Matemáticas

María José Ruiz Jiménez
Jesús Llorente Medrano
Carlos González García

1 BACHILLERATO

EDITEX

Índice

Unidad 1 – Números reales

PÁGINA 9

cuestiones iniciales

1. Encuentra varios números que estén comprendidos entre:

a) $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{5}$ b) 2,1 y 2,2 c) 2,01 y 2,1

2. Describe un procedimiento que calcule $\sqrt[3]{10}$ utilizando solamente las teclas de las operaciones elementales de tu calculadora.

3. Ordena de menor a mayor los siguientes números:

5,31; –4,21; 5,201; –4,201; 5,2101; –4,2101; 4,211; 4,201

4. Comprueba la siguiente igualdad elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$2\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{6}-\sqrt{2}$$

5. ¿Para qué valores de *n* y *a* se cumple $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}$?

SOLUCIONES

---

1. Diremos que:

   a) Los números comprendidos entre $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{5}$ son: 0,42; 0,46; 0,54; 0,57.

   b) Los números comprendidos entre 2,1 y 2,2 son: 2,11; 2,14; 2,18; 2,195.

   c) Los números comprendidos entre 2,01 y 2,1 son: 2,03; 2,045; 2,076; 2,098.

2. Utilizando la tecla del producto podemos conseguir aproximaciones sucesivas del valor. Así:

$$2\times 2\times 2 < \sqrt[3]{10} < 3\times 3\times 3$$

$$2{,}1\times 2{,}1\times 2{,}1 < \sqrt[3]{10} < 2{,}2\times 2{,}2\times 2{,}2$$

$$2{,}15\times 2{,}15\times 2{,}15 < \sqrt[3]{10} < 2{,}16\times 2{,}16\times 2{,}16$$

$$2{,}154\times 2{,}154\times 2{,}154 < \sqrt[3]{10} < 2{,}155\times 2{,}155\times 2{,}155$$

$$2{,}1544\times 2{,}1544\times 2{,}1544 < \sqrt[3]{10} < 2{,}1545\times 2{,}1545\times 2{,}1545$$

3. La ordenación queda: $-4{,}2101 < -4{,}21 < -4{,}201 < 4{,}201 < 4{,}211 < 5{,}201 < 5{,}2101 < 5{,}31$

4. Elevando al cuadrado ambos miembros obtenemos:

$$\left(2\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad 4\left(2-\sqrt{3}\right) = \left(\sqrt{6}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 - 2\sqrt{12}$$

$$\Rightarrow\quad 8-4\sqrt{3} = 8-4\sqrt{3} \qquad \text{Se verifica la igualdad}$$

5. *n* par y $a \in \mathrm{R}^+$ ó *n* impar y $a \in \mathrm{R}$

PÁGINA 25

ACTIVIDADES

Clasifica las siguientes tareas en problemas o ejercicios e intenta resolverlas:

1. **Sumas.** Considera la serie de números pares 2, 4, 6, 8, etc. ¿Cuánto vale la suma de los *m* primeros?
2. **El camello sediento.** El beduino Ali-kan desea transportar 100 bidones llenos de agua desde Kamal hasta Wadi, pueblos separados por 100 km de desierto. Para ello, dispone de un camello capaz de andar descargado indefinidamente, o, de cargar con un solo bidón, siempre y cuando beba una cantidad de agua igual a la que contiene el bidón cada vez que completa 100 km cargado.

   El beduino no dispone de más agua para el camello que la contenida en los bidones. ¿Cuántos de estos 100 bidones podrán llegar a Wadi?

SOLUCIONES

1. $2+4+6+8+...+2m=m(m+1)$

2. Resolvemos en los siguientes pasos:
   - Supongamos que el camello lleva un bidón hasta la mitad del camino, vuelve a Kamal, carga con otro bidón hasta el mismo punto y se bebe uno de los bidones transportados, quedándole otro. Repitiendo el proceso conseguirá llevar 50 bidones hasta la mitad del camino. De aquí repitiendo lo mismo hasta Wadi conseguirá que lleguen 25 bidones según la expresión:

$$50 \text{ bidones } = 100 \times \frac{1^2}{2^2}$$

   - Si mejoramos la solución conseguiremos que lleguen más bidones, haciendo el camino en tres fases tras el 1.^er^ tercio, el camello habrá bebido 33,333… bidones y quedan 66,666… En el 2.^do^ tercio se bebe 22,222… y quedan 44,444… En Wadi se bebe 14,81… y quedan 29,629… bidones, es decir:

$$100 \times \frac{8}{27} = 100 \times \frac{2^3}{3^3}$$

   - Avanzando por cuartos de camino se puede mejorar la solución, llegan:

$$31{,}640 \cong 100 \times \frac{81}{256} = 100 \times \frac{3^4}{4^4} = 100 \times \left(\frac{3}{4}\right)^4$$

   - Siguiendo así sucesivamente se puede decir que en el mejor de los casos llegan:

$$100 \times \left(\frac{99}{100}\right)^{100} \cong 100 \times \frac{1}{e}$$

PÁGINA 28

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Halla el menor conjunto numérico al que pertenecen los siguientes números:

3	4,23	$\sqrt{13}$	0	$-\frac{3}{7}$	$-\sqrt{64}$	$1,0\widehat{3}$	$-\frac{12}{3}$	$\sqrt[3]{-8}$	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{-1,3}{0,5}$

2. Razona la verdad o la falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) Algún número decimal es racional
b) Todo número entero es natural
c) Ningún número racional es entero
d) Algún número real es irracional

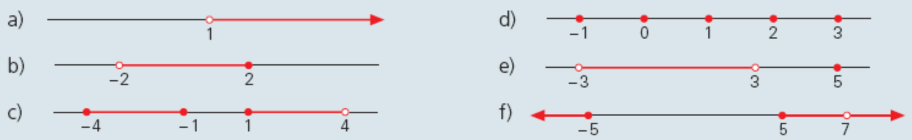
3. Representa en la recta real los siguientes números:

-3^2	$2\sqrt{3}$	$\frac{8}{5}$	$-\sqrt{8}$	$-\frac{4}{3}$	1,6	$0,\widehat{7}$	$\sqrt[3]{125}$	$-\frac{18}{\sqrt{9}}$	$4^{\frac{1}{2}}$

4. Dibuja sobre la recta real los siguientes conjuntos:

a) Los números reales mayores o iguales que 3
b) $B = \{b \in \mathbb{R} \mid b < 0 \text{ y } b > -7\}$
c) $(-\infty, -5]$
d) $D = \{d \in \mathbb{Z} \mid d > 1 \text{ ó } d > -5\}$
e) $E(5, 2)$
f) Los números enteros menores que -2

5. Expresa de forma simbólica los siguientes conjuntos; estudia su acotación y la existencia de supremo, ínfimo, máximo y mínimo:



6. Estudia la acotación de los siguientes conjuntos; determina si existen supremo, ínfimo, máximo y mínimo:

a) $E(5, 6)$
b) $(-3, 1) \cap [0, 3]$
c) $[-3, 0) \cup (-1, 3]$
d) $D = \{n \in \mathbb{N} \mid n > 3 \text{ y } n < 9\}$
e) $E^+(-5, 1) \cup E^-(-5, 1) \cup \{-5\}$
f) $F = \{f \in \mathbb{R} \mid f < 0 \text{ ó } f < 5\}$
g) $E^*(2, 5) \cap E(5, 4)$
h) $I = \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \text{ y } n \neq 0 \right\}$

7. Expresa en forma de intervalo los siguientes conjuntos; estudia su acotación y la existencia de máximo y mínimo:

a) $E(-2, 4) \cap E(2, 2)$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2 \text{ y } x \geq -2\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

SOLUCIONES

1. Quedan del siguiente modo:

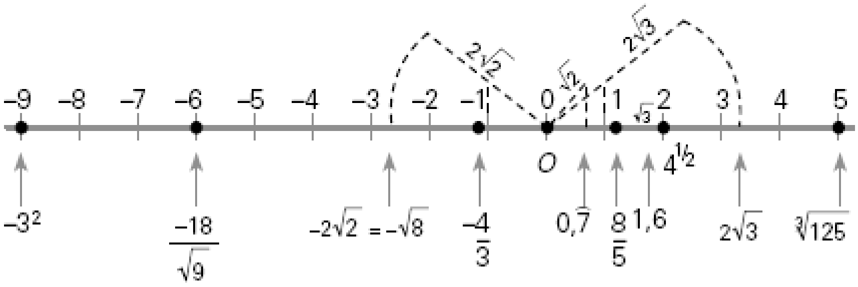
$$3 \in \mathbb{N};\ \ 4{,}23 \in \mathbb{Q};\ \ \sqrt{13} \in \mathrm{I};\ \ 0 \in \mathbb{N};\ \ -\frac{7}{3} \in \mathbb{Q};$$

$$\sqrt{64} = 8 \in \mathbb{N};\ \ 1{,}0\widehat{3} \in \mathbb{Q};\ \ -\frac{12}{3} = -4 \in \mathbb{Z};$$

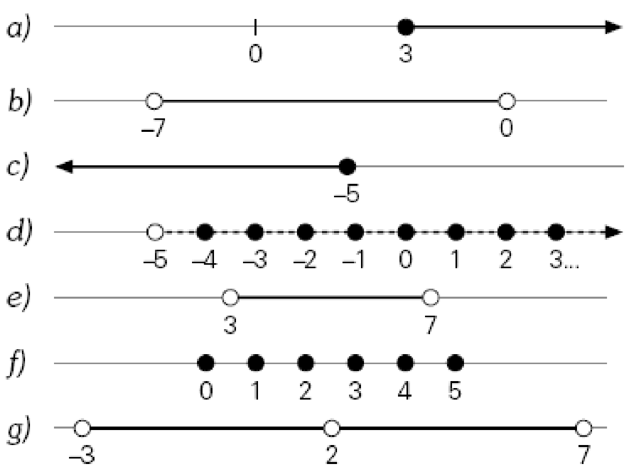
$$\sqrt[3]{-8} = -2 \in \mathbb{Z};\ \ \frac{1}{\pi} \in \mathrm{I};\ \ -\frac{1{,}3}{0{,}5} \in \mathbb{Q}$$

2. Las siguientes afirmaciones son:
   a) Verdadero, todos los decimales son relacionales excepto los decimales infinitos y no periódicos.
   b) Falso, sólo son naturales los enteros positivos y el cero.
   c) Falso, $\frac{15}{3}$ es racional y entero.
   d) Verdadero, todos los decimales infinitos no periódicos son reales e irracionales.

3. Quedaría representado del siguiente modo:



4. Las representaciones quedarían:



5. Quedan del siguiente modo:
   a) $(1, +\infty)$. No acotado.
   b) $(-2,2]$. Acotado. $\text{Inf} = -2$. $\text{Máximo} = 2$.
   c) $[-4,-1] \cup [1,4)$. Acotado. $\text{Mínimo} = -4$. $\text{Sup} = 4$.
   d) $\{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \in x \in 3\}$. Acotado. $\text{Mínimo} = -1$. $\text{Máximo} = 3$.
   e) $(-3,3) \cup \{5\}$. Acotado. $\text{Inf} = -3$. $\text{Máximo} = 5$.
   f) $(-\infty,5] \cup [5,+\infty) - \{7\}$. No acotado.

6. Quedan del siguiente modo:
   a) Acotado. $\text{Supremo} = 11$; $\text{Ínfimo} = -1$.
   b) Acotado. $\text{Sup} = 1$; $\text{Inf} = 0 = \text{Mínimo}$.
   c) Acotado. $\text{Sup} = 3$; $\text{Inf} = -3$; $\text{Máximo} = 3$; $\text{Mínimo} = -3$.
   d) Acotado. $\text{Sup} = 8$; $\text{Inf} = 4$; $\text{Máximo} = 8$; $\text{Mínimo} = 4$.
   e) Acotado. $\text{Sup} = -4$; $\text{Inf} = -6$.
   f) No acotado inferiormente, por tanto no está acotado.
   g) Acotado. $\text{Sup} = 7$; $\text{Inf} = 1$.
   h) Acotado. $\text{Sup} = 1$; $\text{Inf} = 0$; $\text{Máximo} = 1$.

7. Quedan del siguiente modo:
   a) $E(-2,4) \cap E(2,2) = (-6,2) \cap (0,4) = (0,2)$. Acotado.
   b) $[-2,+\infty)$. No acotado. Mínimo en el -2.

PÁGINA 29

■ 8. Rellena la tabla siguiente en tu cuaderno:

Valor exacto	Aproximación decimal a milésimas por defecto y cota de error	Aproximación decimal a centésimas por exceso y cota de error	Redondeo a décimas y cota de error	Truncamiento a centésimas y cota de error
2,236067...				
	3,421 0,001			
			0,8 0,05	
				32,42 0,01

■ 9. Dado el número 1 724,157203...

Indica cuáles de las siguientes aproximaciones decimales del número anterior son redondeos. En los casos en que lo sean, anota la cota de error.

1 725	1 724,16	1 724,2	1 724,1	1 720	1 724,158	1 724,1572

■ 10. Calcula, aproximadamente, el error absoluto y relativo que se comete al tomar $\frac{221}{71}$ como valor aproximado de π.

■ 11. Calcula, aproximadamente, el error absoluto y relativo que se comete al redondear el número de oro Φ a centésimas.

