5 Números complejos

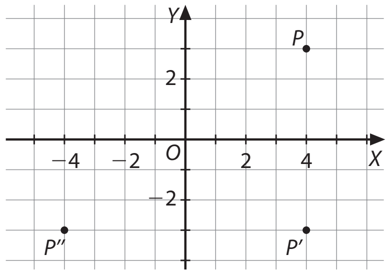
ESQUEMA DE LA UNIDAD

- 1. Números imaginarios. Números complejos en forma binómica — página 115
- 2. Representación gráfica de los números complejos — página 116
- 3. Operaciones con números complejos en forma binómica — página 118
  - 3.1. Suma de números complejos — página 118
  - 3.2. Producto de números complejos — página 118
  - 3.3. Cociente de números complejos — página 118
  - 3.4. Potencias de números complejos — página 119
- 4. Forma polar de un número complejo — página 120
- 5. Operaciones con números complejos en forma polar — página 123
  - 5.1. Suma de números complejos — página 123
  - 5.2. Producto de números complejos — página 123
  - 5.3. Cociente de números complejos — página 123
  - 5.4. Potencias de números complejos — página 124
  - 5.5. Radicación de números complejos — página 125

Cuestiones previas (página 114)

1. Dado el punto $P(4, 3)$, ¿cuáles son las coordenadas del punto P' simétrico de P respecto del eje de abscisas? ¿Y las del punto P'' simétrico de P respecto del origen de coordenadas? Dibújalos.

Las coordenadas son $P'(4, -3)$ y $P''(-4, -3)$.



2. Dados los vectores fijos de origen O y extremos $P(5, 2)$ y $P'(-5, -2)$, ¿cuáles son sus módulos? ¿Qué ángulos forman con el semieje positivo de abscisas?

- $|OP| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$, el vector OP forma con el semieje positivo de abscisas un ángulo $\alpha = \text{arctg}\,\dfrac{2}{5} = 21{,}801\,4°$
- $|OP'| = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$, el vector OP' forma con el semieje positivo de abscisas un ángulo $\alpha = \text{arctg}\,\dfrac{-2}{-5} =$ $= 21{,}801\,4° \Rightarrow 180° + 21{,}801\,4° = 201{,}801\,4°$

3. Racionaliza la expresión $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$.

Multiplicamos el numerador y el denominador por el conjugado del denominador:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} = \sqrt{2} - 1$$

4. Indica el discriminante de cada una de estas ecuaciones:

- **$x^2 + 9 = 0$**
- **$x^2 + x = 0$**
- **$x^2 - 6x + 9 = 0$**

¿Qué tipo de soluciones tiene cada una?

- $x^2 + 9 = 0$, su discriminante es $\Delta = -36 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-9} =$ $= \pm 3i$, dos soluciones complejas.
- $x^2 + x = 0$, su discriminante es $\Delta = 1 \Rightarrow x(x + 1) = 0$, las soluciones son $x = 0$ y $x = -1$, reales.
- $x^2 - 6x + 9 = 0$, su discriminante es $\Delta = 0 \Rightarrow x = 3$, solución real doble.

Actividades (páginas 115/125)

1 Calcula las soluciones de las ecuaciones en el conjunto $\mathbb{C}$:

a) **$x^2 + 16 = 0$**

b) **$x^2 + 8x + 25 = 0$**

c) **$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$**

a) $x^2 + 16 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-16} = \pm 4i \Rightarrow x_1 = 4i,\ x_2 = -4i$

b) $x^2 + 8x + 25 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-8 \pm \sqrt{64 - 100}}{2} = -4 \pm 3i$

$x_1 = -4 + 3i,\ x_2 = -4 - 3i$

c) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$, realizamos el cambio $x^2 = t$, obtenemos entonces la ecuación de segundo grado $t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow$ $t = 4$ y $t = -1$, deshaciendo el cambio, se tiene:

$x_1 = 2,\ x_2 = -2,\ x_3 = i,\ x_4 = -i$

2 Calcula los valores de las potencias siguientes:

a) **i^{19}**

b) **i^{29}**

c) **i^{56}**

a) Dividimos 19 entre 4 y obtenemos de resto 3; por tanto, $i^{19} = i^3 = -i$

b) Dividimos 29 entre 4 y obtenemos de resto 1; por tanto, $i^{29} = i^1 = i$

c) Dividimos 56 entre 4 y obtenemos de resto 0; por tanto, $i^{56} = i^0 = 1$

3 Dados los números complejos $z = 3 - 2i$ y $z' = 4 + i$, calcula:

a) **$z + z'$**

b) **$z \cdot z'$**

c) **z/z'**

d) **$1/z$**

e) **$1/z'$**

f) **$-z$**

g) **$-z'$**

h) **$\bar{z}$**

i) **$\bar{z}'$**

j) **$\bar{z} \cdot z'$**

a) $z + z' = (3 - 2i) + (4 + i) = 7 - i$

b) $z \cdot z' = (3 - 2i) \cdot (4 + i) = 12 + 3i - 8i + 2 = 14 - 5i$

c) $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{3-2i}{4+i} = \dfrac{3-2i}{4+i} \cdot \dfrac{4-i}{4-i} = \dfrac{10}{17} - \dfrac{11}{17}i$

d) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{3-2i} \cdot \dfrac{3+2i}{3+2i} = \dfrac{3+2i}{13} = \dfrac{3}{13} + \dfrac{2}{13}i$

e) $\dfrac{1}{z'} = \dfrac{1}{4+i} \cdot \dfrac{4-i}{4-i} = \dfrac{4-i}{17} = \dfrac{4}{17} - \dfrac{1}{17}i$

f) $-z = -3 + 2i$

g) $-z' = -4 - i$

h) $\bar{z} = 3 + 2i$

i) $\bar{z}' = 4 - i$

j) $\bar{z} \cdot z' = (3 + 2i) \cdot (4 + i) = 12 + 3i + 8i - 2 = 10 + 11i$

4 Calcula:

a) **$(2 - 2i)^6$**

b) **$(3 - 4i)^3$**

a) $(2 - 2i)^6 = (2 - 2i)^2 \cdot (2 - 2i)^2 \cdot (2 - 2i)^2 = -8i \cdot (-8i) \cdot$ $\cdot (-8i) = -512i$

b) $(3 - 4i)^3 = (3 - 4i)^2 \cdot (3 - 4i) = (-7 - 24i) \cdot (3 - 4i) =$ $= -21 - 72i + 28i - 96 = -117 - 44i$

5 Expresa los siguientes números complejos en forma polar:

a) **$-3 + 2i$**

b) **$-4i$**

c) **$5\,(\cos 20° - i \operatorname{sen} 20°)$**

d) **La unidad imaginaria positiva.**

a) $-3 + 2i \Rightarrow m = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13};\ \text{tg}\,\alpha = \dfrac{2}{-3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = 146{,}309\,9° \Rightarrow \sqrt{13}_{146{,}3°}$

b) $-4i = 4_{270°}$

c) $5(\cos 20° - i \operatorname{sen} 20°) = 5(\cos(-20°) + i \operatorname{sen}(-20°)) =$ $= 5_{-20°} = 5_{340°}$

d) $i = 1_{90°}$

6 Expresa el número complejo $3\,(\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°)$ en forma binómica.

Sustituyendo sen 150° y cos 150° por su valor se obtiene:

$$3(\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

7 **Calcula el opuesto y el conjugado de los siguientes números complejos, expresándolos en forma polar:**

a) $z = 1 - \sqrt{3}i$ ***b)*** $z = \frac{1}{2}(\cos 200° + i \operatorname{sen} 200°)$ ***c)*** $z = 4_{-15°}$

Expresamos en primer lugar los números complejos en forma polar:

a) $z = 1 - \sqrt{3}i = 2_{300°} \Rightarrow \overline{z} = 2_{60°}, -z = 2_{120°}$

b) $z = \frac{1}{2}(\cos 200° + i \operatorname{sen} 200°) = \left(\frac{1}{2}\right)_{200°} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{z} = \left(\frac{1}{2}\right)_{160°}, -z = \left(\frac{1}{2}\right)_{20°}$

c) $z = 4_{-15°} = 4_{345°} \Rightarrow \overline{z} = 4_{15°}, -z = 4_{165°}$

8 **Dados los números complejos $z = 3_{75°}$ y $z' = 4_{20°}$, calcula:**

a) $z + z'$	***c)*** z/z'	***e)*** $1/z'$	***g)*** $-z'$
b) $z \cdot z'$	***d)*** $1/z$	***f)*** $-z$	***h)*** $\overline{z}$

a) Para sumar los dos números complejos en forma polar es preciso, en primer lugar, expresarlos en forma binómica:

$z = 3_{75°} = 3(\cos 75° + i \operatorname{sen} 75°) = 0{,}78 + 2{,}90i$

$z' = 4_{20°} = 4(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°) = 3{,}76 + 1{,}37i$

