$a = 7,\ a = -\frac{69}{5}$$

42.- (111)

Halla el valor de $b$ para que la recta y el punto se encuentren a 5 unidades de distancia.

$$r:\ \frac{x+1}{b} = \frac{y+3}{3} \qquad P(-4, 1)$$

Expresamos la recta en forma general:

$$3x + 3 = by + 3b \rightarrow 3x - by + 3 - 3b = 0$$

$$5 = \frac{|3 \cdot (-4) - b \cdot 1 + 3 - 3b|}{\sqrt{3^2 + (-b)^2}} \rightarrow 5\sqrt{9 + b^2} = |-9 - 4b|$$

$$9b^2 - 72b + 144 = 0 \rightarrow b = 4$$

43.- (115)

Comprueba si están alineados los puntos $P(-1, 4)$, $Q(3, 1)$ y $R(11, -5)$. En caso afirmativo, escribe la ecuación de la recta que los contiene.

Calculamos los vectores formados por los puntos:

$\overrightarrow{PQ} = (4, -3)$

$\overrightarrow{PR} = (12, -9)$

Como los vectores son proporcionales, los puntos están alineados.

Calculamos la ecuación de la recta que los contiene:

$$r: \left.\begin{array}{l} x = -1 + 4\lambda \\ y = 4 - 3\lambda \end{array}\right\}$$

44.- (116)

Verifica si los puntos $(-4, -3)$, $(1, 4)$ y $(16, 23)$ están alineados. En caso afirmativo, escribe la ecuación de la recta.

Llamamos a los puntos:

$P(-4, -3)$

$Q(1, 4)$

$R(16, 23)$

Calculamos los vectores formados por los puntos:

$\overrightarrow{PQ} = (5, 7)$

$\overrightarrow{PR} = (20, 26)$

Como los vectores no son proporcionales, los puntos no están alineados.

45.- (117)

**Halla el área del triángulo cuyos vértices son (2, 1), (4, 3) y (6, —1).**

Llamamos a los puntos:

$P(2, 1)$

$Q(4, 3)$

$R(6, -1)$

Calculamos las longitudes de los lados:

$\overrightarrow{PQ} = (2, 2) \qquad \overrightarrow{PR} = (4, -2) \qquad \overrightarrow{QR} = (2, -4)$

$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$

$|\overrightarrow{PR}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20}$

$|\overrightarrow{QR}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20}$

Hallamos la altura sobre el lado desigual, utilizando el teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{\left(\sqrt{20}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{8}}{2}\right)^2} = \sqrt{18}\ u$$

Por tanto, el área es:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{18}}{2} = 6\ u^2$$

46.- (118)

**Las rectas que contienen los lados de un triángulo son $x + y - 5 = 0$, $6x + 5y - 24 = 0$ y $2x + y - 8 = 0$. Calcula sus vértices y su área.**

Hallamos los puntos de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} x + y - 5 = 0 \\ 6x + 5y - 24 = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{x=-y+5} 6(-y + 5) + 5y - 24 = 0 \rightarrow -y + 6 = 0$$

$y = 6, x = -1$

Las rectas se cortan en el punto $P(-1, 6)$.

$$\left.\begin{array}{l} x + y - 5 = 0 \\ 2x + y - 8 = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{x=-y+5} 2(-y + 5) + y - 8 = 0 \rightarrow -y + 2 = 0$$

$y = 2, x = 3$

Las rectas se cortan en el punto $Q(3, 2)$.

$$\left.\begin{array}{l} 6x + 5y - 24 = 0 \\ 2x + y - 8 = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{y=-2x+8} 6x + 5(-2x + 8) - 24 = 0 \rightarrow -4x + 16 = 0$$

$x = 4, y = 0 \rightarrow$ Las rectas se cortan en el punto $R(4, 0)$.

Calculamos las longitudes de los lados:

$\overrightarrow{PQ} = (4, -4) \rightarrow |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32}$

$\overrightarrow{PR} = (5, -6) \rightarrow |\overrightarrow{PR}| = \sqrt{5^2 + (-6)^2} = \sqrt{61}$

$\overrightarrow{QR} = (1, -2) \rightarrow |\overrightarrow{QR}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

Hallamos la altura, $h$, sobre el lado mayor:

$$\left.\begin{array}{l} (\sqrt{32})^2 = x^2 + h^2 \\ (\sqrt{5})^2 = (\sqrt{61} - x)^2 + h^2 \end{array}\right\} \rightarrow h = \frac{4\sqrt{61}}{61}\, u$$

Por tanto, el área es:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{61} \cdot \dfrac{4\sqrt{61}}{61}}{2} = 2\, u^2$$

47.- (119)

**La recta que pasa por el punto (2, 3) y es paralela a la recta $\frac{x-6}{4} = \frac{y+3}{-6}$ forma un triángulo con los ejes cartesianos. Calcula su área.**