■ 12. Expresa en notación científica las siguientes cantidades, y determina el orden de magnitud:

a) Distancia Tierra-Luna: 384 000 km
b) Distancia Tierra-Sol: 150 000 000 km
c) Virus de la gripe: 0,000 000 002 2 m
d) Radio del protón: 0,000 000 000 05 m
e) 57 billones
f) 623 cienmilésimas
g) 0,035 millones
h) 12 centésimas

■ 13. Un año-luz es la distancia recorrida por la luz en un año:

$$1 \text{ año-luz} = 9{,}4605 \cdot 10^{12} \text{ km}$$

Sabiendo que:

$$\text{distancia}_{\text{Tierra-Luna}} = 384\,403 \text{ km} \text{ y}$$
$$\text{distancia}_{\text{Tierra-Sol}} = 1{,}5 \cdot 10^{8} \text{ km}$$

Calcula con redondeo a centésimas la distancia de la Tierra a la Luna en segundos-luz, y la distancia Tierra-Sol en minutos-luz.

■ 14. En un supermercado nos presentan la cuenta a cobrar en euros. Los productos que hemos comprado tienen los siguientes precios:

a) 1,325 euros
b) 0,477 euros
c) 25,008 euros
d) 122,553 euros
e) 82,572 euros
f) 7,634 euros

El supermercado redondea a centésimas de euro. ¿Cuántos euros pagaremos si el supermercado primero redondea y luego suma? ¿y si primero suma y luego redondea?

8. La tabla completa se presenta del siguiente modo:

Valor exacto	Aproximación decimal a milésimas por defecto y cota de error	Aproximación decimal a centésimas por exceso y cota de error	Redondeo a décimas y cota de error	Truncamiento a centésimas y cota de error
2,236067…	2,236 Cota 0,001	2,24 Cota 0,01	2,2 Cota 0,05	2,23 Cota 0,01
3,42173…	**3,421** **Cota 0,001**	3,43 Cota 0,01	3,4 Cota 0,05	3,42 Cota 0,01
0,7643…	0,764 Cota 0,001	0,77 Cota 0,01	**0,8** **Cota 0,05**	0,76 Cota 0,01
32,42751…	32,427 Cota 0,001	32,43 Cota 0,01	32,4 Cota 0,05	**32,42** **Cota 0,01**

9. Para cada uno de los números queda:

1 725 no es redondeo.

1 724,16 es un redondeo a centésimas. Cota de error 0,005.

1 724,2 es un redondeo a décimas. Cota de error 0,05.

1 724,1 no es redondeo.

1 724,158 no es redondeo.

1 724,1572 es un redondeo a diezmilésimas. Cota de error 0,00005.

10. Realizamos el siguiente cálculo:

Consideramos como valor real $\pi = 3{,}141592$.

Error absoluto :

$$\left| 3{,}141592 - \frac{221}{71} \right| = 0{,}028916...$$

Error relativo :

$$\frac{\text{Error absoluto}}{\text{Valor real}} = \frac{0{,}028916}{3{,}141592} = 0{,}0092...$$

11. El número de oro es :

$\Phi = 1{,}61803398...$

Redondeo a centésimas : 1,62

Error absoluto $= 0{,}00197...$

Error relativo $= 0{,}00121506...$

12. La notación científica queda:

a) $3,84 \times 10^{5}$. Orden de magnitud 10^{5}.
b) $1,5 \times 10^{8}$. Orden de magnitud 10^{8}.
c) $2,2 \times 10^{-9}$. Orden de magnitud 10^{-9}.
d) 5×10^{-11}. Orden de magnitud 10^{-10}.
e) $5,7 \times 10^{13}$. Orden de magnitud 10^{14}.
f) $6,23 \times 10^{-3}$. Orden de magnitud 10^{-2}.
g) $3,5 \times 10^{4}$. Orden de magnitud 10^{4}.
h) $1,2 \times 10^{-2}$. Orden de magnitud 10^{-2}.

13. El cálculo queda:

$1 \text{ año - luz} = 9,4605 \times 10^{12} \text{ km} \Rightarrow 1 \text{ segundo} - \text{luz es :}$

$$\frac{9,4605 \times 10^{12}}{365 \times 24 \times 60 \times 60} = 299\,990,4871 \text{ km}$$

Distancia de la Tierra a la Luna es $384\,403$ km, es decir :

$384\,403 : 299\,990,4871 = 1,28138$ segundos $-$ luz

redondeando a las centésimas es $1,28$ segundos $-$ luz.

Distancia de la Tierra al Sol es $1,5 \times 10^{8}$ km, es decir :

$1,5 \times 10^{8} : 17\,999\,429,22 = 8,333596$ minutos $-$ luz

que redondeando a las centésimas es $8,33$ minutos - luz.

14. Quedaría:

Primero redondea y luego suma :

$1,33 + 0,48 + 25,01 + 122,55 + 82,57 + 7,63 = 239,57$ euros.

Primero sumamos y después redondeamos a centésimas :

$1,325 + 0,477 + 25,008 + 122,553 + 82,572 + 7,634 = 239,569$ euros.

que redondeando a la centésima queda : $239,57$ euros.

PÁGINA 30

ACTIVIDADES FINALES

15. Efectúa las siguientes operaciones haciendo uso de la calculadora:

a) $1{,}57 \cdot 10^{-5} + 4{,}325 \cdot 10^{-2}$
b) $6{,}215 \cdot 10^{5} : 3{,}25 \cdot 10^{-1}$
c) $2{,}9 \cdot 10^{4} + 3{,}25 \cdot 10^{-2} - 7{,}2 \cdot 10^{3}$
d) $2{,}32 \cdot 10^{6} \cdot 7{,}2 \cdot 10^{-2}$
e) $9{,}7 \cdot 10^{7} \cdot (8{,}3 \cdot 10^{-4} - 5{,}2 \cdot 10^{-5})$
f) $5 \cdot 10^{7} \cdot 4{,}5 \cdot 10^{-3} : 1{,}5 \cdot 10^{2}$

16. Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt{25a^2b^4}$
b) $\sqrt[5]{32x^{15}}$
c) $\sqrt[3]{64a^6b^3}$
d) $\sqrt[4]{625z^8}$
e) $\sqrt[4]{81a^8}$
f) $\sqrt[3]{8x^3y^6}$

17. Expresa en forma de potencia las raíces, o en forma de raíz las potencias siguientes:

a) $\sqrt[3]{a}$
b) $2^{\frac{2}{3}}$
c) $\sqrt[4]{a^5}$
d) $5^{\frac{1}{2}}$
e) $\dfrac{1}{\sqrt{a^3}}$
f) $5^{\frac{-3}{2}}$
g) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$
h) $a^{\frac{-2}{3}}$

18. Pon las siguientes expresiones bajo un único radical:

a) $\sqrt{\sqrt[3]{8}}$
b) $\left(\sqrt[3]{a^2b}\right)^5$
c) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$
d) $\left(\sqrt{a^3\sqrt{b}}\right)^4$
e) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}$
f) $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a^8}}$

19. Extrae todos los factores posibles de los radicales siguientes:

a) $\sqrt{1\,000}$
b) $\sqrt[3]{a^4b^3}$
c) $\sqrt[3]{8a^5}$
d) $\sqrt[4]{x^8y^5}$
e) $\sqrt{16a^5b^7}$
f) $\sqrt[5]{xy^5z^7}$
g) $\sqrt{4a^2 + 4}$
h) $\sqrt{a^2 - a^2b}$

20. Introduce los factores en el radical:

a) $4\sqrt{2}$
b) $2ab\sqrt[3]{a^2}$
c) $3\sqrt[4]{3^2}$
d) $a^2b^4\sqrt{2ab^3}$
e) $3\sqrt[3]{a}$
f) $4a\sqrt[3]{a^2b}$

21. Calcula, presentando el resultado en forma de raíz y en forma de potencia:

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}$
b) $\sqrt{a} \cdot a^2$
c) $\sqrt[5]{2a^4} : \sqrt[5]{2a^3}$
d) $a^{-1} \cdot \sqrt[3]{a}$
e) $\sqrt[6]{3^5} : \sqrt[6]{3^3}$
f) $a : \sqrt{a}$

22. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $3\sqrt{2} - \dfrac{2}{3}\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \dfrac{4}{5}\sqrt{2}$
b) $\dfrac{1}{3}\sqrt[4]{3} + \dfrac{1}{4}\sqrt[4]{3} - \dfrac{3}{2}\sqrt[4]{3}$
c) $\dfrac{4}{5}\sqrt{8} - \sqrt{50} + \dfrac{7}{2}\sqrt{18} - \dfrac{3}{4}\sqrt{98}$
d) $2\sqrt[3]{16} - 5\sqrt[3]{54} + \dfrac{1}{5}\sqrt[3]{250}$
e) $5\sqrt{4x} - 3\sqrt{36x} + \sqrt{25x} - 6\sqrt{x}$
f) $6\sqrt[3]{x^7} + x^2\sqrt[3]{x} - 3x^2\sqrt[3]{27x}$

15. Las soluciones son:

a) $4,32657\times10^{-2}$
b) $1,912307692\times10^{6}$
c) $21\,735$
d) $167\,040$
e) $75\,466$
f) $1\,500$

16. Las soluciones son:

a) $5ab^2$
b) $2x^2$
c) $4a^2b$
d) $5z^2$
e) $3a^2$
f) $2xy^2$

17. Las expresiones quedan:

a) $a^{1/3}$
b) $\sqrt[3]{4}$
c) $a^{5/4}$
d) $\sqrt{5}$
e) $a^{-3/2}$
f) $\dfrac{1}{\sqrt{125}}$
g) $a^{-2/3}$
h) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$

18. Las expresiones quedan:

a) $\sqrt[6]{8}=\sqrt{2}$
b) $\sqrt[3]{a^{10}b^5}$
c) $\sqrt[8]{3^7}$
d) $\sqrt[4]{a^{24}b^4}=a^6b$
e) $\sqrt[12]{a}$
f) $\sqrt[12]{a^{11}}$

19. Las expresiones quedan:

a) $10\sqrt{10}$
b) $ab\sqrt[3]{a}$
c) $2a\sqrt[3]{a^2}$
d) $x^2y\sqrt[4]{y}$
e) $4a^2b^3\sqrt{ab}$
f) $yz\sqrt[5]{xz^2}$
g) $2\sqrt{a^2+1}$
h) $a\sqrt{1-b}$

20. Los radicales quedan:

a) $\sqrt{32}$
b) $\sqrt[3]{8a^5b^3}$
c) $\sqrt[4]{3^6}$
d) $\sqrt{2a^5b^{11}}$
e) $\sqrt[3]{27a}$
f) $\sqrt[3]{64a^5b}$

21. La solución queda:

a) $\sqrt[3]{2^3}=2$ c) $\sqrt[5]{a}=a^{1/5}$ e) $\sqrt[6]{3^2}=3^{1/3}$

b) $\sqrt{a^5}=a^{5/2}$ d) $\sqrt[3]{a^{-2}}=a^{-2/3}$ f) $\sqrt{a}=a^{1/2}$

22. La solución queda:

a) $\frac{98}{15}\sqrt{2}$ c) $\frac{37}{20}\sqrt{2}$ e) $-9\sqrt{x}$

b) $-\frac{11}{12}\sqrt[4]{3}$ d) $-10\sqrt[3]{2}$ f) $-2x^2\sqrt[3]{x}$

PÁGINA 31

23. Realiza las siguientes operaciones simplificando lo más posible los resultados:

a) $\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

b) $(2\sqrt{7}+3)^2-4\sqrt{7}(\sqrt{7}+3)$

c) $(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})-(2+\sqrt{2})^2$

d) $(4\sqrt{18}-2\sqrt{12}+\sqrt{32})\cdot 2\sqrt{2}$

e) $(\sqrt{3}+2\sqrt{2})(\sqrt{2}-\sqrt{3})\sqrt{3}$

f) $(\sqrt{72}-\sqrt{20}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+2\sqrt{8}+2\sqrt{5})$

g) $2\sqrt{12}\cdot\sqrt{15}\cdot\sqrt{20}$

h) $\sqrt{3}(2\sqrt{3}-\sqrt{5})-\sqrt{5}(2\sqrt{5}-\sqrt{3})$

i) $(3\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-3(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$

j) $(\sqrt{75}-\sqrt{27}+2\sqrt{12}):3\sqrt{3}$

k) $(4\sqrt{63}-5\sqrt{28}):(\sqrt{343}-\sqrt{175})$

l) $\left(\frac{2}{3}\sqrt{45}-\frac{3}{2}\sqrt{20}\right)\cdot\frac{2}{3}\sqrt{125}$

24. Reduce a índice común y ordena de menor a mayor las raíces de cada apartado:

a) $\sqrt{2}, \sqrt[5]{5}$

b) $\sqrt[4]{4}, \sqrt[6]{6}$

c) $\sqrt[3]{2}, \sqrt[9]{3}, \sqrt{5}$

d) $\sqrt[3]{10}, \sqrt[5]{100}$

e) $\sqrt[4]{2}, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}$

f) $\sqrt{3^{-1}}, \sqrt[4]{5^{-3}}$

25. Opera:

a) $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{6}$

b) $\sqrt[6]{a^5}\cdot\sqrt[5]{a^3}:\sqrt[10]{a}$

c) $\sqrt{2ab}:\sqrt[4]{8a^3b}$

d) $\frac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt[12]{64}}$

e) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt[8]{243}$

f) $\sqrt[8]{ab^3}\cdot\sqrt[6]{2a^2b^2}$

g) $\sqrt{3\sqrt[3]{3^2}}$

h) $\frac{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[6]{2}}{\sqrt{2}}$