$z + z' = (0{,}78 + 2{,}90i) + (3{,}76 + 1{,}37i) = 4{,}54 + 4{,}27i$

b) $z \cdot z' = 3_{75°} \cdot 4_{20°} = 12_{95°}$

c) $\frac{z}{z'} = 3_{75°}/4_{20°} = \left(\frac{3}{4}\right)_{55°}$

d) $\frac{1}{z} = \frac{1_{0°}}{3_{75°}} = \left(\frac{1}{3}\right)_{-75°} = \left(\frac{1}{3}\right)_{285°}$

e) $\frac{1}{z'} = \frac{1_{0°}}{4_{20°}} = \left(\frac{1}{4}\right)_{-20°} = \left(\frac{1}{4}\right)_{340°}$

f) $-z = 3_{75° + 180°} = 3_{255°}$

g) $-z' = 4_{20° + 180°} = 4_{200°}$

h) $\overline{z} = 3_{-75°} = 3_{285°}$

9 **Calcula la potencia cuarta del número complejo $3 - 3i$, expresándolo previamente en forma polar.**

$3 - 3i \Rightarrow m = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18}$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{-3}{3} \Rightarrow \alpha = 315°$

$(3 - 3i)^4 = \left(\sqrt{18}_{315°}\right)^4 = 324_{180°}$

10 **Calcula $(-4 + 2i)^5$, expresándolo en forma polar.**

$-4 + 2i \Rightarrow m = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20}$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{-4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = 153{,}43°$

$(4 + 2i)^5 = \left(\sqrt{20}_{153{,}49°}\right)^5 = 800\sqrt{5}_{47{,}17°}$

11 **Calcula las raíces cúbicas del número complejo $8 - 8i$.**

Expresamos, en primer lugar, el número $8 - 8i$ en forma polar:

$8 - 8i \Rightarrow m = \sqrt{8^2 + (-8)^2} = \sqrt{128}$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{-8}{8} \Rightarrow \alpha = 315°$;

$8 - 8i = \sqrt{128}_{315°}$

El módulo de las raíces cúbicas de $8 - 8i$ será:

$$\sqrt[3]{\sqrt{128}} = \sqrt[6]{128} = 2\sqrt[6]{2}$$

Y sus argumentos:

$\alpha_1 = \frac{315°}{3} = 105°$

$\alpha_2 = \frac{315° + 360°}{3} = 225°$

$\alpha_3 = \frac{315° + 720°}{3} = 345°$

Las tres raíces cúbicas de $8 - 8i$ son:

$$2\sqrt[6]{2}_{105°},\ 2\sqrt[6]{2}_{225°},\ 2\sqrt[6]{2}_{345°}$$

12 **Calcula las raíces quintas de 32.**

El número 32 en forma polar es $32_{0°}$.

El módulo de las raíces quintas de 32 es $\sqrt[5]{32} = 2$.

Y sus argumentos:

$\alpha_1 = \frac{0°}{5} = 0°$ $\alpha_4 = \frac{0° + 1080°}{5} = 216°$

$\alpha_2 = \frac{0° + 360°}{5} = 72°$ $\alpha_5 = \frac{0° + 1440°}{5} = 288°$

$\alpha_3 = \frac{0° + 720°}{5} = 144°$

Las raíces quintas de 32 son: $2_{0°},\ 2_{72°},\ 2_{144°},\ 2_{216°},\ 2_{288°}$

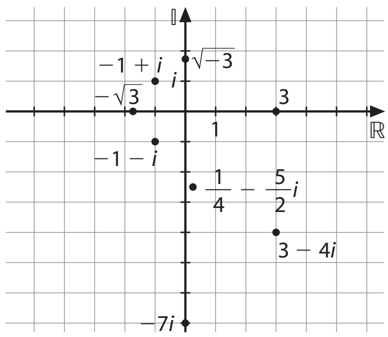
Ejercicios y problemas (páginas 131/133)

Números imaginarios. Forma binómica. Representación gráfica

1 **Representa gráficamente estos números complejos e indica cuáles son imaginarios puros y cuáles reales:**

$$3 - 4i,\ -7i,\ -\sqrt{3},\ \sqrt{-3},\ -1 - i,\ -1 + i,\ \frac{1}{4} - \frac{5}{2}i,\ 3$$

Imaginarios puros: $-7i$ y $\sqrt{-3}$; Reales: $-\sqrt{3}$ y 3



2 **Escribe los conjugados y los opuestos de:**

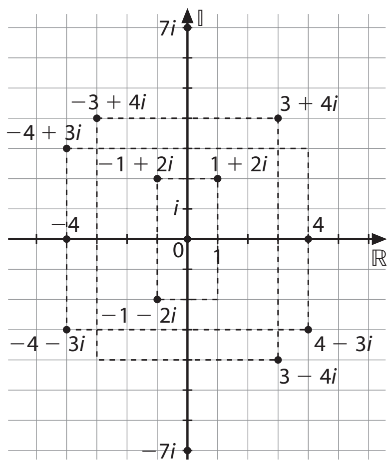
$$3 - i,\ 2 + 4i,\ -5i,\ \frac{1}{2} - \frac{1}{3}i$$

Conjugados: $3 + i$, $2 - 4i$, $5i$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}i$, respectivamente.

Opuestos: $-3 + i$, $-2 - 4i$, $5i$, $-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}i$, respectivamente.

3 **Representa gráficamente el conjugado y el opuesto de los siguientes números complejos:**

a) $z = -4 + 3i$	***c)*** $z = 4$	***e)*** $z = 3 - 4i$
b) $z = -7i$	***d)*** $z = -1 - 2i$	***f)*** $z = 0$



4 **¿Qué tienen en común los números complejos de afijos (4, 0), (−4, 0), (0, 4) y (0, −4)? ¿Por qué?**

Están situados sobre los ejes de coordenadas a igual distancia del origen. Su módulo vale 4.

5 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $x^2 + 36 = 0$ ***c)*** $x^3 - 27 = 0$

b) $x^2 - 36 = 0$ ***d)*** $x^2 - 4x + 5 = 0$

¿A qué campo numérico pertenecen las soluciones?

a) $x^2 + 36 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-36} \Rightarrow x = \pm 6i$, las dos soluciones son imaginarias.

b) $x^2 - 36 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{36} \Rightarrow x = \pm 6$, las dos soluciones son reales.

c) $x^3 - 27 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{27} = 3$, que es una solución real, pero en el campo de los complejos esta ecuación tiene tres soluciones, que son:

$x^3 = 27_{0°}$

$$x = \sqrt[3]{(27_{0°})} = \begin{cases} 3_{0°} = 3 \\ 3_{120°} = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i \\ 3_{240°} = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

d) $x^2 - 4x + 5 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} \Rightarrow = 2 \pm i$

Por tanto, sus dos soluciones son complejas.

6 **Resuelve la ecuación $x^2 - 2x + 10 = 0$ y comprueba que las raíces obtenidas la verifican.**

De forma análoga al último apartado del ejercicio anterior:

$$x^2 - 2x + 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} \Rightarrow x = 1 \pm 3i$$

Sus dos soluciones son complejas.

Para comprobar que, efectivamente, son soluciones de la ecuación sustituimos:

$(1 + 3i)^2 - 2 \cdot (1 + 3i) + 10 = 1 + 6i - 9 - 2 - 6i + 10 = 0$

$(1 - 3i)^2 - 2 \cdot (1 - 3i) + 10 = 1 - 6i - 9 - 2 + 6i + 10 = 0$

7 **Determina las soluciones, en el campo de los números complejos, de las siguientes ecuaciones:**

a) $x^2 + 1 = 0$ ***c)*** $x^2 - 4x + 29 = 0$

b) $x^4 + 81 = 0$ ***d)*** $x^3 - 5x^2 + 4x - 20 = 0$

a) $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$

b) $x^4 + 81 = 0 \Rightarrow x^4 - 81 = (x^2 + 9)(x^2 - 9) \Rightarrow x_1 = 3i$, $x_2 = -3i, x_3 = 3, x_4 = -3$

c) $x^2 - 4x + 29 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 116}}{2} = \dfrac{4 \pm 10i}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = 2 + 5i, x_2 = 2 - 5i$

d) $x^3 - 5x^2 + 4x - 20 = 0$

Primero aplicando Ruffini tenemos:

	1	−5	4	−20
5		5	0	20
	1	0	4	0

El polinomio dado lo podemos factorizar:

$$x^3 - 5x^2 + 4x - 20 = (x - 5)(x^2 + 4)$$

La soluciones de la ecuación polinómica dada son:

$$x_1 = 5, x_2 = -2i, x_3 = 2i$$

Operaciones con números complejos en forma binómica

8 **Efectúa las siguientes sumas en forma binómica:**

a) $(-2 + 3i) + (7 - 4i)$

b) $\left(\dfrac{1}{2} - 3i\right) + \left(\dfrac{3}{2} - i\right)$

c) $\left(\sqrt{2} + \sqrt{5}i\right) + \left(\sqrt{2} - 5\sqrt{5}i\right)$

a) $5 - i$

b) $2 - 4i$

c) $2\sqrt{2} - 4\sqrt{5}i$

9 **Calcula los siguientes productos:**

a) $(2 + 3i) \cdot (3 - 5i)$ ***c)*** $\left(\sqrt{3} + i\right) \cdot \left(\sqrt{3} - i\right)$

b) $\left(\dfrac{1}{2} - i\right) \cdot \left(\dfrac{3}{4} + 2i\right)$ ***d)*** $\left(\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)^2$

a) $21 - i$

b) $\dfrac{19}{8} + \dfrac{1}{4}i$

c) 4

d) $4i$

10 **Efectúa las siguientes operaciones:**

a) $(3 - 2i) \cdot (3 + i) - (1 - 2i) \cdot (4 + 2i)$

b) $\dfrac{4 - 2i}{2 + 3i} + (2 - 2i)$

a) $3 + 3i$

b) $\dfrac{28}{13} - \dfrac{42}{13}i$

11 **Realiza las siguientes operaciones:**

a) $[(3 - 2i) \cdot (3 + i) - (1 - 2i) \cdot (1 + 2i)]\,(5 + 4i)$

b) $\dfrac{2}{3 - i}$

c) $\dfrac{\sqrt{2} + i}{-i}$

d) $\dfrac{1 + \sqrt{5}i}{i}$

a) $42 + 9i$

b) $\dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{5}i$

c) $-1 + \sqrt{2}i$

d) $\sqrt{5} - i$

12 **Demuestra que es $\dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{b}{a^2 + b^2}i$ el inverso de $a + bi$.**

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{1}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

13 **Calcula $z = \dfrac{3}{i} + \dfrac{2i}{2 + i} + \dfrac{2 + 3i}{1 + 2i}$.**

$$z = \frac{3}{i} = \frac{2i}{2 + i} = \frac{2 + 3i}{1 + 2i} = -3i + \frac{2 + 4i}{5} + \frac{8 - i}{5} = \frac{10 - 12i}{5}$$

14 **Dados los números complejos $3 - bi$ y $a + 2i$, calcula a y b para que su producto sea $7 + 4i$.**

$(3 - bi)(a + 2i) = 7 + 4i \Rightarrow 3a + 6i - abi + 2b = 7 + 4i \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a + 2b = 7 \\ 6 - ab = 4 \rightarrow a = \dfrac{2}{b} \end{cases}$$

Sustituyendo tenemos:

$$\frac{6}{b} + 2b = 7 \Rightarrow 2b^2 - 7b + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \Rightarrow a = 1 \\ b = 3/2 \Rightarrow a = 4/3 \end{cases}$$

15 **Calcula:**

a) $\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)^2}$ ***b)*** $\dfrac{(2+i)\cdot(1-2i)^2}{2-i}$

a) -1 *b)* $\dfrac{7}{5}-\dfrac{24}{5}i$

16 **Calcula:**

a) i^{33} ***b)*** i^{185} ***c)*** i^{186} ***d)*** i^{64} ***e)*** $1/i^5$ ***f)*** i^{-2}

a) $i^{33}=i$

b) $i^{185}=i$

c) $i^{186}=i^2=-1$

d) $i^{64}=i^0=1$

e) $\dfrac{1}{i^5}=\dfrac{1}{i}=\dfrac{-i}{1}=-i$

f) $i^{-2}=\dfrac{1}{i^2}=\dfrac{1}{-1}=-1$

17 **Determina el valor de *m* para que el cociente $\dfrac{6+mi}{1-i}$ sea igual a $1+5i$.**

$$\frac{6+mi}{1-i}=\frac{6+mi}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}=\frac{6+6i+mi-m}{2}=$$
$$=\frac{6-m}{2}+\frac{6+m}{2}i=1+5i\Rightarrow\begin{cases}6-m=2\Rightarrow m=4\\6+m=10\Rightarrow m=4\end{cases}$$

18 **Determina el valor de *a* para que $(a-5i)^2$ sea un número imaginario puro.**

$(a-5i)^2=a^2-10ai-25$

Para que sea imaginario puro la parte real $a^2-25=0\Rightarrow$ $\Rightarrow a=5, a=-5$

19 **Halla *b* para que el producto $(3+bi)(3-5i)$ sea:**

a) **Un número real.**

b) **Un número imaginario puro.**

$(3+bi)(3-5i)=9-15i+3bi+5b$

a) Para que sea real: $9+5b=0\Rightarrow b=-9/5$

b) Para que sea imaginario puro: $-15+3b=0\Rightarrow b=5$

20 **Halla el valor de *k* para que el número $\left(\dfrac{4-ki}{3+i}\right)\cdot i^{563}$ sea imaginario puro.**

Si $\dfrac{4-ki}{3+i}\cdot i^{563}$ es imaginario puro, su parte real debe ser nula.

$i^{563}=i^3=-i$, por lo tanto, si operamos:

$$\frac{4-ki}{3+i}\cdot(-i)\cdot\frac{3-i}{3-i}=\frac{-3k-4+(k-12)i}{10}$$
$$-3k-4=0\Rightarrow k=\frac{-4}{3}$$

21 **Calcula el valor de *x* para que el complejo $\dfrac{3-2xi}{4+3i}$:**

a) **Sea imaginario puro.**

b) **Sea un número real.**

c) **Tenga su afijo en la bisectriz del primer cuadrante.**

$$\frac{3-2xi}{4+3i}\cdot\frac{4-3i}{4-3i}=\frac{12-6x+(-8x-9)i}{25}$$

a) Si ha de ser imaginario puro, su parte real debe ser nula: $12-6x=0\Rightarrow x=2$

b) Si ha de ser real, su parte imaginaria debe ser nula:

$$-8x-9=0\Rightarrow x=-9/8$$

c) Si su afijo debe estar en la bisectriz del primer cuadrante, deben ser iguales la parte real y la imaginaria:

$$12-6x=-8x-9\Rightarrow x=-21/2$$

22 **Calcula el cociente $\dfrac{x+i}{2+i}$ y determina el valor de *x* para que el módulo del complejo resultante sea $\sqrt{2}$.**

Operando se obtiene:

$$\frac{x+i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}=\frac{2x+1}{5}+\frac{2-x}{5}i$$

Si el módulo debe valer $\sqrt{2}$, tenemos:

$$\sqrt{2}=\sqrt{\left(\frac{2x+1}{5}\right)^2+\left(\frac{2-x}{5}\right)^2}$$
$$2=\frac{5x^2+5}{25}\Rightarrow 5x^2-45=0,\ x=\pm 3$$

23 **El número $\dfrac{2-(1+x)\,i}{1-xi}$ es real, calcúlalo.**

Operando se obtiene:

$$\frac{2-(1+x)i}{1-xi}\cdot\frac{1+xi}{1+xi}=\frac{2+(1+x)x+(2x-1-x)i}{1+x^2}$$

Si es real: $2x-1-x=0\Rightarrow x=1$

Sustituyendo: $\dfrac{2-2i}{1-i}=\dfrac{2(1-i)}{1-i}=2$

24 **Calcula el número real *a* para que el número complejo $z=\dfrac{3-2ai}{4-3i}$ esté situado en la bisectriz del primer cuadrante.**

Para que un número complejo tenga su afijo en la bisectriz del primer cuadrante, sus partes reales e imaginarias deberán coincidir:

$$\frac{3-2ai}{4-3i}\cdot\frac{4+3i}{4+3i}=\frac{(12+6a)+(9+8a)i}{25}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 12+6a=9-8a\Rightarrow 14a=-3\Rightarrow a=-3/14$$

Forma polar de un número complejo

25 **¿El producto de dos números complejos es un número real?**

a) **Si son conjugados, sí.**

b) **Si son opuestos, sí.**

c) **El producto de dos números complejos nunca puede ser un número real.**

Indica y razona la respuesta correcta.

a) Si son conjugados, sí, ya que $m_\alpha\cdot m_{-\alpha}=m^2{}_0$, que es un número real.

26 **Si dos números complejos tienen el mismo afijo:**

a) **Tienen el mismo argumento.**

b) **Tienen módulos proporcionales.**

c) **Su cociente tiene como módulo 1.**

Indica y razona la afirmación correcta.

c) Tienen el mismo módulo, luego su cociente tiene de módulo 1.

27 **¿Qué tipo de gráfica forman los afijos de los números complejos que tienen el mismo argumento?**

Forman una recta de pendiente la tangente del argumento de los complejos.

28 **¿Se puede decir que un número complejo es real si su argumento es π?**

Si su argumento es π el número complejo está situado sobre el eje real, en el semieje negativo.