Calculamos la recta:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 + 4\lambda \\ y = 3 - 6\lambda \end{array}\right\}$$

Determinamos el punto de corte con el eje $X$:

$$0 = 3 - 6\lambda \rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \rightarrow P(4, 0)$$

Hallamos el punto de corte con el eje $Y$:

$$0 = 2 + 4\lambda \rightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \rightarrow Q(0, 6)$$

Como el triángulo que se forma es rectángulo, el área es:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12\, u^2$$

48.- (123)

**Los puntos (0, −2), (1, 1), (5, 2) y (4, −1) son los vértices de un cuadrilátero. Obtén las ecuaciones de sus diagonales y su longitud. Indica de qué tipo de cuadrilátero se trata.**

Llamamos a los puntos $A(0, -2)$, $B(1, 1)$, $C(5, 2)$ y $D(4, -1)$.

Calculamos las ecuaciones de sus diagonales:

$$\frac{x}{5} = \frac{y+2}{4} \qquad \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-2}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41} \qquad |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$

$$\overrightarrow{AB} = (1, 3) \qquad \overrightarrow{DC} = (1, 3) \qquad \overrightarrow{BC} = (4, 1) \qquad \overrightarrow{AD} = (4, 1)$$

Es un paralelogramo.

49.- (125)

**Obtén la ecuación de la mediatriz del segmento cuyos extremos son (1, 5) y (—3, —7).**

Llamamos a los puntos $P(1, 5)$ y $Q(-3, -7)$.

Calculamos el punto medio, $M$: $M(-1, -1)$

Hallamos el vector $\overrightarrow{PQ} = (-4, -12)$.

Un vector normal a $\overrightarrow{PQ}$ es $(-3, 1)$.

La ecuación de la mediatriz es:

$$\frac{x+1}{-3} = \frac{y+1}{1}$$

50.- (128)

**Calcula el valor de $k$ para que las tres rectas: $2x + 5y - 1 = 0$, $-x + 2y + k = 0$ y $4x + 7y - 5 = 0$ se corten en el mismo punto. Determina las coordenadas de dicho punto.**

Hallamos las coordenadas del punto de corte:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 5y - 1 = 0 \\ 4x + 7y - 5 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow (3, -1)$$

$$-3 + 2 \cdot (-1) + k = 0 \rightarrow k = 5$$

51.- (129)

**Obtén los ángulos del triángulo cuyos vértices son (3, —5), (1, 6) y (—3, 2).**

Llamamos a los puntos $A(3, -5)$, $B(1, 6)$ y $C(-3, 2)$.

$\overrightarrow{AB} = (-2, 11)$ $\quad \overrightarrow{AC} = (-6, 7)$ $\quad \overrightarrow{CB} = (4, 4)$

$$\cos\alpha = \frac{|-2 \cdot (-6) + 11 \cdot 7|}{\sqrt{(-2)^2 + 11^2} \cdot \sqrt{(-6)^2 + 7^2}} \rightarrow \alpha = 30° \ 17' \ 47{,}21''$$

$$\cos\beta = \frac{|-2 \cdot 4 + 11 \cdot 4|}{\sqrt{(-2)^2 + 11^2} \cdot \sqrt{4^2 + 4^2}} \rightarrow \beta = 55° \ 18' \ 17{,}45''$$

$$180° - 30° \ 17' \ 47{,}21'' - 55° \ 18' \ 17{,}45'' = 94° \ 23' \ 55{,}34''$$

52.- (130)

**Halla un punto de la recta $2x - y + 18 = 0$ que equidiste de los puntos (3, —1) y (7, 3).**

Despejamos $y$ de la ecuación de la recta:

$$y = 2x + 18$$

Los puntos de la recta son de la forma: $(x, 2x + 18)$

Como los puntos deben estar a la misma distancia de la recta, tenemos que:

$$\sqrt{(x-3)^2+(2x+18-(-1))^2} = \sqrt{(x-7)^2+(2x+18-3)^2} \rightarrow x=-4$$

$$2\cdot(-4)+18=10$$

El punto es $(-4, 10)$.

53.- (135)

Halla la ecuación de la recta que corta a los ejes de coordenadas en los puntos (3, 0) y (0, 5). Comprueba que esa ecuación puede escribirse en la forma: $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$.

Comprueba que si una recta corta a los ejes en los puntos $(a, 0)$ y $(0, b)$, su ecuación puede escribirse en la forma: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Esta manera de escribir una recta se llama *forma canónica o segmentaria.*

Calculamos el vector director de la recta: $\vec{u_r}=(3,-5)$

$$\frac{x-3}{3}=\frac{y}{-5} \rightarrow \frac{x}{3}-1=-\frac{y}{5} \rightarrow \frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$$

Hallamos el vector director de la recta:

$$\vec{u_r}=(a,-b)$$

$$\frac{x-a}{a}=\frac{y}{-b} \rightarrow \frac{x}{a}-\frac{a}{a}=-\frac{y}{b} \rightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$