26. Racionaliza las siguientes fracciones:

a) $\frac{2}{\sqrt{2}}$

b) $\frac{7}{\sqrt{7}\cdot\sqrt[3]{3}}$

c) $\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$

d) $\frac{1}{2\sqrt{5}}$

e) $\frac{3}{2+\sqrt{2}}$

f) $\frac{11}{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}$

g) $\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{3}}$

h) $\frac{\sqrt{3}}{3-2\sqrt{3}}$

i) $\frac{\sqrt{7}+1}{2\sqrt{7}+5}$

27. Realiza las operaciones racionalizando previamente:

a) $\frac{5}{\sqrt{2}}\sqrt{96}-\frac{3}{\sqrt{7}}\sqrt{189}$

b) $\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}$

c) $\sqrt{\frac{5}{3}}-\sqrt{\frac{3}{5}}$

d) $\frac{2}{1+\sqrt{3}}-\frac{2}{1-\sqrt{3}}$

23. Quedan:

a) $\frac{9}{2} - 2\sqrt{2}$

b) 9

c) $-4 - 4\sqrt{2}$

d) $64 - 8\sqrt{6}$

e) $3 - 3\sqrt{6}$

f) 30

g) 120

h) -4

i) $6 + 12\sqrt{6}$

j) 2

k) 1

l) $-\frac{50}{3}$

24. La solución queda:

a) $\sqrt[10]{5^2} < \sqrt[10]{2^5}$

b) $\sqrt[12]{6^2} < \sqrt[12]{4^3}$

c) $\sqrt[18]{3^2} < \sqrt[18]{2^6} < \sqrt[18]{5^9}$

d) $\sqrt[15]{10^5} < \sqrt[15]{100^3}$

e) $\sqrt[12]{2^3} < \sqrt[12]{2^4} < \sqrt[12]{2^6}$

f) $\sqrt[4]{5^{-3}} < \sqrt[4]{3^{-2}}$

25. Tras operar obtenemos:

a) $\sqrt[12]{8\,640\,000}$

b) $\sqrt[3]{a^4}$

c) $\sqrt[4]{\frac{b}{2a}}$

d) 1

e) $\sqrt[8]{3^{15}}$

f) $\sqrt[24]{16a^{11}b^{17}}$

g) $\sqrt[6]{3^5}$

h) $\sqrt[12]{2^{13}} = 2\sqrt[12]{2}$

26. Tras racionalizar se obtiene:

a) $\sqrt{2}$

b) $\frac{\sqrt[6]{7^3 \cdot 3^2}}{3} = \frac{\sqrt[6]{3087}}{3}$

c) $9 - 4\sqrt{5}$

d) $\frac{\sqrt{5}}{10}$

e) $\frac{6 - 3\sqrt{2}}{2}$

f) $\frac{11\left(3\sqrt{5} + 2\sqrt{7}\right)}{17}$

g) $\frac{\sqrt[5]{162}}{3}$

h) $-2 - \sqrt{3}$

i) $3 - \sqrt{7}$

27. La solución queda:

a) $11\sqrt{3}$

b) $\frac{34 + 23\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{2\sqrt{15}}{15}$

d) $2\sqrt{3}$

PÁGINA 32

ACTIVIDADES FINALES

28. Calcula, simplificando al máximo el valor de:

a) $\dfrac{4\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{16}} - 5\sqrt[4]{1875} + \dfrac{2}{\sqrt[4]{32}}$

b) $\left(2\sqrt{45} + 5\sqrt{80} - \dfrac{3}{5}\sqrt{125}\right)\dfrac{4}{\sqrt{5}}$

c) $2\sqrt[3]{81} \cdot \left(\dfrac{2\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{3}} + \dfrac{5}{\sqrt[3]{9}}\right)$

d) $\left(\dfrac{2}{3}\sqrt[5]{256} - \dfrac{2}{\sqrt[5]{972}}\right) : \dfrac{\sqrt[5]{8}}{2}$

29. Racionaliza, efectúa y simplifica la expresión:

a) $\dfrac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{3} - 3\sqrt{2}} - \left(\sqrt{6} - 2\right)^2$

b) $\dfrac{2\sqrt{3} - 3}{2\sqrt{3} + 3} - \dfrac{2\sqrt{3} + 3}{2\sqrt{3} - 3}$

c) $\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5} - 4} + \dfrac{5}{2\sqrt{5}}$

d) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7} + 2} - \sqrt{\dfrac{4}{7}}$

30. Efectúa y simplifica:

a) $\sqrt{4\sqrt{9\sqrt[3]{729}}}$

b) $\sqrt{14 + \sqrt{7 - \sqrt[4]{81}}}$

c) $\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5^5}}}}$

d) $\sqrt{7 - 2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{7 + 2\sqrt{6}}$

e) $\left(\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{16}\right) \cdot \sqrt[3]{4}$

f) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}}$

31. Elevando al cuadrado ambos miembros, comprueba que $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = 2$.

32. Demuestra la identidad:

$$\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

33. Racionaliza las siguientes fracciones:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$

b) $\dfrac{\sqrt{5} - \sqrt{3} - 2}{\sqrt{5} + \sqrt{3} - 2}$

34. Efectúa la siguiente operación:

$$1 - \left(\frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} - 2}\right)^2$$

35. Halla dos números racionales positivos x e y tales que:

$$\sqrt{11 + \sqrt{112}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

36. Calcula el valor de la siguiente expresión:

$$\left(\frac{1 + \sqrt{6}}{1 - \sqrt{6}}\right)^2 - \left(\frac{1 - \sqrt{6}}{1 + \sqrt{6}}\right)^2$$

28. Queda:

a) $\dfrac{\sqrt[4]{8}-38\sqrt[4]{3}}{2}$

c) $48+10\sqrt[3]{9}$

b) 92

d) 2

29. Tras simplificar obtenemos:

a) $\dfrac{22\sqrt{6}-37}{5}$

c) $\dfrac{5+3\sqrt{5}}{2}$

b) $-8\sqrt{3}$

d) $\dfrac{49-20\sqrt{7}}{21}$

30. Queda:

a) 6

d) 5

b) 4

e) 6

c) $5\sqrt[16]{5^3}$

f) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

31. Elevamos los dos miembros al cuadrado:

$$\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2=2^2 \Rightarrow \; 4+2\sqrt{3}-2\sqrt{\left(4+2\sqrt{3}\right)\cdot\left(4-2\sqrt{3}\right)}+4-2\sqrt{3}=4$$

$$\Rightarrow \; 8-2\sqrt{4}=4 \;\Rightarrow\; 8-4=4 \qquad \text{Se verifica la igualdad.}$$

32. Elevamos los dos miembros al cuadrado:

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2 \;\Rightarrow\; \frac{2+\sqrt{3}}{4}=\frac{2+2\sqrt{12}+6}{4}$$

$$\Rightarrow \; \frac{2+\sqrt{3}}{4}=\frac{8+4\sqrt{3}}{16} \qquad \text{Se verifica la igualdad}$$

33. Queda:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\dfrac{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)}}=\dfrac{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{4-3}}=2\sqrt{2-\sqrt{3}}$

b) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}-2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-2}=\dfrac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}-2\right)\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}+2\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2-2^2}=\dfrac{-1-2\sqrt{3}}{2+\sqrt{15}}=\dfrac{2+4\sqrt{3}-\sqrt{15}-6\sqrt{5}}{11}$

34. Queda:

$$1-\left(\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}\right)^2=1-\frac{9+4\sqrt{5}}{9-4\sqrt{5}}=\frac{-8\sqrt{5}}{9-4\sqrt{5}}=-160-72\sqrt{5}$$

35. Elevamos al cuadrado y agrupamos:

$$11+\sqrt{112}=x+y+2\sqrt{xy}\quad\Rightarrow\quad 11+\sqrt{112}=x+y+\sqrt{4xy}$$

De donde se obtienen dos ecuaciones que forman el siguiente sistema :

$\left.\begin{array}{l}x+y=11\\4xy=112\end{array}\right\}\Rightarrow$ Las dos posibles soluciones serían $\begin{array}{l}x=7\\y=4\end{array}$ y también $\begin{array}{l}x=4\\y=7\end{array}$

36. Resolviendo:

$$\frac{\left(1+\sqrt{6}\right)^2}{\left(1-\sqrt{6}\right)^2}-\frac{\left(1-\sqrt{6}\right)^2}{\left(1+\sqrt{6}\right)^2}=\frac{7+2\sqrt{6}}{7-2\sqrt{6}}-\frac{7-2\sqrt{6}}{7+2\sqrt{6}}=\frac{\left(7+2\sqrt{6}\right)^2-\left(7-2\sqrt{6}\right)^2}{7^2-\left(2\sqrt{6}\right)^2}=\frac{56\sqrt{6}}{25}$$

Unidad 2 – Polinomios y fracciones algebraicas

PÁGINA 35

cuestiones iniciales

1. Calcula el cociente y el resto en cada una de las siguientes divisiones:

a) $(x^3 - 3x^2 + 4) : (x + 1)$ b) $(x^4 - x) : (x - 2)$

2. Calcula el valor de a para que el polinomio $A(x) = x^3 + ax^2 - 7x - 2$ dé como resto 5 al dividirlo por $x + 3$.

3. Descompón en factores los siguientes polinomios:

a) $A(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$ b) $B(x) = x^4 - 16$

4. Efectúa la siguiente operación y expresa el resultado en forma de fracción irreducible:

$$\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) \cdot \frac{x^2 - x}{x^2 + 1}$$

SOLUCIONES

1. Diremos que:

   a) Resto 0; Cociente $x^2 - 4x + 4$

   b) Resto 14; Cociente $x^3 + 2x^2 + 4x + 7$

2. Utilizando el teorema del resto:

$$\text{Resto} = A(-3) \quad \Rightarrow \quad 5 = (-3)^3 + a(-3)^2 - 7(-3) - 2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{13}{9}$$

3. La descomposición queda:

   a) $x^3 - 5x^2 + 6x = x(x-2)(x-3)$

   b) $x^4 - 16 = (x-2)(x+2)(x^2+4)$

4. Operando obtenemos:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{x(x-1)}{x^2+1} = \frac{x}{x+1}$$

PÁGINA 49

ACTIVIDADES

■ Practica lo dicho anteriormente con los siguientes problemas:

1. **Relaciones familiares.** Por ahí vienen nuestros padres, padres de nuestros hijos, maridos de nuestras madres y nuestros propios maridos. ¿Es esto cierto?

2. **Animado baile.** Cuarenta y dos personas toman parte en un baile. Durante la velada, una primera dama bailó con siete caballeros; una segunda, con ocho; una tercera, con nueve; y así sucesivamente hasta la última, que bailó con todos los caballeros. ¿Cuántas damas había en aquel baile?

3. **La perra *Cati*.** Luis va todos los días desde su casa a la sierra más cercana, que dista 1,5 km. Va acompañado de su perra mastina *Cati,* que va corriendo a la sierra. Cuando la perra llega a la sierra, vuelve con Luis y así sucesivamente, hasta que Luis llega a la sierra. Luis camina a 6 km/h y *Cati* va a 16 km/h. ¿Cuántos km recorre *Cati*?

4. **La edad de Astérix.** ¿Qué edad tenía Astérix en el año 2000, sabiendo que esa edad es igual a la suma de las tres últimas cifras de su año de nacimiento?

SOLUCIONES

1. Sí puede ser cierto; se trata de dos padres que se han casado cada uno con la hija del otro.

2. Diremos que:

$$a_1 = 7$$
$$a_2 = 8$$
.
$$a_n = 7 + (n-1)\cdot 1 = n + 6$$

Además sabemos que $a_n + n = 42 \Rightarrow n = 18$ damas.

$$a_n = 42 - 18 = 24 \text{ caballeros.}$$

Había 18 damas y 24 caballeros.

3. Luis tarda 15 minutos en llegar a la sierra.
La perra, por lo tanto, ha estado moviéndose durante 15 minutos. Por tanto ha recorrido:

$$16 \ {}^{\text{km}}\!/\!_{\text{h}} : 4 = 4 \text{ kilómetros.}$$

4. Diremos que:

$$2000 - 19xy = 9 + x + y$$
$$2000 - (1000 + 900 + 10x + y) = 9 + x + y$$
$$\Rightarrow 11x + 2y = 91 \Rightarrow x = 7 \quad y = 7$$

Es decir, Astérix nació en el año 1 977 y en el año 2 000 tendrá 23 años.

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Encuentra el polinomio $A(x)$ que satisfaga la igualdad $(x^2 - 3) \cdot A(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 6$ de tres formas diferentes:
   a) Utilizando la definición de identidad de polinomios
   b) Utilizando el principio de identidad de polinomios
   c) Usando la división de polinomios

2. Calcula a, b y c en las siguientes situaciones:
   a) Si $ax^2 + 6x + b$ es el cuadrado del binomio $2x + c$
   b) Si se cumple $(x - 2) \cdot (ax^2 + bx + c) = 2x^3 - 9x^2 + 14x - 8$

3. Dados los polinomios $P(x) = (3x - 2)^2$, $Q(x) = (4x - 1) \cdot (4x + 1)$ y $R(x) = 4x(x + 1) - (2x + 3)^2$, calcula los siguientes valores numéricos:

$$P(2);\quad Q(\sqrt{2});\quad R(-1);\quad P\left(\frac{1}{3}\right);\quad Q\left(-\frac{1}{2}\right);\quad R(0)$$

4. Determina a y b de modo que sea cierta la siguiente igualdad:

$$(x^2 - 2x + 3) \cdot (ax + b) + 5 = x^3 - 4x^2 + 7x - 1$$

5. Descompón en factores los siguientes polinomios:
   a) $A(x) = x^4 - 25x^2 + 144$
   b) $B(x) = x^3 + 2x^2 + x$
   c) $C(x) = x^3 - x^2 - x + 1$
   d) $D(x) = 8x^3 + 2x^2 - 13x + 3$
   e) $E(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3$

6. Calcula el MCD y el mcm de los siguentes polinomios:
   a) $A(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$; $B(x) = x^2 + x - 6$
   b) $C(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 6$; $D(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$
   c) $E(x) = 2x^3 - 2x^2 - 2x - 4$; $F(x) = -2x^2 - x + 10$

↑ *El jardín meridional,* de Paul Klee.