29 **Si $z=m_\alpha$, ¿qué relación tienen con *z* los números complejos $m_{\alpha+180°}$ y $m_{-\alpha}$?**

$\overline{z}=m_{\alpha+180°}$ y $-z=m_{-\alpha}$

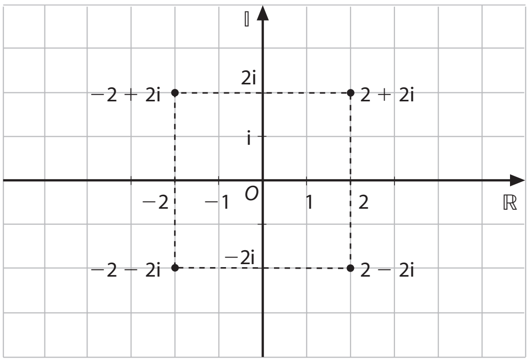
30 **¿Qué relación existe entre el argumento de un complejo y el de su conjugado? ¿Y con el de su opuesto?**

El argumento del conjugado difiere en 180° y el del opuesto es el mismo cambiado de signo.

31 **Calcula el módulo y el argumento de los siguientes números complejos, representándolos previamente:**

a) $2 - 2i$ ***c)*** $2i$ ***e)*** $-2i$ ***g)*** $-2 + 2i$

b) $2 + 2i$ ***d)*** $-2 - 2i$ ***f)*** 2 ***h)*** -2



a) $z = 2 - 2i \Rightarrow m = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\text{tg}\ \alpha = \left(\dfrac{-2}{2}\right) = (-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = 315°$, puesto que su afijo está en el cuarto cuadrante.

$$z = \left(2\sqrt{2}\right)_{315°} = \left(2\sqrt{2}\right)_{7\pi/4}$$

b) $z = 2 + 2i \ \Rightarrow\ m = 2\sqrt{2}$, $\text{tg}\ \alpha = \left(\dfrac{2}{2}\right) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = 45° = \dfrac{\pi}{4}$ rad, puesto que su afijo está en el primer cuadrante.

$$z = \left(2\sqrt{2}\right)_{45°} = \left(2\sqrt{2}\right)_{\pi/4}$$

c) $z = 2i \Rightarrow m = 2, \alpha = 90° = \dfrac{\pi}{2}$ rad $\Rightarrow z = 2_{90°} = 2_{\pi/2}$

d) $z = -2 - 2i \Rightarrow m = 2\sqrt{2}, \alpha = 225° = \dfrac{5\pi}{4}$ rad $\Rightarrow$

$\Rightarrow z = \left(2\sqrt{2}\right)_{225°} = \left(2\sqrt{2}\right)_{5\pi/4}$

e) $z = -2i \Rightarrow m = 2, \alpha = 270° = \dfrac{3\pi}{2}$ rad $\Rightarrow z = 2_{270°} = 2_{3\pi/2}$

f) $z = 2 \Rightarrow m = 2, \alpha = 0° = 0$ rad $\Rightarrow z = 2_{0°} = 2_0$

g) $z = -2 + 2i \Rightarrow m = 2\sqrt{2}$, $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{2}{-2} = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = 135°$, puesto que su afijo está en el segundo cuadrante.

$$z = \left(2\sqrt{2}\right)_{135°} = \left(2\sqrt{2}\right)_{3\pi/4}$$

h) $z = -2 \Rightarrow m = 2, \alpha = 180° = \pi$ rad $\Rightarrow z = 2_{180°} = 2_{\pi}$

32 **Expresa en forma polar y trigonométrica los siguientes complejos:**

a) $-2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$ ***c)*** $4 - 4\sqrt{3}i$

b) $4i$ ***d)*** $3 + 3i$

a) $z = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i = 4_{5\pi/4} = 4\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + i\ \text{sen}\ \dfrac{5\pi}{4}\right)$

b) $z = 4i = 4_{\pi/2} = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\ \text{sen}\ \dfrac{\pi}{2}\right)$

c) $z = 4 - 4\sqrt{3}i = 8_{5\pi/3} = 8\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\ \text{sen}\ \dfrac{5\pi}{3}\right)$

d) $z = 3 + 3i = \left(3\sqrt{2}\right)_{\pi/4} = 3\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\ \text{sen}\ \dfrac{\pi}{4}\right)$

33 **Expresa en forma binómica estos complejos:**

a) $3_{\frac{3\pi}{4}}$ ***d)*** $8_{\frac{4\pi}{3}}$

b) $1_{\frac{\pi}{6}}$ ***e)*** $3_{\frac{\pi}{4}}$

c) 2_{π}

a) $3_{3\pi/4} = 3\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\ \text{sen}\ \dfrac{3\pi}{4}\right) = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2} + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}i$

b) $1_{\pi/6} = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\ \text{sen}\ \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$

c) $2_{\pi} = 2(\cos\pi + i\ \text{sen}\ \pi) = -2$

d) $8_{4\pi/3} = 8\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\ \text{sen}\ \dfrac{4\pi}{3}\right) = -4 - 4\sqrt{3}i$

e) $3_{\pi/4} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}i$

34 **Expresa en forma binómica los siguientes números complejos:**

a) $2\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\ \text{sen}\ \dfrac{5\pi}{3}\right)$

b) $3\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\ \text{sen}\ \dfrac{3\pi}{4}\right)$

c) $3\ (\cos 3 + i\ \text{sen}\ 3)$

a) $2\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\ \text{sen}\ \dfrac{5\pi}{3}\right) = 1 - \sqrt{3}i$

b) $3\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\ \text{sen}\ \dfrac{3\pi}{4}\right) = -3 + 3i$

c) $3(\cos 3 + i\ \text{sen}\ 3) = -2{,}97 + 0{,}42i$

35 **Representa gráficamente estos números complejos:**

a) $3 - 2i$

b) $4 + 2i$

c) $-1 - 3i$

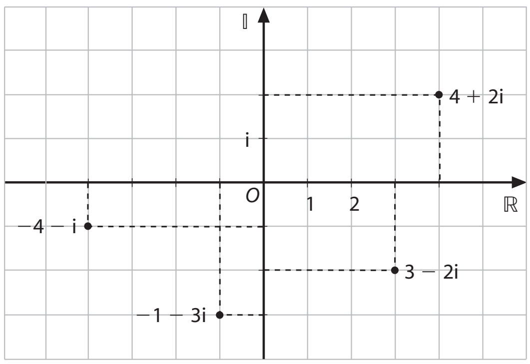
d) $-4 - i$

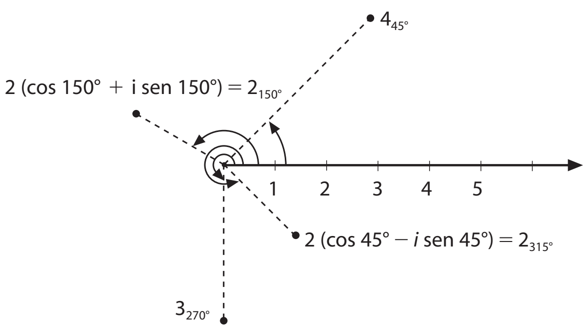
e) $4_{45°}$

f) $3_{270°}$

g) $2\ (\cos 150° + i\ \text{sen}\ 150°)$

h) $2\ (\cos 45° - i\ \text{sen}\ 45°)$





36 **Calcula el conjugado, el opuesto y el inverso de los números complejos del ejercicio anterior.**

a) $z = 3 - 2i$

$\overline{z} = 3 + 2i$

$-z = -3 + 2i$

$\dfrac{1}{z} = \dfrac{3}{13} + \dfrac{2}{13}i$

b) $z = 4 + 2i$

$\overline{z} = 4 - 2i$

$-z = -4 - 2i$

$\dfrac{1}{z} = \dfrac{4}{20} + \left(-\dfrac{2}{20}\right)i = \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{10}i$

c) $z = -1 - 3i$

$\overline{z} = -1 + 3i$

$-z = 1 + 3i$

$\dfrac{1}{z} = -\dfrac{1}{10} + \dfrac{3}{10}i$

d) $z = -4 - i$

$\overline{z} = -4 + i$

$-z = 4 + i$

$\dfrac{1}{z} = -\dfrac{4}{17} + \dfrac{i}{17}$

e) $z = 4_{45°}$

$\overline{z} = 4_{-45°} = 4_{315°}$

$-z = 4_{225°}$

$\dfrac{1}{z} = \left(\dfrac{1}{4}\right)_{-45°} = \left(\dfrac{1}{4}\right)_{315°}$

f) $z = 3_{270°}$

$\overline{z} = 3_{90°}$

$-z = 3_{90°}$

$\dfrac{1}{z} = \left(\dfrac{1}{3}\right)_{-270°} = \left(\dfrac{1}{3}\right)_{90°}$

g) $z = 2(\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°)$

$\overline{z} = 2(\cos 150° - i \operatorname{sen} 150°) = 2(\cos 210° + i \operatorname{sen} 210°)$