7. Resuelve las siguientes cuestiones:
   a) Calcula el valor de k para que el polinomio $P(x) = 2x^3 - kx^2 + x + 6$ sea múltiplo de $x - \frac{1}{2}$.
   b) Calcula a y b para que el polinomio $A(x) = x^3 + 6x^2 + ax + b$ sea divisible por $x^2 - 4$.
   c) Calcula el valor de m para que el resto de la división $(x^5 - 4x^3 - mx) : (x + \sqrt{3})$ sea $5\sqrt{3}$.
   d) Calcula el resto de dividir el polinomio $C(x) = x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{2}$ por el binomio $x + \frac{1}{\sqrt{2}}$.
   e) Calcula a, b y c en el polinomio $B(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ para que sea divisible por $x - 2$, por $x + 1$ y dé resto 4 al dividirlo entre x.

1. Quedan del siguiente modo:

- Mediante identidad de polinomios:

$(x^2-3)(ax+b)=x^3+2x^2-3x-6$

$ax^3+bx^2-3ax-3b = x^3+2x^2-3x-6$

Identificando coeficientes obtenemos:

$a=1,\ b=2 \Rightarrow$ el polinomio $A(x)=x+2$

- Mediante división:

$$A(x)=\frac{x^3+2x^2-3x-6}{x^2-3}=x+2$$

2. El cálculo queda:

a) $ax^2+6x+b=(2x+c)^2$

$$ax^2+6x+b=4x^2+4cx+c^2 \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=9/4 \\ c=3/2 \end{cases}$$

b) $(x-2)(ax^2+bx+c)=2x^3-9x^2+14x-8$

$$ax^3+bx^2+cx-2ax^2-2bx-2c=2x^3-9x^2+14x-8 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b-2a=-9 \\ c-2b=14 \\ -2c=-8 \end{cases} \begin{array}{l} \Rightarrow a=2 \\ \Rightarrow b=-5 \\ \Rightarrow c=4 \end{array}$$

3. Quedarían:

$P(2)=(3\cdot 2-2)^2=16$

$Q(\sqrt{2})=(4\sqrt{2}-1)(4\sqrt{2}+1)=31$

$P\left(\frac{1}{3}\right)=\left(3\cdot\frac{1}{3}-2\right)^2=1$

$Q\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{-4}{2}-1\right)\left(\frac{-4}{2}+1\right)=3$

$R(0)=-9$

4. Operando y utilizando la identidad de polinomios:

$a = 1 \qquad b = -2$

5. Las descomposiciones pedidas son:

a) $\text{A(x)} = (x-3)(x+3)(x-4)(x+4)$

b) $\text{B(x)} = x\,(x+1)^2$

c) $\text{C(x)} = (x-1)^2\,(x+1)$

d) $\text{D(x)} = 8\,(x-1)\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)$

e) $\text{E(x)} = (x+1)^2\,(x+1)(x-3)$

6. En cada uno de los casos descomponemos los polinomios en factores y calculamos el MCD y el mcm.

a) $$\left.\begin{array}{l} \text{A}(x) = x\,(x-3)\,(x-2) \\ \text{B}(x) = (x+3)\,(x-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} MCD\,[A(x), B(x)] = (x-2) \\ mcm\,[A(x), B(x)] = x\,(x-3)\,(x-2)\,(x+3) \end{array}$$

b) $$\left.\begin{array}{l} \text{C}(x) = (x-3)\,(x^2-x+2) \\ \text{D}(x) = (x-2)^2\,(x-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} MCD\,[C(x), D(x)] = 1 \\ mcm\,[C(x), D(x)] = C(x)\cdot D(x) \end{array}$$

c) $$\left.\begin{array}{l} \text{E}(x) = 2\,(x^2+x+1)\,(x-2) \\ \text{F}(x) = -2\,(x-2)\left(x+\frac{5}{2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} MCD\,[E(x), F(x)] = 2\,(x-2) \\ mcm\,[E(x), F(x)] = -2\,(x-2)\,(x^2+x+1)\left(x+\frac{5}{2}\right) \end{array}$$

7. Quedaría:

a) El resto de dividir P(x) por $x - \frac{1}{2}$ debe ser cero.

$$Resto = P\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - K\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 6 = 0 \Rightarrow K = 27$$

b) Ha de ser divisible por $(x-2)$ y por $(x+2)$. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} A(2) = 0 \\ A(-2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 8 + 24 + 2a + b = 0 \\ -8 + 24 - 2a + b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = -4 \\ b = -24 \end{array}$$

c) Queda:

$$Resto = \left(-\sqrt{3}\right)^5 - 4\left(-\sqrt{3}\right)^3 - m\left(-\sqrt{3}\right) = 5\sqrt{3} \Rightarrow m = 2$$

d) Queda:

$$Resto = C\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} = 2$$

e) Queda:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Para que sea divisible por } (x-2) \Rightarrow B(2) = 0 \\ \text{Para que sea divisible por } (x+1) \Rightarrow B(-1) = 0 \\ \text{Para que dé resto 4 al dividir por } x \Rightarrow B(0) = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 8 + 4a + 2b + c = 0 \\ -1 + a - b + c = 0 \\ c = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = -3 \\ b = 0 \\ c = 4 \end{array}$$

PÁGINA 53

8. Obtén la fracción irreducible en cada una de las siguientes:

a) $\dfrac{5x^2 - 15x}{10x^3 + 15x^2}$

b) $\dfrac{2x - 4}{x^2 - 4x + 4}$

c) $\dfrac{6 - x - x^2}{x^2 + 2x - 8}$

d) $\dfrac{x^3 - x^2 - 8x + 12}{x^3 - 6x^2 + 2x + 12}$

9. Efectúa las siguientes operaciones y presenta el resultado en forma de fracción irreducible:

a) $\dfrac{5x}{x + 3} + \dfrac{3}{x - 2}$

b) $\dfrac{2x - 1}{x^2 - 4} - \dfrac{2}{x + 2}$

c) $\dfrac{7x}{x - 3} - \dfrac{5}{x + 3} + \dfrac{6x}{x^2 - 9}$

d) $\dfrac{2x - 6}{x^2 - 1} \cdot \dfrac{5x + 5}{4x - 12}$

e) $\dfrac{x - 1}{2x + 6} : \dfrac{x^2 - 1}{-3x - 9}$

f) $\dfrac{x^2 - 6x + 5}{x^2 + 5x + 6} \cdot \dfrac{2x^2 - 8}{x^2 - x} : \dfrac{2x - 10}{x^2 + 3x}$

g) $\left(x - \dfrac{1}{x}\right) : \dfrac{x - 1}{x}$

h) $\left(x + \dfrac{x}{x - 1}\right) : \left(x - \dfrac{x}{x - 1}\right)$

i) $\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{3}{x}\right) \cdot \dfrac{x^3 + 9x}{x - 3}$

j) $\dfrac{x + 1}{2x} \cdot \left(\dfrac{1}{x + 1} - \dfrac{1}{x - 1}\right)$

10. Descompón en suma de fracciones simples cada una de las siguientes fracciones:

a) $\dfrac{5x + 2}{3x^2 + x}$

b) $\dfrac{2x + 10}{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}$

c) $\dfrac{2x - 1}{x^2 + 2x - 8}$

d) $\dfrac{4x^2 + 5}{x^3 - x^2 + 2x - 2}$

e) $\dfrac{2x^2 - 10x + 20}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$

f) $\dfrac{2x^3 + x^2 - 2x - 2}{x^2 + x}$

g) $\dfrac{-2x^2 + 2x - 4}{x^3 - 4x}$

h) $\dfrac{x^2 + 2}{x + 1}$

i) $\dfrac{2 - x - x^2}{x^2 - 2x + 1}$

11. Halla A y B para que sean ciertas cada una de las siguientes igualdades:

a) $\dfrac{3x^2 - 12x - 6}{(x - 2)(x + 1)^2} = \dfrac{-2}{x - 2} + \dfrac{Ax + B}{(x + 1)^2}$

b) $\dfrac{3x^2 - 12x - 6}{(x - 2)(x + 1)^2} = \dfrac{-2}{x - 2} + \dfrac{A}{(x + 1)^2} + \dfrac{B}{x + 1}$

12. Encuentra el polinomio de segundo grado $P(x)$ que cumple:

- $P(0) = -5$
- Tiene como raíz $x = -1$
- Da resto 9 al dividirlo por $x + 2$

8. Queda en cada caso:

a) $\dfrac{5x^2-15x}{10x^3+15x^2}=\dfrac{5x\,(x-3)}{5x^2\,(2x+3)}=\dfrac{x-3}{2x^2+3x}$

b) $\dfrac{2x-4}{x^2-4x+4}=\dfrac{2\,(x-2)}{(x-2)^2}=\dfrac{2}{x-2}$

c) $\dfrac{6-x-x^2}{x^2+2x-8}=\dfrac{(x-2)\,(x+3)\,(-1)}{(x-2)\,(x+4)}=\dfrac{-x-3}{x+4}$

d) $\dfrac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-6x^2+2x+12}=\dfrac{(x-2)^2\,(x+3)}{(x-2)\,(x^2-4x-6)}=\dfrac{(x-2)\,(x+3)}{x^2-4x-6}=\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4x-6}$

9. Queda en cada caso:

a) $\dfrac{5x}{x+3}+\dfrac{3}{x-2}=\dfrac{5x^2-7x+9}{(x+3)\,(x-2)}$

b) $\dfrac{2x-1}{x^2-4}-\dfrac{2}{x+2}=\dfrac{3}{x^2-4}$

c) $\dfrac{7x}{x-3}-\dfrac{5}{x+3}+\dfrac{6x}{x^2-9}=\dfrac{7x^2+22x+15}{x^2-9}$

d) $\dfrac{2x-6}{x^2-1}\cdot\dfrac{5x+5}{4x-12}=\dfrac{2\,(x-3)\cdot 5\cdot(x+1)}{(x-1)\,(x+1)\cdot 4\cdot(x-3)}=\dfrac{5}{2x-2}$

e) $\dfrac{x-1}{2x+6}:\dfrac{x^2-1}{-3x-9}=\dfrac{(x-1)\cdot(-3)\cdot(x+3)}{2\,(x+3)\,(x-1)\,(x+1)}=\dfrac{-3}{2x+2}$

f) $\dfrac{x^2-6x+5}{x^2+5x+6}\cdot\dfrac{2x^2-8}{x^2-x}:\dfrac{2x-10}{x^2+3x}=\dfrac{(x-1)\,(x-5)\cdot 2\cdot(x-2)\,(x+2)\cdot x\cdot(x+3)}{(x+2)\,(x+3)\cdot x\cdot(x-1)\cdot 2\cdot(x-5)}=x-2$

g) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right):\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{x^2-1}{x}:\dfrac{x-1}{x}=x+1$

h) $\left(x+\dfrac{x}{x-1}\right):\left(x-\dfrac{x}{x-1}\right)=\dfrac{x^2}{x-1}:\dfrac{x^2-2x}{x-1}=\dfrac{x^2(x-1)}{(x-1)\cdot x\cdot(x-2)}=\dfrac{x}{x-2}$

i) $\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{3}{x}\right)\cdot\dfrac{x^3+9x}{x-3}=\dfrac{x^2-9}{3x}\cdot\dfrac{x^3+9x}{x-3}=\dfrac{(x-3)\,(x+3)\cdot x\cdot(x^2+9)}{3\cdot x\cdot(x-3)}=$

$=\dfrac{(x+3)\,(x^2+9)}{3}=\dfrac{x^3+3x^2+9x+27}{3}$

j) $\dfrac{x+1}{2x}\cdot\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\dfrac{x+1}{2x}\cdot\dfrac{-2}{(x+1)\,(x-1)}=\dfrac{-2\cdot(x+1)}{2\cdot x\cdot(x+1)\,(x-1)}=\dfrac{-1}{x^2-x}$