$-z = 2(\cos 330° + i \operatorname{sen} 330°)$

$\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2}(\cos(-150°) + i \operatorname{sen}(-150°)) =$

$= \dfrac{1}{2}(\cos 210° + i \operatorname{sen} 210°)$

h) $z = 2(\cos 45° - i \operatorname{sen} 45°) = 2(\cos 315° + i \operatorname{sen} 315°)$

$\overline{z} = 2(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)$

$-z = 2(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°)$

$\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2}(\cos(-315°) + i \operatorname{sen}(-315°)) =$

$= \dfrac{1}{2}(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)$

37 **Calcula el valor de *m* para que el número complejo $m + 4i$ tenga el mismo módulo que $\dfrac{5}{\sqrt{2}} - \dfrac{5\sqrt{2}}{2}i$.**

Hallamos primero el módulo de $m + 4i$ y lo igualamos al módulo de $\dfrac{5}{\sqrt{2}} - \dfrac{5\sqrt{2}}{2}i$. Mediante este procedimiento obtenemos el valor de *m:*

$\sqrt{m^2 + 16} = \sqrt{\dfrac{25}{2} + \dfrac{50}{4}} \Rightarrow m^2 = 9 \Rightarrow m = \pm 3$

Por tanto, los números complejos serían $3 + 4i$ y $-3 + 4i$.

Operaciones con números complejos en forma polar

38 **Resuelve los siguientes productos:**

a) $(3)_{\frac{3\pi}{4}} \cdot (2)_{\frac{\pi}{6}}$

b) $\left(\sqrt{2}\right)_{\frac{\pi}{3}} \cdot \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)_{\frac{5\pi}{3}}$

c) $-3 \cdot 5_{45°}$

d) $(4)_{\frac{\pi}{12}} \cdot (2)_{\frac{5\pi}{18}} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)_{\pi}$

e) $(2 + 2i) \cdot \left(\sqrt{2}\right)_{\frac{\pi}{3}}$

f) $6 \cdot 2_{15°}$

a) $3_{3\pi/4} \cdot 2_{\pi/6} = 6_{11\pi/12}$

b) $\left(\sqrt{2}\right)_{\pi/3} \cdot \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)_{5\pi/3} = 1_{2\pi} = 1_0$

c) $-3 \cdot 5_{45°} = 3_{180°} \cdot 5_{45°} = 15_{225°}$

d) $4_{\pi/12} \cdot 2_{5\pi/18} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)_{\pi} = \left(\dfrac{8}{3}\right)_{49\pi/36}$

e) $(2 + 2i) \cdot \left(\sqrt{2}\right)_{\pi/3} = \left(2\sqrt{2}\right)_{\pi/4} \cdot \left(\sqrt{2}\right)_{\pi/3} = 4_{7\pi/12}$

f) $6 \cdot 2_{15°} = 6_{0°} \cdot 2_{15°} = 12_{15°}$

39 **Calcula los siguientes cocientes:**

a) $\dfrac{10_{\frac{\pi}{3}}}{2_{\frac{\pi}{3}}}$ ***b)*** $\dfrac{2_{\pi}}{-2}$ ***c)*** $\dfrac{6_{30°}}{2_{50°}}$ ***d)*** $\dfrac{12_{30°}}{i}$

a) $\dfrac{10_{\pi/3}}{2_{\pi/3}} = 5_0$

b) $\dfrac{2_{\pi}}{-2} = 1_0$

c) $\dfrac{6_{30°}}{2_{50°}} = 3_{-20°} = 3_{340°}$

d) $\dfrac{12_{30°}}{i} = 12_{-60°} = 12_{300°}$

40 **Calcula:**

a) $(3 - 2i)^4$

b) $\left(\sqrt{3} - i\right)^5$

c) $\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)^2$

d) $(2 + i)^3$

a) $(3 - 2i)^4 = (3 - 2i)^2(3 - 2i)^2 = (9 - 12i - 4)(9 - 12i - 4) =$
$= (5 - 12i)^2 = 25 - 120i - 144 = -119 - 120i$

b) $\left(\sqrt{3} - i\right)^5 = \left(\sqrt{3} - i\right)^2\left(\sqrt{3} - i\right)^2\left(\sqrt{3} - i\right) =$

$= \left(3 - -2\sqrt{3}i - 1\right)\left(3 - 2\sqrt{3}i - 1\right)\left(\sqrt{3} - i\right) =$

$= \left(2 - 2\sqrt{3}i\right)^2\left(\sqrt{3} - i\right) = \left(-8 - 8\sqrt{3}i\right)\left(\sqrt{3} - i\right) =$

$= -16\sqrt{3} - 16i$

c) $\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)^2 = -\dfrac{1}{2}i$

d) $(2 + i)^3 = (2 + i)^2(2 + i) = (4 + 4i - 1)(2 + i) =$
$= (3 + 4i)(2 + i) = 6 + 3i + 8i - 4 = 2 + 11i$

41 **Calcula:**

a) $(1 - 2i)^{52}$

b) $\left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{12}$

c) $\sqrt[4]{-81i}$

d) $\sqrt[5]{3\sqrt{3} + \sqrt{3}i}$

a) $(1 - 2i)^{52} = \left(\sqrt{5}_{296,57°}\right)^{52} = 5^{26}{}_{296,57° \cdot 52} = 5^{26}{}_{301,64°}$

b) $\left(\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{12} = \left(\dfrac{2_{60°}}{\sqrt{2}_{315°}}\right)^{12} = 2^6{}_{(60° - 315°) \cdot 12} = 2^6{}_{180°} = -64$

c) $\sqrt[4]{-81i} = \sqrt[4]{81_{270°}} \Rightarrow 3_{67,5°}; 3_{157,5°}; 3_{247,5°}; 3_{337,5°}$

d) $\sqrt[5]{3\sqrt{3} + \sqrt{3}i} = \sqrt[5]{\sqrt{30}_{18,43°}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt[10]{30}_{3,69°}; \sqrt[10]{30}_{75,69°}; \sqrt[10]{30}_{147,69°}; \sqrt[10]{30}_{219,69°}; \sqrt[10]{30}_{291,69°}$

42 **Calcula el módulo y el argumento de:**

$$\left(-1+\sqrt{3}i\right)^3\cdot\left(\sqrt{3}+i\right)^4\cdot\left(\sqrt{3}-i\right)+i^{31}$$

Calculamos cada factor paso a paso, trabajando en forma polar:

$z_1=-1+\sqrt{3}i \Rightarrow m=\sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{4}=2$

$\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{3}\Rightarrow\alpha=120°$, puesto que el afijo está en el segundo cuadrante.

Por tanto:

$\left(-1+\sqrt{3}i\right)^3=(2_{120°})^3=8_{360°}=8_{0°}$

$z_2=\sqrt{3}+i \Rightarrow m=2$

$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\alpha=30°$, puesto que el afijo está en el primer cuadrante.

Por tanto:

$\left(\sqrt{3}+i\right)^4=(2_{30°})^4=16_{120°}$

$z_3=\sqrt{3}-i \Rightarrow m=2$

$\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\alpha=330°$, puesto que el afijo está en el cuarto cuadrante.

Por tanto:

$\sqrt{3}-i=2_{330°}$

$z_4=i^{31}=i^3=-i$

Sustituyendo y realizando las operaciones que se indican, se obtiene:

$z_1\cdot z_2\cdot z_3+z_4=8_{0°}\cdot 16_{120°}\cdot 2_{330°}-i=256_{450°}-i=256_{90°}-i=$
$=256i-i=255i$