10. La descomposición en cada caso queda:

a) $\dfrac{5x+2}{3x^2+x}=\dfrac{5x+2}{x\,(3x+1)}=\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{3x+1}$

b) $\dfrac{2x+10}{x^3-2x^2+3x-6}=\dfrac{2x+10}{(x-2)\,(x^2+3)}=\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{-2x-2}{x^2+3}$

c) $\dfrac{2x-1}{x^2+2x-8}=\dfrac{2x-1}{(x-2)\,(x+4)}=\dfrac{\frac{1}{2}}{x-2}+\dfrac{\frac{3}{2}}{x+4}$

d) $\dfrac{4x^2+5}{x^3-x^2+2x-2}=\dfrac{4x^2+5}{(x-1)\,(x^2+2)}=\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{x+1}{x^2+2}$

e) $\dfrac{2x^2-10x+20}{x^3-2x^2-4x+8}=\dfrac{2x^2-10x+20}{(x+2)\,(x-2)^2}=\dfrac{3}{x+2}+\dfrac{2}{(x-2)^2}+\dfrac{-1}{x-2}$

f) $\dfrac{2x^3+x^2-2x-2}{x^2+x}=\dfrac{(2x-1)\,(x^2+x)-x-2}{x^2+x}=(2x-1)+\dfrac{-x-2}{x\,(x+1)}=2x-1+\dfrac{-2}{x}+\dfrac{1}{x+1}$

g) $\dfrac{-2x^2+2x-4}{x^3-4x}=\dfrac{-2x^2+2x-4}{x\,(x-2)\,(x+2)}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{-1}{x-2}+\dfrac{-2}{x+2}$

h) $\dfrac{x^2+2}{x+1}=\dfrac{(x+1)\,(x-1)+3}{x+1}=x-1+\dfrac{3}{x+1}$

i) $\dfrac{2-x-x^2}{x^2-2x+1}=\dfrac{-(x+2)\,(x-1)}{(x-1)^2}=\dfrac{-x-2}{x-1}=-1-\dfrac{3}{x-1}$

11. Los valores en cada caso son:

a) $\frac{-2}{x-2}+\frac{Ax+B}{(x+1)^2}=\frac{-2\,(x+1)^2+(Ax+B)\,(x-2)}{(x-2)\,(x+1)^2}$

$\Rightarrow\ -2\,(x+1)^2+(Ax+B)\,(x-2)=3x^2-12x-6$

Por el principio de identidad de polinomios obtenemos: $A=5$ y $B=2$

b) $\frac{-2}{x-2}+\frac{A}{(x+1)^2}+\frac{B}{x+1}=\frac{-2\,(x+1)^2+A\,(x-2)+B\,(x-2)\,(x+1)}{(x-2)\,(x+1)^2}$

$\Rightarrow\ -2\,(x+1)^2+A\,(x-2)+B\,(x-2)\,(x+1)=3x^2-12x-6$

Por el principio de identidad de polinomios obtenemos: $A=-3$ y $B=5$

12. Queda:

El polinomio es: $P(x)=ax^2+bx+c$

Imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} P(0)=-5\ \Rightarrow\ c=-5 \\ P(-1)=0\ \Rightarrow\ a-b+c=0 \\ P(-2)=9\ \Rightarrow\ 4a-2b+c=9 \end{array}\right\}\Rightarrow\ \begin{array}{l} a=2 \\ b=-3 \\ c=-5 \end{array}$$

El polinomio buscado es: $2x^2-3x-5$.

PÁGINA 54

ACTIVIDADES FINALES

■ 13. Calcula las siguientes potencias simplificando los resultados:

a) $(3 + x)^5$ c) $(4 - x)^7$ e) $\left(3\sqrt{3} - \frac{1}{3}\right)^5$ g) $\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}x\right)^4$

b) $(1 + 2x)^6$ d) $(-2 + \sqrt{2})^4$ f) $(-3 + 2x^2)^5$ h) $\left(\frac{1}{3} + 3x\right)^5$

■ 14. En el desarrollo del binomio $\left(3x - \frac{1}{x}\right)^7$, escribe:

a) El quinto término b) El coeficiente del sexto c) El exponente del cuarto

■ 15. Calcula $(x + 3)^4 + (x - 3)^4$.

■ 16. Efectúa las siguientes operaciones ofreciendo el resultado como fracción irreducible:

a) $\dfrac{\dfrac{1}{1+x} - \dfrac{x}{1-x^2}}{\dfrac{x-2x^2}{1-x}}$ b) $\dfrac{\dfrac{1+2x}{x-2} - 2}{1 + \dfrac{2+4x}{x-2}}$

■ 17. Encuentra un polinomio de grado 4 en cada uno de los siguientes casos:

a) Coeficiente principal -1; raíz doble 1; raíces simples 0 y -1

b) Coeficiente principal 2; raíz simple -2; raíz triple -1

c) Raíces simples 1, 2, 3 y 4

■ 18. Halla A, B y C de modo que sea cierta la siguiente igualdad:

$$\frac{5x^2 - x + 12}{x^3 + 4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

■ 19. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Halla el término sexto del desarrollo de $(1 + x)^{10}$.

b) Halla el término central del desarrollo de $(3 - 4x)^{12}$.

c) Halla el lugar que ocupa el término en el que x tiene exponente 18 del desarrollo $(x^2 + \sqrt{x})^{12}$.

■ 20. Calcula el valor del término independiente en el desarrollo del binomio $\left(\frac{1}{x} - 2x\right)^6$.

■ 21. Opera y simplifica:

a) $\dfrac{\dfrac{x-a}{x+a} - \dfrac{x^2+a^2}{x^2-a^2}}{\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^2 - 1}$ b) $\dfrac{\left(1 - \dfrac{m}{m+1}\right)^2}{1 + \dfrac{m}{m+1}} \cdot \dfrac{\dfrac{2}{m} + \dfrac{1}{m^2}}{1 - \dfrac{1}{m}}$

13. Utilizando el binomio de Newton y operando obtenemos:

a) $\left(3+x\right)^5 = 243 + 405x + 270x^2 + 90x^3 + 15x^4 + x^5$

b) $\left(1+2x\right)^6 = 1 + 12x + 60x^2 + 160x^3 + 240x^4 + 192x^5 + 64x^6$

c) $\left(4-x\right)^7 = 16\,384 - 28\,672x + 21504x^2 - 8\,960x^3 + 2\,240x^4 - 336x^5 + 28x^6 - x^7$

d) $\left(-2+\sqrt{2}\right)^4 = 68 - 48\sqrt{2}$

e) $\left(3\sqrt{3} - \dfrac{1}{3}\right)^5 = \dfrac{61484\sqrt{3}}{27} - \dfrac{297\,676}{243}$

f) $\left(-3+2x^2\right)^5 = 32x^{10} - 240x^8 + 720x^6 - 1080x^4 + 810x^2 - 243$

g) $\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{4}x\right)^4 = \dfrac{1}{16} - \dfrac{3}{8}x + \dfrac{27}{32}x^2 - \dfrac{27}{32}x^3 + \dfrac{81}{256}x^4$

h) $\left(\dfrac{1}{3} - 3x\right)^5 = \dfrac{1}{243} + \dfrac{5}{27}x + \dfrac{10}{3}x^2 - 30x^3 + 135x^4 + 243x^5$

14. En cada uno de los casos quedaría:

a) $T_{5^o} = \dbinom{7}{4} \cdot \left(3x\right)^3 \cdot \left(-\dfrac{1}{x}\right)^4 = \dfrac{945}{x}$

b) $T_{6^o} = \dbinom{7}{5} \cdot \left(3x\right)^2 \cdot \left(-\dfrac{1}{x}\right)^5 = -\dfrac{189}{x^3} \Rightarrow \text{Coeficiente} = -189$

c) $T_{4^o} = \dbinom{7}{3} \cdot \left(3x\right)^4 \cdot \left(-\dfrac{1}{x}\right)^3 = -2\,835x \Rightarrow$ Exponente del término en x es 1

15. Desarrollando cada una de las potencias mediante la fórmula del binomio de Newton obtenemos:

$$(x+3)^4 + (x-3)^4 = (x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81) + (x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81) =$$
$$= 2x^4 + 108x^2 + 162$$

16. Ambos resultados quedan:

$$\text{a)}\ \frac{\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{x}{1-x^2}}{\dfrac{x-2x^2}{1-x}}=\frac{\dfrac{1-2x}{(1-x)\,(1+x)}}{\dfrac{x\,(1-2x)}{1-x}}=\frac{(1-2x)\cdot(1-x)}{x\,(1-x)\,(1+x)\,(1-2x)}=\frac{1}{x\,(x+1)}$$

$$\text{b)}\ \frac{\dfrac{1+2x}{x-2}-2}{1+\dfrac{2+4x}{x-2}}=\frac{\dfrac{5}{x-2}}{\dfrac{5x}{x-2}}=\frac{5\cdot(x-2)}{5x\,(x-2)}=\frac{1}{x}$$

17. Los polinomios pedidos son:

a) $P(x)=-1\cdot(x-1)^2(x-0)(x+1)=-x^4+x^3+x^2-x$

b) $P(x)=2\cdot(x+1)^3(x+2)=2x^4+10x^3+18x^2+14x+4$

c) $P(x)=a\cdot(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=a\cdot(x^4-10x^3+35x^2-50x+24)$

18. Operamos y aplicamos el principio de identidad de polinomios:

$$\frac{5x^2-x+12}{x^3+4x}=\frac{A\left(x^2+4\right)+(Bx+C)x}{x\left(x^2+4\right)}\ \Rightarrow\ 5x^2-x+12=(A+B)x^2+Cx+4A\ \Rightarrow\ \begin{cases}A=3\\ B=2\\ C=-1\end{cases}$$

19. Queda lo siguiente:

a) $T_{6^o}=\binom{10}{5}\cdot(1)^5\cdot(x)^5=252x^2$

b) $T_{7^o}=\binom{12}{6}\cdot(3)^6\cdot(-4x)^6=924\cdot3^6\cdot4^6\cdot x^6=2\,759\,049\,216x^6$

c) $T_{n+1}=\binom{12}{n}\cdot\left(x^2\right)^{12-n}\cdot\left(\sqrt{x}\right)^n=\binom{12}{n}\cdot x^{24-\frac{3n}{2}}$

Por tanto: $24-\dfrac{3n}{2}=18\ \Rightarrow\ n=4$ es el término quinto.

20. Desarrollamos:

$$T_{n+1} = \binom{6}{n} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{6-n} \cdot (-2x)^n = \binom{6}{n} \cdot x^{n-6} \cdot x^n \cdot (-2)^n = \binom{6}{n} \cdot x^{2n-6} \cdot (-2)^n$$

Por tanto, el término independiente cumplirá: $2n-6=0 \Rightarrow n=3$

El valor del término independiente es:

$$T_{4^o} = \binom{6}{3} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^3 \cdot (-2x)^3 = -160$$

21. Ambos resultados quedan:

a) $$\frac{\dfrac{x-a}{x+a} - \dfrac{x^2+a^2}{x^2-a^2}}{\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^2 - 1} = \frac{\dfrac{-2ax}{x^2-a^2}}{\dfrac{-4ax}{(x+a)^2}} = \frac{-2ax\,(x+a)^2}{-4ax\,(x-a)\,(x+a)} = \frac{x+a}{2x-2a}$$

b) $$\frac{\left(1-\dfrac{m}{m+1}\right)^2}{1+\dfrac{m}{m+1}} \cdot \frac{\dfrac{2}{m}+\dfrac{1}{m^2}}{1-\dfrac{1}{m}} = \frac{\dfrac{1}{(m+1)^2}}{\dfrac{2m+1}{m+1}} \cdot \frac{\dfrac{2m+1}{m^2}}{\dfrac{m-1}{m}} = \frac{(2m+1)\cdot(m+1)\cdot m}{(m+1)^2\cdot(2m+1)\cdot m^2\cdot(m-1)} =$$

$$= \frac{1}{m\,(m^2-1)} = \frac{1}{m^3-m}$$

Unidad 3 – Ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Inecuaciones

PÁGINA 57

cuestiones iniciales

1. Halla los valores que, sustituidos por x, verifiquen las igualdades siguientes:

a) $(x-2)^2 = x^2 - 5x + 5$ b) $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

2. ¿Qué dos números dan el mismo resultado cuando se suman que cuando se multiplican? ¿Y si consideramos tres números?

3. En una competición de baloncesto a doble vuelta participan 12 equipos. Cada partido ganado vale 2 puntos, y los partidos perdidos, 1 punto (no puede haber empates). Al final de la competición, un equipo tiene 36 puntos. ¿Cuántos partidos ha ganado?

4. Los pueblos de Abejar, Buitrago y Cidones no están situados en línea recta. Para ir desde Abejar a Cidones, pasando por Buitrago, se recorren 24 km. En el camino de Buitrago a Abejar, pasando por Cidones, se cubren 32 km. Desde Cidones a Buitrago, pasando por Abejar, se recorren 28 km. ¿Cuáles son los pueblos más cercanos entre sí?

SOLUCIONES

1. Operando obtenemos:

a) $x^2 - 4x + 4 = x^2 - 5x + 5 \Rightarrow x = 1$
Esta igualdad sólo se verifica para $x = 1$.

b) Esta igualdad se verifica para todos los valores de x.

2. En cada uno de los casos:

- Son números x, y que verifican: $x + y = x \cdot y$. Es decir: $\dfrac{x}{x-1} = y$.

Todos los números $x; \dfrac{x}{x-1}$ con $x \neq 1$ dan el mismo resultado al sumar y al multiplicar.

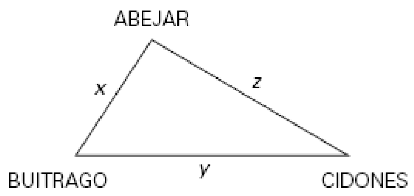
- En el caso de tres números, éstos quedarían de la forma: x; y; $\dfrac{x+y}{xy-1}$ con $x \cdot y \neq 1$ y se

obtienen de forma análoga al caso anterior.

3. Llamamos x a los partidos ganados. Como participan 12 equipos a doble vuelta se juegan 22 partidos. Por tanto:

$$2 \cdot x + 1 \cdot (22 - x) = 36$$
$$2x + 22 - x = 36$$
$$x = 14 \text{ partidos ganados.}$$

4. Consideremos el siguiente esquema:



Imponiendo las condiciones del problema:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 24 \\ y + z = 32 \\ x + z = 28 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 10 \text{ km de Abejar a Buitrago} \\ y = 14 \text{ km de Buitrago a Cidones} \\ z = 18 \text{ km de Abejar a Cidones} \end{array}$$

PÁGINA 77

ACTIVIDADES

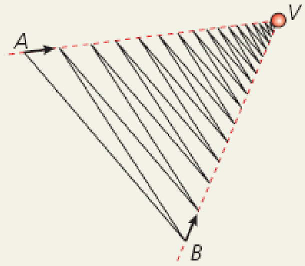
Practica la fase de búsqueda de estrategias en la resolución de los siguientes problemas:

1. **Producto de cuatro enteros.** Observa las siguientes igualdades:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 5^2 - 1 \qquad 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 11^2 - 1 \qquad 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 19^2 - 1$$

¿Será siempre cierto que el producto de cuatro enteros consecutivos es un cuadrado perfecto menos uno?

2. **Naves hacia Venus.** Los cohetes *A* y *B* marchan hacia Venus a una velocidad de 50 000 km/s, formando sus trayectorias hacia dicho planeta un ángulo de 60°. En un instante dado, hallándose ambos a 3 000 000 de km de Venus, *A* emite una señal de adio (velocidad de esta 300 000 km/s) que, una vez alcanzado *B*, es devuelta por este hacia *A*. Este nuevamente la reenvía y así sucesivamente, hasta que ambos cohetes llegan al planeta. Halla la distancia recorrida por las señales radio eléctricas desde su emisión hasta ese momento.



3. **A buen fin, mejor principio.** ¿En qué cifra termina $7^{83\,578}$?

SOLUCIONES

1. Veamos si el producto de cuatro números enteros $(x-1)x(x+1)(x+2)$ es un cuadrado perfecto menos una unidad.

$$\left.\begin{array}{l}(x-1)\,x\,(x+1)\,(x+2) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x \\ (x^2 + x - 1)^2 = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ Luego } (x-1)\,x\,(x+1)\,(x+2) = (x^2 + x - 1)^2 - 1$$

2. Ambos cohetes tardan $\dfrac{3\,000\,000}{50\,000} = 60$ segundos en alcanzar Venus. Durante este tiempo la señal, en sus idas y venidas ha recorrido:

$$300\,000 \cdot 60 = 18\,000\,000 \text{ km}.$$

3. Planteamos lo siguiente:

$7^1 = 7 \quad \Rightarrow$ termina en 7
$7^2 = 49 \quad \Rightarrow$ termina en 9
$7^3 = 343 \quad \Rightarrow$ termina en 3
$7^4 = 2\,401 \quad \Rightarrow$ termina en 1
$7^1 = 16\,807 \quad \Rightarrow$ termina en 7

Por tanto hay cuatro terminaciones distintas que se repiten cíclicamente; de modo que:

$$\begin{array}{l|l} 83\,578 & 4 \\ \hline R = 2 & 20\,894 \end{array}$$

Es decir, 7^{83578} termina en el mismo número que 7^2, es decir, termina en 9.

PÁGINA 80

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $1 - \frac{x+1}{6} = \frac{x}{2} + \frac{x-1}{6}$

b) $\frac{3x+2}{x+1} - \frac{3}{4} = 2$

c) $\frac{8}{x} - 1 = \frac{4}{x}$

d) $\frac{x}{6} - \frac{2x-1}{6} - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5} - \frac{x}{3}\right) = 0$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x(x+3) = 3(x-1)$

b) $x + 1 = \frac{6}{x}$

c) $(x+2)(x-2) = 2(x+5) + 21$

d) $\frac{9}{x} - \frac{x}{3} = 2$

e) $(x^2 - 5)(x^2 - 3) = -1$

f) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

g) $x^2 - (a+b)x + ab = 0$

h) $x^2 + 2ax + a^2 - b^2 = 0$

3. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Halla el valor de m en la ecuación $x^2 + mx - 24 = 0$ sabiendo que una de las raíces es 8.

b) Las raíces de la ecuación $x^2 + ax + b = 0$ son 2 y -3. Halla a y b.

c) Halla b en la ecuación $2x^2 + bx + 50 = 0$ para que las dos raíces de la ecuación sean iguales.

d) Halla el valor de k en la ecuación $x^2 - (k+5)x + 2 = 0$ para que una raíz sea el doble que la otra.

4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$

b) $-x^4 + x^3 - 4x^2 + 4x = 0$

c) $4x^4 - 65x^2 + 16 = 0$

d) $9x^4 + 5x^2 - 4 = 0$

e) $x^6 + 19x^3 - 216 = 0$

f) $x^2 - 3x + 1 = \frac{2}{x^2 - 3x}$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{x^2 - 5} = 2$

b) $\sqrt{x^2 - 5x + 3} = 2x - 1$

c) $\sqrt{x^2 + 9} + x^2 = 21$

d) $3x - 3\sqrt{x+3} = x + 3$

e) $\sqrt{2x-1} - \sqrt{2x-4} = 3$

f) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+6} = \frac{3}{\sqrt{x+3}}$

6. El dividendo de una división es 1 081. El cociente y el resto son iguales y el divisor es doble del cociente. Halla el divisor.

7. Los dos catetos de un triángulo rectángulo difieren en 5 unidades y la hipotenusa mide 25 cm. Calcula los catetos.

8. La suma de un número y su inverso es $\frac{34}{15}$, ¿cuánto vale el número?

9. El número de días que tiene un año tiene la propiedad de ser el único número que es suma de los cuadrados de tres números consecutivos. Además, es también suma de los cuadrados de los dos números consecutivos a los anteriores. Demuéstralo.

SOLUCIONES

1. Las soluciones son:

   a) $x=\frac{6}{5}$ b) $x=3$ c) $x=4$ d) $x=\frac{3}{5}$

2. Las soluciones son:

   a) $2x(x+3)=3(x-1) \Leftrightarrow 2x^2+3x+3=0$ No tiene soluciones reales.

   b) $x+1=\frac{6}{x} \Leftrightarrow x^2+x-6=0 \Rightarrow x_1=2;\ x_2=-3$

   c) $(x+2)(x-2)=2(x+5)+21 \Leftrightarrow x^2-2x-35=0 \Rightarrow x_1=7;\ x_2=-5$

   d) $\frac{9}{x}-\frac{x}{3}=2 \Leftrightarrow x^2+6x-27=0 \Rightarrow x_1=3;\ x_2=-9$

   e) $(x^2-5)(x^2-3)=-1 \Leftrightarrow x^4-8x^2+16=0 \Rightarrow x_1=2;\ x_2=-2$

   f) $x^4-13x^2+36=0 \Rightarrow x_1=2;\ x_2=-2;\ x_3=3;\ x_4=-3$

   g) $x^2-(a+b)x+ab=0 \Rightarrow x_1=a;\ x_2=b$

   h) $x^2+2ax+(a^2-b^2)=0 \Rightarrow x_1=(b-a);\ x_2=(-a-b)$

3. Las soluciones quedan:

a) Si una de las raíces de la ecuación es 8, ésta verificará la misma; es decir: $8^2+8m-24=0 \;\Rightarrow\; m=-5$

b) Si las raíces de la ecuación son 2 y -3, éstas deben verificar la ecuación, por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{l} 4+2a+b=0 \\ 9-3a+b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a=1 \\ b=-6 \end{array}$$

c) Las dos raíces son iguales si el valor del discriminante es nulo, es decir:

$$b^2-4ac=0 \;\Rightarrow\; b^2-4\cdot 2\cdot 50=0 \;\Rightarrow\; b=\pm 20$$

d) Sean x_1 y x_2 las raíces de la ecuación. Sabemos que:

$$\left.\begin{array}{r} x_1+x_2=K+5 \\ x_1\cdot x_2=2 \\ x_1=2x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_2=\pm 1 \\ x_1=\pm 2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Si } x_1=2;\ x_2=1 \;\Rightarrow\; K=-2 \\ \text{Si } x_1=-2;\ x_2=-1 \;\Rightarrow\; K=-8 \end{array}$$

4. Las soluciones quedan:

a) $x^3+2x^2-5x-6=0 \;\Leftrightarrow\; (x+1)(x-2)(x+3)=0$
$\Rightarrow$ Las soluciones son: $x_1=-1;\ x_2=2;\ x_3=-3$

b) $-x^4+x^3-4x^2+4x=0 \;\Leftrightarrow\; -x(x-1)(x^2+4)=0$
$\Rightarrow$ Las soluciones reales son: $x_1=0;\ x_2=1$

c) $4x^4-65x^2+16=0$. Las soluciones de la ecuación son: $x_1=\frac{1}{2};\ x_2=-\frac{1}{2};\ x_3=4;\ x_4=-4$

d) $9x^4+5x^2-4=0$. Las soluciones reales de la ecuación son: $x_1=\frac{2}{3};\ x_2=-\frac{2}{3}$

e) $x^6+19x^3-216=0$. Las soluciones reales de la ecuación son: $x_1=2;\ x_2=-3$

f) $x^2-3x+1=\dfrac{2}{x^2-3x} \;\Leftrightarrow\; x^4-6x^3+10x^2-3x-2=0$

Factorizando la ecuación obtenemos: $(x-1)(x-2)(x^2-3x-1)=0$

Las soluciones son: $x_1=1;\ x_2=2;\ x_3=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2};\ x_4=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$

5. Las soluciones quedan:

a) Elevando al cuadrado ambos miembros y operando obtenemos: $x^2-9=0$; así las soluciones quedarían: $x_1=3$; $x_2=-3$

b) Elevando al cuadrado ambos miembros y operando obtenemos: $3x^2+x-2=0$; así las soluciones quedarían: $x_1=-1$; $x_2=\frac{2}{3}$. La solución que verifica la ecuación dada es $x=\frac{2}{3}$.

c) Operando de forma análoga a los casos anteriores obtenemos:

$$x^4-43x^2+432=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=3\sqrt{3};\ x_2=-3\sqrt{3};\ x_3=4;\ x_4=-4$$

Las soluciones que verifican la ecuación dada son: $x_1=4$; $x_2=-4$

d) Operando de forma análoga a los casos anteriores obtenemos:

$$4x^2-21x-18=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=6;\ x_2=-\frac{3}{4} \quad \text{donde la solución buscada es: } x_1=6$$

e) Elevando al cuadrado ambos miembros y operando obtenemos: $-1=\sqrt{2x-4}$ y elevando de nuevo se obtiene $x=\frac{5}{2}$, sin embargo esta solución no verifica la ecuación inicial, por lo que se concluye que no existe solución.

f) Elevando al cuadrado y operando:

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{x+6}=\frac{3}{\sqrt{x+3}} \quad \Rightarrow \quad 3=x+3+\sqrt{(x+6)(x+3)} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+9x+18}=-x$$

Elevando al cuadrado se obtiene: $9x+18=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2$

6. Las condiciones del problema nos dan:

$$\begin{array}{r|l} 1081 & 2x \\ \cline{2-2} x & x \end{array}$$

De donde se extrae: $1081=2x^2+x$ cuyas soluciones son: $x_1=23$; $x_2=-23,5$.

El divisor de esta división es -46 ó 47.

7. El triángulo tiene por catetos x, $x-5$ y por hipotenusa 25, por lo tanto:

$$x^2+(x-5)^2=25^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-5x-300=0 \quad \Rightarrow \quad x=20\,\text{cm}$$

Un cateto mide 20 cm y el otro 15 cm.

8. Llamando x al número e imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

$$x+\frac{1}{x}=\frac{34}{15} \quad \Leftrightarrow \quad 15x^2-34x+15=0 \quad \Rightarrow \quad \text{Las soluciones son}: x_1=\frac{5}{3};\ x_2=\frac{3}{5}$$

9. La expresión sería: $(x-1)^2+x^2+(x+1)^2=365 \quad \Rightarrow \quad x=11$
Los números son: 10, 11 y 12.
Los números consecutivos a éstos son: 13 y 14, y se cumple también que $13^2+14^2=365$.

■ 10. Los estudiantes de 1° de Bachillerato están preparando una excursión. La agencia de viajes les da un presupuesto de 1 620 euros. En el último momento, dos estudiantes se ponen enfermos y, al no poder ir de excursión, el resto ha de pagar 4,80 euros más cada uno. ¿Cuántos estudiantes había en el curso?

■ 11. Resuelve los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=7 \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}=\dfrac{11}{2} \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2+y^2=117 \\ x\cdot y=-54 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y=x^2-3 \\ x+y=3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+y=41 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2y-x=4 \\ x^2-y^2=-5 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=57 \\ x^2-xy+y^2=43 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2-y^2=9 \\ x\cdot y=20 \end{cases}$

■ 12. Halla las dimensiones del rectángulo de 60 cm² de área y cuya base es 7 cm más larga que su altura.

■ 13. Marta quiere hacer el marco de un espejo con un listón de madera de 2 m, sin que le sobre ni le falte nada. Sabiendo que el espejo es rectangular y que tiene una superficie de 24 dm², ¿de qué longitud deben ser los trozos que ha de cortar?

■ 14. La suma de las áreas de dos cuadrados es 3 250 m² y su diferencia 800 m². Calcula la medida de sus lados.