Por tanto: $m=255$, $\alpha=90°$

43 **Resuelve las siguientes potencias:**

a) $\left[\left(\sqrt{3}\right)_{\frac{\pi}{3}}\right]^4$ ***b)*** $\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6}\right)^3$ ***c)*** $\left(1_{\frac{3\pi}{2}}\right)^{50}$

a) $\left(\sqrt{3}_{\pi/3}\right)^4=9_{4\pi/3}$

b) $\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6}\right)^3=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}$

c) $(1_{3\pi/2})^{50}=1_{75\pi}=1_{\pi}$

44 **Representa gráficamente las seis primeras potencias del número $z=2-2i$.**

$z=2-2i$

$z^1=2\sqrt{2}_{315°}$

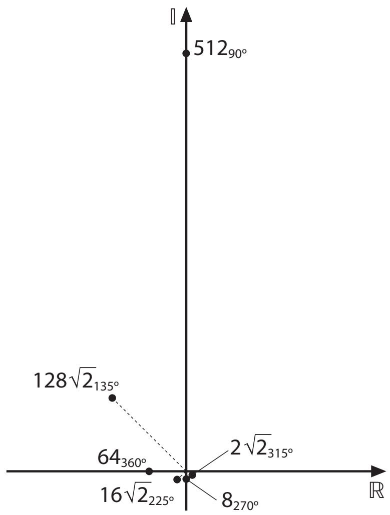
$z^2=8_{630°}=8_{270°}$

$z^3=16\sqrt{2}_{945°}=16\sqrt{2}_{225°}$

$z^4=64_{1\,260°}=64_{180°}$

$z^5=128\sqrt{2}_{1\,575°}=128\sqrt{2}_{135°}$

$z^6=512_{1\,890°}=512_{90°}$



45 **Calcula las siguientes raíces:**

a) $\sqrt{3_{(\pi/3)}}$

b) $\sqrt{-i}$

c) $\sqrt{2-2i}$

d) $\sqrt[4]{-625}$

e) $\sqrt[3]{8i}$

f) $\sqrt[5]{243_{60°}}$

a) Hay dos raíces con módulo $\sqrt{3}$, y argumentos:

$$\alpha_1=\frac{\frac{\pi}{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$$

$$\alpha_2=\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{2}=\frac{7\pi}{6}$$

Por tanto, las raíces son:

$\sqrt{3}_{\pi/6}$ y $\sqrt{3}_{7\pi/6}$

b) Existen dos raíces cuadradas de $-i$:

$\sqrt{-i}=\sqrt{1_{270°}}$

$\sqrt{1_{270°}}=\begin{cases}1_{135°}\\1_{315°}\end{cases}$

c) $\sqrt{2-2i}=\sqrt{(\sqrt{8})_{315°}}=\begin{cases}(\sqrt[4]{8})_{157,5°}\\(\sqrt[4]{8})_{337,5°}\end{cases}$

d) $\sqrt[4]{-625}=\sqrt[4]{625_{\pi}}=\begin{cases}5_{\pi/4}\\5_{3\pi/4}\\5_{5\pi/4}\\5_{7\pi/4}\end{cases}$

e) $\sqrt[3]{8i}=\sqrt[3]{8_{\pi/2}}=\begin{cases}2_{\pi/6}\\2_{5\pi/6}\\2_{9\pi/6}\end{cases}$

f) $\sqrt[5]{243_{60°}}=\begin{cases}3_{12°}\\3_{84°}\\3_{156°}\\3_{228°}\\3_{300°}\end{cases}$

46 **Calcula:**

a) $\sqrt[5]{1+\sqrt{3}i}$

b) $(1-i)^{5/4}$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{-1+i}}{\sqrt{1+\sqrt{3}i}}$

d) $\sqrt{\sqrt{3+3\sqrt{3}i}}$

a) $\sqrt[5]{1+\sqrt{3}i}=\sqrt[5]{2_{60°}}\Rightarrow\sqrt[5]{2}_{12°};\ \sqrt[5]{2}_{84°};\ \sqrt[5]{2}_{156°};\ \sqrt[5]{2}_{228°};\ \sqrt[5]{2}_{300°}$

b) $(1-i)^{5/4}=\left(\sqrt{2}_{315°}\right)^{5/4}=\sqrt[8]{32}_{393,75°}$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{-1+i}}{\sqrt{1-\sqrt{3}i}}=\dfrac{\sqrt[6]{\left((\sqrt{2})_{135°}\right)^2}}{\sqrt[6]{(2_{60°})^3}}=\sqrt[6]{\dfrac{2_{270°}}{8_{180°}}}=\sqrt[6]{\left(\dfrac{1}{4}\right)_{90°}}\Rightarrow$

$\Rightarrow\left(\sqrt[3]{1/2}\right)_{15°};\ \left(\sqrt[3]{1/2}\right)_{75°};\ \left(\sqrt[3]{1/2}\right)_{135°};\ \left(\sqrt[3]{1/2}\right)_{195°};\ \left(\sqrt[3]{1/2}\right)_{255°};$
$\left(\sqrt[3]{1/2}\right)_{315°}$

d) $\sqrt{\sqrt{3+3\sqrt{3}i}}=\sqrt[4]{6_{60°}}\Rightarrow\sqrt[4]{6}_{15°};\ \sqrt[4]{6}_{105°};\ \sqrt[4]{6}_{195°};\ \sqrt[4]{6}_{285°}$

47 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $z^4 + 81 = 0$ ***d)*** $(z+1)^2 + 25 = 0$

b) $z^4 + 2z^2 + 1 = 0$ ***e)*** $z^2 + (3 - i) + (2 - 2i) = 0$

c) $z^6 + 32z = 0$ ***f)*** $z^3 + z^2 + 15z - 17 = 0$

a) $z^4 + 81 = 0$ debe tener cuatro soluciones en el campo de los complejos.

$z = \sqrt[4]{-81}$. Escribimos -81 en forma polar, esto es, $81_{180°}$, con lo que las soluciones son las raíces cuartas de este número complejo:

$$z = \sqrt[4]{81_{180°}} \begin{cases} 3_{45°} \\ 3_{135°} \\ 3_{225°} \\ 3_{315°} \end{cases}$$

b) $z^4 + 2z^2 + 1 = 0$, trabajamos como con las bicuadradas, pero en el campo de los complejos.

Hacemos $x = z^2$, con lo que $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = -1$, que es una solución doble.

Pero $z^2 = -1$, con lo que las soluciones de la ecuación son: i y $-i$, ambas dobles.

c) $z^6 + 32z = 0$, debe tener seis soluciones en el campo de los complejos.

$z(z^5 + 32) = 0 \Rightarrow z = 0$ y $z = \sqrt[5]{-32}$. Calculamos las raíces quintas de -32, expresando previamente este número en forma polar: $32_{180°}$.

$$z = \sqrt[5]{(32_{180°})} \begin{cases} 2_{36°} \\ 2_{108°} \\ 2_{180°} \\ 2_{252°} \\ 2_{324°} \end{cases}$$

Las seis soluciones son 0, $2_{36°}$, $2_{108°}$, $2_{180°}$, $2_{252°}$ y $2_{324°}$.

d) $(z+1)^2 + 25 = 0$. Esta ecuación tiene dos soluciones en el campo de los complejos.

$(z+1)^2 = -25 \Rightarrow z + 1 = \sqrt{-25} \Rightarrow z = -1 \pm 5i$

Es decir, las dos soluciones son:

$$-1 + 5i \text{ y } -1 - 5i$$

e) $z^2 + 5 - 3i = 0$. Debe tener dos soluciones complejas.

$z^2 = -5 + 3i$, por lo que: $z = \sqrt{(-5 + 3i)}$

Expresamos el radicando en forma polar y averiguamos las dos raíces que serán las soluciones de la ecuación.

$m = \sqrt{34}$, tg $\alpha = -\dfrac{3}{5} \Rightarrow \alpha = 149{,}04°$, pues su afijo está en el segundo cuadrante. Por tanto:

$$z = \sqrt{(-5 + 3i)} = \sqrt{(\sqrt{34}_{149,04°})} =$$

$$= \begin{cases} \sqrt[4]{34}_{74,52°} = 0{,}64 + 2{,}33i \\ \sqrt[4]{34}_{254,52°} = -0{,}64 - 2{,}33i \end{cases}$$

Así pues, las dos soluciones de la ecuación son:

$$0{,}64 + 2{,}33i \text{ y } -0{,}64 - 2{,}33i$$

f) $z^3 + z^2 + 15z - 17 = 0$, esta ecuación debe tener tres soluciones complejas.

Por Ruffini obtenemos la primera solución: $z = 1 = 1_{0°}$

El cociente, $z^2 + 2z + 17 = 0$, debe tener dos soluciones.

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{-2 \pm 8i}{2} = -1 \pm 4i$$

Así pues, las tres soluciones de la ecuación son:

$$1, -1+4i \text{ y } -1-4i$$

Problemas de aplicación

48 **Calcula el inverso de estos números complejos:**

a) $5_{\pi/4}$ ***b)*** $6i$ ***c)*** $2 - 2i$

¿Qué relación hay entre los módulos de un número complejo y los de su inverso? ¿Y entre los argumentos?

a) $\dfrac{1}{5_{\pi/4}} = \left(\dfrac{1}{5}\right)_{-\pi/4}$

b) $\dfrac{1}{6i} = \dfrac{1}{6_{90°}} = \left(\dfrac{1}{6}\right)_{-90°}$

c) $\dfrac{1}{2 - 2i} = \dfrac{1}{\sqrt{8}_{315°}} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{8}}\right)_{-315°}$

Los módulos de un número complejo y de su inverso son inversos y los argumentos opuestos.

49 **Halla los complejos que cumplan que el cuadrado del inverso del opuesto dividido entre $(1/8)_{30°}$ dé $2i$.**

Si $z = m_\alpha$, el enunciado pide averiguar los complejos z que cumplen que $\left[\dfrac{1}{-(m_\alpha)}\right]^2 : \left(\dfrac{1}{8}\right)_{30°} = 2_{270°}$.