■ 15. Dos albañiles hacen un trabajo en 3 horas. Uno de ellos lo haría en 4 horas. Calcula el tiempo que tardaría en hacerlo el otro solo.

■ 16. Utilizando el método de Gauss, resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales y di de qué tipo son:

a) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y=2 \\ y+z=3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y+5z=11 \\ x-5y+6z=29 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x-y=1 \\ y-z=1 \\ z-t=1 \\ t-x=-3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-y+2z=7 \\ 2x+y+5z=10 \\ x+y-4z=-9 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+4y-8z=-8 \\ 4x+8y-z=14 \\ 8x-y-4z=-10 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x+y+t=6 \\ x+z-t=-1 \\ y+z+t=6 \\ x-y+z=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+3y-2z=-1 \\ x+z=2 \\ 2x+5y=8 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3x+4y-z=3 \\ 6x-6y+2z=-16 \\ x-y+2z=-6 \end{cases}$ i) $\begin{cases} x-2y+3z=5 \\ 2x-y+z=3 \\ x-y+3z=6 \\ 3x+y-2z=0 \end{cases}$

■ 17. La suma de las tres cifras de un número es 7. La cifra de las centenas es igual a la suma de la de las decenas más el doble de la de las unidades. Si se permutan entre sí las cifras de las centenas y la de las unidades, el número disminuye en 297 unidades. Calcula dicho número.

10. Llamamos x al número de estudiantes del curso e y a la cantidad de dinero que paga cada uno. Imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} x\cdot y &= 1\,620 \\ (x-2)(y+4{,}8) &= 1\,620 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= 27 \text{ estudiantes} \\ y &= 60 \text{ euros paga cada uno} \end{aligned}\right.$$

11. Los sistemas resueltos quedan:

a) $\left.\begin{aligned} \frac{2}{x}+\frac{3}{y} &= 7 \\ \frac{3}{x}+\frac{2}{y} &= \frac{11}{2} \end{aligned}\right\}$ Por reducción obtenemos:

$\boxed{x=2}$; $\boxed{y=\frac{1}{2}}$

b) $\left.\begin{aligned} y &= x^2-3 \\ x+y &= 3 \end{aligned}\right\}$ Por sustitución obtenemos:

$\boxed{\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1 \end{aligned}}$; $\boxed{\begin{aligned} x &= -3 \\ y &= 6 \end{aligned}}$

c) $\left.\begin{aligned} 2y-x &= 4 \\ x^2-y^2 &= -5 \end{aligned}\right\}$ Por sustitución obtenemos:

$\boxed{\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 3 \end{aligned}}$ ó $\boxed{\begin{aligned} x &= \frac{2}{3} \\ y &= \frac{7}{3} \end{aligned}}$

d) $\left.\begin{aligned} x^2-y^2 &= 9 \\ x\cdot y &= 20 \end{aligned}\right\}$ Por sustitución obtenemos:

$\boxed{\begin{aligned} x &= 5 \\ y &= 4 \end{aligned}}$ ó $\boxed{\begin{aligned} x &= -5 \\ y &= -4 \end{aligned}}$

e) $\left.\begin{aligned} x^2+y^2 &= 117 \\ x\cdot y &= -54 \end{aligned}\right\}$ Por sustitución obtenemos:

$\boxed{\begin{aligned} x &= 9 \\ y &= -6 \end{aligned}}$ ó $\boxed{\begin{aligned} x &= -9 \\ y &= 6 \end{aligned}}$ ó

$\boxed{\begin{aligned} x &= 6 \\ y &= -9 \end{aligned}}$ ó $\boxed{\begin{aligned} x &= -6 \\ y &= 9 \end{aligned}}$

f) $\left.\begin{array}{r} x+y=41 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=9 \end{array}\right\}$ Por sustitución obtenemos:

$$\boxed{\begin{array}{l} x=25 \\ y=16 \end{array}} \text{ ó } \boxed{\begin{array}{l} x=16 \\ y=25 \end{array}}$$

g) $\left.\begin{array}{r} x^2+xy+y^2=57 \\ x^2-xy-y^2=43 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} \text{Sumando ambas ecuaciones obtenemos } x^2+y^2=50 \\ \text{Restando ambas ecuaciones obtenemos } xy=7 \end{array}\right\}$

Resolviendo este sistema por sustitución obtenemos:

$\boxed{x=7 \;\; y=1}$ $\boxed{x=-7 \;\; y=-1}$ $\boxed{x=1 \;\; y=7}$ $\boxed{x=-1 \;\; y=-7}$

12. Llamando x a la longitud de la altura, la base tendrá por longitud $(7+x)$. Conocida el área se verifica:

$$x(7+x)=60 \quad \Rightarrow \quad x=5\,\text{cm}$$

El rectángulo mide 5 cm de altura y 12 cm de base.

13. Llamando x a la longitud de la base e y a la altura e imponiendo las condiciones del problema obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+2y=20 \\ x\cdot y=24 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=6\text{ cm} \\ y=4\text{ cm} \end{array} \text{ o bien } \begin{array}{l} x=4\text{ cm} \\ y=6\text{ cm} \end{array}$$

14. Llamando x al área de un cuadrado e y al área del otro obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=3\,250 \\ x-y=800 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=2\,025\text{ m}^2 \\ y=1225\text{ m}^2 \end{array}$$

De donde el lado de un cuadrado mide 35 m y el del otro 45 m.

15. Llamando x al tiempo que tarda él solo en hacer el trabajo obtenemos:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{x}=\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x=12 \text{ horas tardaría él solo.}$$

16. Las soluciones quedan:

a) $\left.\begin{array}{l} x+y+z=3 \\ x+y=2 \\ y+z=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=0 \\ y=2 \\ z=1 \end{array}$

b) $\left.\begin{array}{l} x+y+2z=7 \\ 2x+y+5z=10 \\ x+y-4z=-9 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=1 \\ y=-2 \\ z=2 \end{array}$

c) $\left.\begin{array}{l} x+3y-2z=-1 \\ x+z=2 \\ 2x+5y=8 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=-1 \\ y=2 \\ z=3 \end{array}$

d) $\left.\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ 2x+3y+5z=11 \\ x-5y+6z=29 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=1 \\ y=-2 \\ z=3 \end{array}$

e) $\left.\begin{array}{l} x+4y-8z=-8 \\ 4x+8y-z=14 \\ 8x-y-4z=-10 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=0 \\ y=2 \\ z=2 \end{array}$

f) $\left.\begin{array}{l} 3x+4y-z=3 \\ 6x-6y+2z=-16 \\ x-y+2z=-6 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=-1 \\ y=1 \\ z=-2 \end{array}$

$g)$ $\left.\begin{array}{l} x-y=1 \\ y-z=1 \\ z-t=1 \\ t-x=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=3+m \\ y=2+m \\ z=1+m \\ t=m \\ m\in R \end{array}$

$h)$ $\left.\begin{array}{l} x+y+t=6 \\ x+z-t=-1 \\ y+z+t=6 \\ x-y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \\ z=1 \\ t=3 \end{array}$

$$i)\ \left.\begin{array}{l} x-2y+3z=5 \\ 2x-y+z=3 \\ x-y+3z=6 \\ 3x+y-2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=1 \\ y=1 \\ z=2 \end{array}$$

17. Sea el número *xyz*.
De las siguientes condiciones del enunciado obtenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=7 \\ x=y+2z \\ xyz-zyx=297 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=7 \\ x-y-2z=0 \\ (100x+10y+z)-(100z+10y+x)=297 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema obtenemos: $x=4,\ y=2,\ z=1$

El número buscado es el 421.

ACTIVIDADES FINALES

18. Un hombre le dijo a su hijo: «Cuando transcurra la tercera parte de los años que yo tengo, tú tendrás la mitad de mi edad actual. Sí, —contestó el hijo—, pero hace sólo 4 años, tu edad era 11 veces la mía». ¿Cuál es la edad actual del hijo?

19. Las tres cifras de un número suman 18. Si a ese número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, se obtiene 594; la cifra de las decenas es media aritmética entre las otras dos. Halla dicho número.

20. Las edades de una familia formada por los padres y una hija suman 86 años. Halla la edad de cada uno de ellos sabiendo que la edad de la madre es triple de la edad de la hija, y las edades del padre y de la hija difieren en 26 años.

21. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $128^{x+1} = 2^{x^2-x-2}$

b) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 7$

c) $9^x - 2 \cdot 3^{x+2} + 81 = 0$

d) $4^{x+1} + 2^{x+3} - 320 = 0$

e) $5^{x+1} = 10 + 3 \cdot 5^{2-x}$

f) $6^{1-x} + 6^x = 7$

g) $3^x \cdot 9^x = 9^3$

h) $2^{-x} = 8^{3-x}$

i) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 1$

22. Calcula el valor de x en cada uno de los siguientes apartados, ayudándote de la definición de logartimo:

a) $\log_2 \sqrt{32} = x$

b) $\ln e^5 = x$

c) $\log_x \dfrac{1}{8} = 3$

d) $\log x = -1$

e) $x = \log_{\sqrt{3}} 3$

f) $\log_x 0{,}0001 = 4$

g) $\dfrac{1}{2} = \ln x$

h) $\log_{\frac{1}{2}} x = -2$

23. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log x = 1 + \log (22 - x)$

b) $\log (3x - 1) - \log (2x + 3) = -\log 25 + 1$

c) $2 \log (5x + 4) - \log 4 = \log (x + 4)$

d) $\dfrac{\log (5 + x^2)}{\log (2 - x)} = 2$

e) $(x^2 - 5x + 9) \log 2 + \log 125 = 3$

f) $2 \log_2 x - \log_2 (x - 16) = \log_2 64$

24. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x+2} - 5^{y+1} = -9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 24 \\ 2^{x+y} = 128 \end{cases}$

c) $\begin{cases} e^x = \dfrac{e^{11}}{e^y} \\ \log(x + y) + \log(x - y) = \log 55 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \log_x(y - 18) = 2 \\ \log_y(x + 3) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

f) $\begin{cases} \log_2 x + 3 \log_2 y = 5 \\ \log_2 x^2 - \log_2 y = 3 \end{cases}$

25. Una central lechera emplea partidas de 10 400 litros de leche que envasa en bricks de un litro de leche entera semidesnatada o desnatada, obteniendo por la venta 5 765 euros. Halla cuántos bricks de cada tipo envasa, sabiendo que su precio es de 0,60; 0,55 y 0,50 euros respectivamente y, además, el número de bricks de leche entera es el 60% del de semidesnatada y desnatada juntos.

18. Llamando x a la edad del padre e y a la edad del hijo obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} y+\dfrac{x}{3}=\dfrac{x}{2} \\ x-4=11\,(y-4) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -x+6y=0 \\ x-11y=-40 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=48 \\ y=8 \end{array}$$

El padre tiene 48 años y el hijo 8 años.

19. Sea el número xyz.
Imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=18 \\ (100x+10y+z)-(100z+10y+x)=594 \\ y=\dfrac{x+z}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=18 \\ x-z=6 \\ x-2y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=9 \\ y=6 \\ z=3 \end{array}$$

El número es el 963.

20. Llamamos x a la edad del padre, y a la edad de la madre y z a la edad de la hija. Obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=86 \\ y=3z \\ x-z=26 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=38 \\ y=36 \\ z=12 \end{array}$$

El padre tiene 38 años, la madre 36 años y la hija 12 años.

21. Las soluciones quedan:

a) $128^{x+1}=2^{x^2-x-2} \Leftrightarrow 2^{7(x+1)}=2^{x^2-x-2} \Leftrightarrow x^2-8x-9=0 \Rightarrow x_1=9;\ x_2=-1$

b) $2^x+2^{x+1}+2^{x+2}=7 \Leftrightarrow 2^x+2\cdot 2^x+4\cdot 2^x=7 \Leftrightarrow 2^x=1 \Rightarrow x=0$

c) $9^x-2\cdot 3^{x+2}+81=0 \Leftrightarrow 3^{2x}-18\cdot 3^x+81=0 \Rightarrow x=2$

d) $4^{x+1}+2^{x+3}-320=0 \Leftrightarrow 4\cdot 2^{2x}+8\cdot 2^x-320=0 \Rightarrow x=3$

e) $5^{x+1}=10+3\cdot 5^{2-x} \Leftrightarrow 5\cdot 5^x=10+\dfrac{75}{5^x} \Leftrightarrow 5\cdot 5^{2x}-10\cdot 5^x-75=0 \Rightarrow x=1$

f) $6^{1-x}+6^x=7 \Leftrightarrow \dfrac{6}{6^x}+6^x=7 \Leftrightarrow 6^{2x}-7\cdot 6^x+6=0 \Rightarrow x_1=0;\ x_2=1$

g) $3^x\cdot 9^x=9^3 \Leftrightarrow 3^{3x}=3^6 \Rightarrow x=2$

h) $2^{-x}=8^{3-x} \Leftrightarrow 2^{-x}=2^{9-3x} \Rightarrow x=\dfrac{9}{2}$

i) $2^{x}+2^{x-1}+2^{x-2}=1 \Leftrightarrow 4\cdot 2^{x}+2\cdot 2^{x}+2^{x}=4 \quad \Leftrightarrow 2^{x}=\dfrac{4}{7} \quad \Rightarrow x=\dfrac{ln\left(\frac{4}{7}\right)}{ln\,2}$