Como $\left[\dfrac{1}{-(m_\alpha)}\right]^2 = \left[\dfrac{1}{m_{180°+\alpha}}\right]^2 = \left[\left(\dfrac{1}{m}\right)_{360° - 180° - \alpha}\right]^2 =$

$= \left(\dfrac{1}{m}\right)^2_{360° - 2\alpha}$, sustituyendo tenemos:

$\left[\left(\dfrac{1}{m}\right)^2_{360° - 2\alpha}\right] : \left(\dfrac{1}{8}\right)_{30°} = 2_{270°} \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\dfrac{1}{m}\right)^2 : \left(\dfrac{1}{8}\right) = 2$ y $360° - 2\alpha - 30° = 270°$

de lo que se obtiene: $m = 2$ y $\alpha = 30°$

Así pues, los complejos son: $2_{30° + k \cdot 360°}$, $k \in \mathbb{Z}$

50 **Determina dos números complejos z_1 y z_2 sabiendo que su cociente es 3, que la suma de sus argumentos es $\pi/3$ y que la suma de sus módulos es 4.**

$\dfrac{m_\alpha}{m'_\beta} = 3 \Rightarrow \dfrac{m}{m'} = 3$ y $\alpha - \beta = 0°$

$\begin{cases} \alpha - \beta = 0° \\ \alpha + \beta = 60° \end{cases} \Rightarrow \alpha = 30°, \; \beta = 30°$

$\begin{cases} m = 3m' \\ m + m' = 4 \end{cases} \Rightarrow m' = 1, \; m = 3$

Los números son $3_{30°}$ y $1_{30°}$.

51 **Calcula dos complejos cuyo cociente es 4, sus argumentos suman 40° y la suma de sus módulos es 14.**

Sean los complejos m_α y n_β.

Su cociente es 4, es decir $4_{0°}$, por lo que tenemos:

$$\frac{m}{n} = 4 \text{ y } \alpha - \beta = 0°$$

La suma de sus argumentos es 40°, por lo que tenemos:

$$\alpha + \beta = 40°$$

La suma de sus módulos es 14: $m + n = 14$

Agrupando las ecuaciones deducidas del enunciado en función de sus incógnitas, se obtiene:

$\begin{cases} m/n = 4 \\ m + n = 14 \end{cases} \Rightarrow m = \dfrac{56}{5}, n = \dfrac{14}{5}$

$\begin{cases} \alpha - \beta = 0° \\ \alpha + \beta = 40° \end{cases} \Rightarrow \alpha = 20°, \beta = 20°$

Por lo que los complejos buscados son:

$$m_\alpha = \left(\frac{56}{5}\right)_{20°} \text{ y } n_\beta = \left(\frac{14}{5}\right)_{20°}$$

52 **Calcula dos números complejos tales que su producto sea 8*i* y uno de ellos sea el cuadrado del otro.**

Sean los complejos m_α y n_β. Su producto es 8*i*, es decir, $8_{\pi/2}$:

$$m_\alpha \cdot n_\beta = 8_{\pi/2} \Rightarrow m \cdot n = 8 \text{ y } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

Uno de ellos es el cuadrado del otro:

$$m_\alpha = (n_\beta)^2 = (n^2)_{2\beta} \Rightarrow m = n^2 \text{ y } \alpha = 2\beta$$

Agrupando las ecuaciones deducidas del enunciado en función de sus incógnitas, se obtiene:

$$\begin{cases} m \cdot n = 8 \\ m = n^2 \end{cases} \Rightarrow m = 4, n = 2$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \pi/2 \\ \alpha = 2\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{6}$$

Con lo que los dos complejos buscados son:

$$m_\alpha = 4_{\pi/3} \text{ y } n_\beta = 2_{\pi/6}$$

53 **El producto de dos números complejos es 3*i*, y el cubo de uno de ellos dividido por el otro es 1/3. Calcúlalos.**

Sean los complejos: m_α y n_β. Del enunciado se deduce que:

$$m_\alpha \cdot n_\beta = 3_{\pi/2} \Rightarrow m \cdot n = 3 \text{ y } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{{m_\alpha}^3}{n_\beta} = \left(\frac{1}{3}\right)_{0°} \Rightarrow \frac{m^3}{n} = \frac{1}{3} \text{ y } 3\alpha - \beta = 0$$

Agrupando las ecuaciones deducidas del enunciado en función de sus incógnitas, se obtiene:

$$\begin{cases} m \cdot n = 3 \\ \dfrac{m^3}{n} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow m = 1, n = 3$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2} \\ 3\alpha - \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{8}, \beta = \frac{3\pi}{8}$$

Con lo que los complejos son:

$m_\alpha = 1_{\pi/8}$, $n_\beta = 3_{3\pi/8}$

54 **Dos números complejos tienen el mismo módulo, sus argumentos suman 50° y uno de ellos es el conjugado del cuadrado del otro. Calcúlalos.**

Sean los complejos m_α y n_β. Del enunciado se deduce:

$$m = n, \alpha + \beta = 50°$$

$$m_\alpha = \overline{[(n_\beta)^2]} = \overline{[(n^2)_{2\beta}]} = (n^2)_{360° - 2\beta} \Rightarrow m = n^2, \alpha = 360° - 2\beta$$

Agrupando las ecuaciones deducidas del enunciado en función de sus incógnitas, se obtiene:

$$\begin{cases} m = n \\ m = n^2 \end{cases} \Rightarrow m = 1, n = 1$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 50° \\ \alpha = 360° - 2\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = -260° = 100°, \ \beta = 310°$$

Con lo que los complejos son:

$m_\alpha = 1_{100°}$, $n_\beta = 1_{310°}$

55 **Determina los números complejos que cumplan que el cubo de su conjugado coincida con su opuesto.**

Hay que hallar la expresión de los complejos tales que el cubo de su conjugado coincida con el opuesto, es decir: $(\overline{z})^3 = -z$

Si $z = m_\alpha$, el enunciado se traduce en:

$(m_{360° - \alpha})^3 = m_{180° + \alpha} \Rightarrow m^3 = m$ y $3(360° - \alpha) = 180° + \alpha$

$m = 1$, puesto que no consideramos la solución trivial $m = 0$, y $m > 0$.

$3(360° - \alpha) = 180° + \alpha \Rightarrow \alpha = 225° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$

Por tanto los complejos buscados son:

$$z = 1_{225° + k \cdot 360°}, k \in \mathbb{Z}$$

56 **Calcula todos los números complejos que cumplan que el cuadrado de su inverso sea el opuesto de su conjugado.**

Hay que encontrar la expresión de $z \in \mathbb{C}$, tal que:

$$\left(\frac{1}{z}\right)^2 = -\overline{z}$$

Si $z = m_\alpha$, esta igualdad se traduce en:

$$\left(\frac{1}{m_\alpha}\right)^2 = -(m_{360° - \alpha}) = m_{180° - \alpha}$$

y, como: $\left(\dfrac{1}{m_\alpha}\right)^2 = \left[\left(\dfrac{1}{m}\right)_{360° - \alpha}\right]^2 = \left(\dfrac{1}{m^2}\right)_{2(360° - \alpha)}$

tenemos:

$$\left(\frac{1}{m^2}\right)_{2(360° - \alpha)} = m_{180° - \alpha} \Rightarrow \frac{1}{m^2} = m$$

y $720° - 2\alpha = 180° - \alpha$

de lo que se deduce que:

$m = 1$ y $\alpha = 180° + k \cdot 360°, \quad k \in \mathbb{Z}$

Por tanto, los complejos buscados son:

$$z = 1_{180° + k \cdot 360°}, k \in \mathbb{Z}$$

57 **Una de las raíces cúbicas de un número complejo es 8*i*. Calcula dicho número y las otras raíces.**

Dado que $8i = 8_{90°}$ es una de las raíces cúbicas, $z = (8_{90°})^3 = 512_{270°}$, y haciendo uso de la interpretación gráfica de la radicación en los complejos, se puede deducir que las otras dos raíces son: $8_{210°}$ y $8_{330°}$

58 **Encuentra el número complejo que sumado a $\left(-\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)^3$ da como resultado 4 (cos 315° + *i* sen 315°). Expresa la solución en forma polar, binómica y trigonométrica.**

Dado que hay que sumar, es conveniente trabajar en notación binómica o trigonométrica.

$(a + bi) + \left(-\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)^3 = 4(\cos 315° + i \text{ sen } 315°)$

Primero se calcula la potencia del binomio $\left(-\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)^3$, para lo cual es conveniente usar notación polar:

$m = 2$, tg $\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = 135°$, puesto que el afijo está en el segundo cuadrante.

Por tanto: $\left(-\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)^3 = (2_{135°})^3 = 8_{405°} = 8_{45°} = 8(\cos 45° + i \text{ sen } 45°)$

Aislando el complejo buscado:

$a + bi = 4(\cos 315° + i \text{ sen } 315°) - 8(\cos 45° + i \text{ sen } 45°)$

$$a = 4 \cos 315° - 8 \cos 45° = \frac{4\sqrt{2}}{2} - \frac{8\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}$$

$$b = 4 \text{ sen } 315° - 8 \text{ sen } 45° = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 8\,\frac{\sqrt{2}}{2} = -6\sqrt{2}$$

Es decir: $a + bi = -2\sqrt{2} - 6\sqrt{2}i$

Buscamos el módulo $m = 4\sqrt{5}$

tg $\alpha = 3 \Rightarrow \alpha = 251{,}57°$.

Con esto el número complejo buscado es:

$$a + bi = -2\sqrt{2} - 6\sqrt{2}i = (4\sqrt{5})_{251{,}57°} = 4\sqrt{5}(\cos 251{,}57° + i \text{ sen } 251{,}57°)$$

59 **Dados tres números complejos, z_1, z_2 y z_3, sabemos que z_2 es el conjugado de z_1 y que z_3 es el conjugado del opuesto de z_2. ¿Cómo son entre ellos z_1 y z_3?**

La transcripción del enunciado es:

$$z_2 = \overline{z_1}$$

$$z_3 = (\overline{-z_2})$$

Se deduce que la relación entre z_3 y z_1 debe ser:

$$z_3 = \overline{[-(\overline{z_1})]} = -z_1$$

60 **Calcula sen 4α y cos 4α utilizando la fórmula de De Moivre.**

La fórmula de De Moivre es:

$$(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)^n = \cos n\alpha + i\,\text{sen}\,n\alpha$$

Aplicamos la fórmula a una potencia de exponente cuatro:

$$(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)^4 = \cos 4\alpha + i\,\text{sen}\,4\alpha$$

Desarrollamos el primer miembro y se obtiene:

$$\begin{aligned}(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)^4 &= (\cos\alpha + i\,\text{sen})^2(\cos\alpha + i\,\text{sen})^2 = \\ &= (\cos^2\alpha + 2i\cos\alpha\cdot\text{sen}\,\alpha - \text{sen}^2\alpha)\cdot \\ &\cdot(\cos^2\alpha + 2i\cos\alpha\cdot\text{sen}\,\alpha - \text{sen}^2\alpha) = \\ &= \cos^4\alpha + 2i\cos^3\alpha\cdot\text{sen}\,\alpha - \cos^2\alpha\cdot\text{sen}^2\alpha + \\ &+ 2i\cos^2\alpha\cdot\text{sen}\,\alpha - 4\cos^2\alpha\cdot\text{sen}^2\alpha - \\ &- 2i\cos\alpha\cdot\text{sen}^3\alpha - \text{sen}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha - \\ &- 2i\cos\alpha\cdot\text{sen}^3\alpha + \text{sen}^4\alpha\end{aligned}$$

Igualando:

$$\begin{aligned}\cos 4\alpha + i\,\text{sen}\,4\alpha &= \cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha\cdot\text{sen}^2\alpha + \text{sen}^4\alpha + \\ &+ (4\cos^3\alpha\cdot\text{sen}\,\alpha - 4\cos\alpha\cdot\text{sen}^3\alpha)i\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\cos 4\alpha = \cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha\cdot\text{sen}^2\alpha + \text{sen}^4\alpha$$

$$\text{sen}\,4\alpha = 4\cos^3\alpha\cdot\text{sen}\,\alpha - 4\cos\alpha\cdot\text{sen}^3\alpha$$

61 **Comprueba las fórmulas del seno y el coseno del ángulo doble demostradas en la UNIDAD 4 empleando la fórmula de De Moivre.**

$(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)^2 = \cos 2\alpha + i\,\text{sen}\,2\alpha$

De forma análoga al ejercicio anterior:

$(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)^2 = \cos^2\alpha + 2\cos\alpha\,(i\,\text{sen}\,\alpha) + (i\,\text{sen}\,\alpha)^2 = \cos^2\alpha + (2\cos\alpha\cdot\text{sen}\,\alpha)i - \text{sen}^2\alpha$

Igualando:

$\cos 2\alpha + i\,\text{sen}\,2\alpha = \cos^2\alpha + (2\cos\alpha\cdot\text{sen}\,\alpha)i - \text{sen}^2\alpha$

con lo que:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$$

$$\text{sen}\,2\alpha = 2\cos\alpha\cdot\text{sen}\,\alpha$$

62 **Tenemos un triángulo de vértices *A*(1, 1), *B*(2, −1) y *C*(−3, 2), y lo giramos un ángulo de 30° con centro el origen de coordenadas. Calcula los vértices del triángulo girado.**

Los vértices del triángulo son los afijos de los siguientes números complejos:

$A(1, 1) \Rightarrow 1 + i$

$B(2, -1) \Rightarrow 2 - i$

$C(-3, 2) \Rightarrow -3 + 2i$

Girar 30° es multiplicar por $1_{30°} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)$.

Multiplicando los complejos que representan los vértices por $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)$, se obtienen complejos cuyos afijos son los vértices del triángulo resultado de girar 30°.

$$A'(1+i)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$$

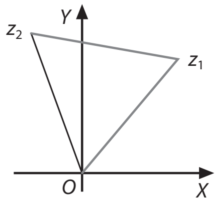
$$B'(2-i)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \left(\frac{2\sqrt{3}+1}{2} + \frac{2-\sqrt{3}}{2}i\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2\sqrt{3}+1}{2}, \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$C'(-3+2i)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \left(\frac{-3\sqrt{3}-2}{2} + \frac{2\sqrt{3}-3}{2}i\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-3\sqrt{3}-2}{2}, \frac{2\sqrt{3}-3}{2}\right)$$

63 **Los afijos de los puntos z_1 y z_2 forman un triángulo equilátero con el origen de coordenadas. Calcula z_2, sabiendo que $z_1 = 4 + 5i$:**



Las coordenadas polares del punto (4, 5) son las siguientes:

$m = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{5}{4} \Rightarrow \alpha = 51{,}34°$

Imponiendo un giro de 60°, tenemos:

$$\sqrt{41}_{51,34°}\cdot 1_{60°} = \sqrt{41}_{111,34°} \Rightarrow (-2{,}33,\ 5{,}96)$$

Observa que existe otro triángulo equilátero cuyo tercer vértice se obtendría imponiendo un giro de −60°:

$$\sqrt{41}_{51,34°}\cdot 1_{-60°} = \sqrt{41}_{-8,66°} \Rightarrow (6{,}33,\ -0{,}96)$$

64 **Un hexágono centrado en el origen tiene un vértice en el punto (3, 3). Calcula los otros vértices.**

A partir de un vértice de un hexágono se pueden obtener los otros cinco multiplicando el complejo correspondiente al vértice dado por $1_{60°}$.

Por comodidad, en este ejercicio trabajaremos con notación polar:

(3, 3) es el afijo correspondiente al complejo $\sqrt{18}_{45°}$. Por tanto:

$\sqrt{18}_{45°}\cdot 1_{60°} = \sqrt{18}_{105°} \Rightarrow (-1{,}1,\ 4{,}1)$

$\sqrt{18}_{105°}\cdot 1_{60°} = \sqrt{18}_{165°} \Rightarrow (-4{,}1,\ 1{,}1)$

$\sqrt{18}_{165°}\cdot 1_{60°} = \sqrt{18}_{225°} \Rightarrow (-3,\ -3)$

$\sqrt{18}_{225°}\cdot 1_{60°} = \sqrt{18}_{285°} \Rightarrow (1{,}1,\ -4{,}1)$

$\sqrt{18}_{285°}\cdot 1_{60°} = \sqrt{18}_{345°} \Rightarrow (4{,}1,\ -1{,}1)$

65 **Considera las siguientes aplicaciones en el plano:**

α: giro de centro el origen y de amplitud 30°.

β: simetría respecto del origen de coordenadas.

γ: simetría respecto del eje de abscisas.

δ: giro de centro el origen y de amplitud 60°.

Halla las coordenadas del punto que se obtienen al aplicar sucesivamente α, β, γ, δ, al punto (2, 3).

$(2, 3) \Rightarrow \sqrt{13}_{56,31°}$

$\alpha \Rightarrow \sqrt{13}_{56,31°}\cdot 1_{30°} = \sqrt{13}_{86,31°}$

$\beta \Rightarrow \sqrt{13}_{266,31°}$

$\gamma \Rightarrow \sqrt{13}_{93,69°}$

$\delta \Rightarrow \sqrt{13}_{93,69° + 60°} = \sqrt{13}_{153,69°} = (-3{,}23,\ 1{,}59)$