22. Las soluciones quedan:

a) $\log_2 \sqrt{32}=x \quad \Rightarrow \quad 2^{x}=\sqrt{32} \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{5}{2}$

b) $\ln e^{5}=x \quad \Rightarrow \quad 5\cdot \ln e=x \quad \Rightarrow \quad x=5$

c) $\log_x \dfrac{1}{8}=3 \quad \Rightarrow \quad x^{3}=\dfrac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{1}{2}$

d) $\log x=-1 \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{1}{10}$

e) $x=\log_{\sqrt{3}} 3 \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{\log 3}{\log \sqrt{3}}=\dfrac{\log 3}{\frac{1}{2}\log 3}=2$

f) $\log_x 0{,}0001=4 \Rightarrow x^{4}=0{,}0001 \Rightarrow x=0{,}1$

g) $\dfrac{1}{2}=\ln x \quad \Rightarrow \quad x=\sqrt{e}$

h) $\log_{\frac{1}{2}} x=-2 \quad \Rightarrow \quad x=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2} \quad \Rightarrow \quad x=4$

23. Las soluciones quedan:

a) $\log x=1+\log(22-x) \quad \Leftrightarrow \quad \log x=\log 10\,(22-x) \quad \Rightarrow \quad x=20$

b) $\log(3x-1)-\log(2x+3)=-\log 25+1 \quad \Leftrightarrow \quad \log\dfrac{3x-1}{2x+3}=\log\dfrac{10}{25} \quad \Rightarrow \quad x=1$

c) $2\log(5x+4)-\log 4=\log(x+4) \quad \Leftrightarrow \quad \log\dfrac{(5x+4)^{2}}{4}=\log(x+4) \quad \Rightarrow \quad x_1=0;\ x_2=-\dfrac{36}{25}$

d) $\dfrac{\log\left(5+x^{2}\right)}{\log(2-x)}=2 \quad \Leftrightarrow \quad \log\left(5+x^{2}\right)=\log(2-x)^{2} \quad \Rightarrow \quad x=-\dfrac{1}{4}$

e) $(x^2-5x+9)\log 2+\log 125=3 \;\Leftrightarrow\; \log(125\cdot 2^{x^2-5x+9})=\log 1000 \;\Leftrightarrow\; 2^{x^2-5x+9}=8 \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; x^2-5x+6=0 \;\Rightarrow\; x_1=2;\; x_2=3$

f) $2\log_2 x-\log_2(x-16)=\log_2 64 \;\Leftrightarrow\; \log_2\dfrac{x^2}{x-16}=\log_2 64 \;\Rightarrow\; x_1=32$

24. Las soluciones de los sistemas quedan:

a) $\left.\begin{array}{r} 2^x+5^y=9 \\ 2^{x+2}-5^{y+1}=-9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2^x+5^y=9 \\ 4\cdot 2^x-5\cdot 5^y=-9 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2^x=4 \Rightarrow x=2 \\ 5^y=5 \Rightarrow y=1 \end{array}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2^x+2^y=24 \\ 2^{x+y}=128 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2^x+2^y=24 \\ 2^{x+y}=2^7 \end{array}\right\} \Rightarrow x=4;\; y=3 \;\text{ ó }\; x=3;\; y=4$

c) $\left.\begin{array}{r} e^x=\dfrac{e^{11}}{e^y} \\ \log(x+y)+\log(x-y)=\log 55 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=11-y \\ (x+y)(x-y)=55 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=8 \\ y=3 \end{array}$

d) $\left.\begin{array}{r} \log_3 x+\log_3 y=0 \\ x+y=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x\cdot y=1 \\ x+y=3 \end{array}\right\} \Rightarrow x=2{,}62;\; y=0{,}38 \;\text{ ó }\; x=0{,}38;\; y=2{,}62$

e) $\left.\begin{array}{r} \log_x(y-18)=2 \\ \log_y(x+3)=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y-18=x^2 \\ x+3=\sqrt{y} \end{array}\right\} \Rightarrow x=\dfrac{3}{2};\; y=\dfrac{81}{4}$

f) $\left.\begin{array}{r} \log_2 x-3\log_2 y=5 \\ \log_2 x^2-\log_2 y=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \log_2 x-3\log_2 y=5 \\ 2\log_2 x-\log_2 y=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \log_2 x=2 \;\Rightarrow\; x=4 \\ \log_2 y=1 \;\Rightarrow\; y=2 \end{array}$

25. Llamando:

x: número de bricks de leche entera
y: número de bricks de leche semidesnatada
z: número de bricks de leche desnatada

Imponiendo las condiciones del problema obtenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=10\,400 \\ 0,6x+0,55y+0,5z=5\,765 \\ x=0,6(y+z) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=3\,900 \text{ bricks de leche entera} \\ y=3\,500 \text{ bricks de leche semidesnatada} \\ z=3\,000 \text{ bricks de leche desnatada} \end{array}$$

PÁGINA 83

26. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $\dfrac{-10}{x-2} > 0$ d) $\dfrac{6-2x}{x+3} \leq 0$ g) $\dfrac{x+1}{x} \geq 2$

b) $x^2 - 10x \leq 0$ e) $2x^2 - 12x + 18 \leq 0$ h) $\dfrac{3x}{8} > \dfrac{3x-9}{2} - \dfrac{2x-8}{3}$

c) $3(x-1) - 2(x+3) > 5x - 7$ f) $x(x-3) \leq x^2 + 5x + 2$ i) $\dfrac{2x-3}{x+1} < 1$

27. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} 2(x-1) < 6x + 3(2-x) \\ 5(x-3) \leq \dfrac{3-x}{3} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{3} \leq 2 \\ \dfrac{3x+1}{2} - \dfrac{3x-6}{4} > 2 \end{cases}$

28. En un número de seis cifras, la cifra de su izquierda es 1. Si se lleva esta cifra al primer lugar de la derecha, el número obtenido es triple del primitivo. Calcula el número primitivo.

29. En un trabajo actúan tres mecanógrafas y lo terminan en cuatro días. Si trabajase solamente la primera, lo terminaría en 12 días; si trabajase solamente la segunda, lo terminaría en 10 días. ¿En cuánto tiempo lo terminaría la tercera actuando sola?

30. Una caja de forma cúbica se llena con cierto número de cubitos de un centímetro cúbico y sobran 71 cubitos; pero, si todos los cubitos que hay se ponen en otra caja que tiene un centímetro más por cada arista, faltan 200 para llenarla. Calcula las longitudes de las aristas de las dos cajas y el número total de cubitos.

31. En un centro hay dos equipos de fútbol, A y B. Si del equipo A pasan tres personas al B, en ambos queda el mismo número. En cambio, si del B pasan 7 al A, queda en este un número que es el cuadrado de los de aquel. ¿Cuántos deportistas hay en cada equipo?

32. Resuelve las cuestiones siguientes referidas a ecuaciones de segundo grado:

a) En la ecuación $2x^2 - (m+1)x + m + 3 = 0$, determina el valor que ha de tomar m para que la diferencia de sus soluciones sea la unidad.

b) Calcula el valor de m en la ecuación $mx^2 + 14x + 12 = 0$, para que una de las soluciones sea seis veces la otra.

c) Determina el valor de m en la ecuación $x^2 + mx + 1 = 0$, sabiendo que una de las soluciones es $-\dfrac{1}{4}$. Halla la otra solución.

d) Determina m en la ecuación $x^2 - mx + 4 = 0$, de modo que las dos raíces de la ecuación sean iguales.

33. Calcula el valor de la expresión $\log_{\frac{1}{a}} a + \log_b \dfrac{1}{b}$.

26. Las soluciones son:

a) $(-\infty,2)$	d) $(-\infty,-3)\cup[3,+\infty)$	$g)$ $(0,1]$
b) $[0,10]$	e) $\{3\}$	$h)$ $(-\infty,4)$
c) $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$	f) $\left[-\dfrac{1}{4},+\infty\right)$	$i)$ $(-1,4)$

27. Operando con cada una de las inecuaciones de estos sistemas obtenemos los siguientes intervalos como solución:

a) $(-8,3]$ b) $(0,7]$

28. Por ensayo y error dirigido obtenemos que el número es 142 857. También se puede hacer mediante ecuaciones:

$$\text{Número}=100\,000+x \;\Rightarrow\; 3(100\,000+x)=x\cdot 10+1$$
$$\Rightarrow\; x=42\,857 \;\Rightarrow\; \text{Número}=142\,857$$

29. Llamamos *x* al tiempo que invertiría la tercera ella sola. Obtenemos:

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{10}+\frac{1}{x}=\frac{1}{4} \quad\Rightarrow\quad x=15 \text{ días tarda la } 3^{a}$$

30. Llamamos x a la longitud de la arista de la caja, obtenemos:

$$x^3+71=(x+1)^3-200 \quad\Rightarrow\quad x=9\,\text{cm}$$

Las aristas de las cajas son 9 cm y 10 cm, y hay 800 cubitos de 1 cm^3.

31. En el equipo A hay *x* futbolistas y en el equipo B hay *y* futbolistas.

$$\left.\begin{array}{l} x-3=y+3 \\ x+7=(y-7)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=18 \text{ futbolistas en el equipo A} \\ y=12 \text{ futbolistas en el equipo B} \end{array}$$

32. Cada uno de los apartados queda:

a) Resolviendo la ecuación obtenemos:

$$x = \frac{(m+1) \pm \sqrt{(m+1)^2 - 4 \cdot 2\,(m+3)}}{4}$$

Imponiendo la condición del enunciado:

$$\frac{(m+1) + \sqrt{(m+1)^2 - 8\,(m+3)}}{4} - \frac{(m+1) - \sqrt{(m+1)^2 - 8\,(m+3)}}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{(m+1)^2 - 8\,(m+3)} = 2 \Rightarrow m^2 - 6m - 27 = 0 \Rightarrow m = 9 \text{ ó } m = -3$$

b) Llamamos y, z a las soluciones de la ecuación. Obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} y + z = -\dfrac{14}{m} \\ y \cdot z = \dfrac{12}{m} \\ y = 6z \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} m = 2 \\ z = -1 \\ y = -6 \end{array}$$

c) Si una solución es $x_1 = -\frac{1}{4}$, ésta verifica la ecuación, por tanto:

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + m\left(-\frac{1}{4}\right) + 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{17}{4} \Rightarrow \text{La otra solución es } -4.$$

d) Resolviendo la ecuación $x^2 - mx + 4 = 0$ obtenemos:

$$x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 16}}{2}$$

Las dos raíces son iguales si: $m^2 - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \pm 4$

33. Quedaría del siguiente modo:

$$\log_{\frac{1}{a}} a + \log_b \frac{1}{b} = \frac{\log a}{\log \frac{1}{a}} + \frac{\log \frac{1}{b}}{\log b} = \frac{\log a}{-\log a} + \frac{-\log b}{\log b} = -2$$

PÁGINA 84

ACTIVIDADES FINALES

34. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(x^2 - 2) \cdot (x^2 + 2) = 12$

b) $\sqrt{2x^2 - 4} = 1 + \sqrt{x^2 - 3}$

c) $2x^5 + 3x^4 - 2x^3 = 3x^2$

d) $\frac{4}{x^2 - 1} = x^2 - 1$

35. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x^2 + xy = 12 \\ x - y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} \\ x + y + 2z = 150 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y = 6 - z \\ 3x - 5z = -4 - 2y \\ z - 6y = 9 - 4x \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + xy = 30 \\ xy + y^2 = 6 \end{cases}$

36. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales o logarítmicas:

a) $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 39$

b) $9^{x+1} = 55 + 8 \cdot 3^x$

c) $\frac{\log(5 - x^3)}{\log(1 - x)} = 3$

d) $\log_x(2 + x - 2x^2) = 3$

37. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $\frac{x+1}{x-1} + 2 < 0$

b) $x^3 + 10x \leq 11\,x^2$

38. El perímetro de un jardín rectangular es 36 m. Si se aumentan sus lados en 2 m cada uno, el área aumenta en 40 m². Halla las dimensiones del jardín.

39. Halla tres números sabiendo que su suma dividida por el primero de ellos es una división exacta de cociente 5. La misma suma dividida por el segundo de los números da 2 de cociente y 9 de resto. Finalmente, dividida por el tercero da 2 de cociente y 9 de resto.

40. Un padre tiene 27 años más que su hijo. ¿En qué etapa de la vida del hijo la edad del padre fue más de 10 veces la de su hijo?

41. Una empresa de telefonía móvil paga a sus comerciales 10 euros por cada móvil vendido y 1 200 euros fijos al mes. Otra empresa paga 5 euros por cada móvil vendido y 1 500 euros fijos al mes. ¿Qué número de móviles debe vender un comercial para que resulte más rentable trabajar para la segunda empresa?

42. Un individuo hace un viaje de 920 km en su coche. Su velocidad es de 80 km/h cuesta arriba, 120 km/h cuesta abajo, y 100 km/h en llano. A la ida emplea 9 horas en el viaje, y al volver por el mismo camino emplea 10 horas. ¿Cuántos kilómetros hace cuesta arriba y cuántos cuesta abajo? ¿y en llano?

43. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $|x^2 - 8| = 1$

b) $|2x - 3| = |x + 9|$

34. Las soluciones quedan:

a) $(x^2-2)(x^2+2)=12 \Rightarrow x^4=16 \Rightarrow x=\pm 2$

b) Elevando al cuadrado ambos miembros y operando obtenemos: $x^2-2=2\sqrt{x^2-3}$, y elevando de nuevo obtendríamos: $x^4-8x^2+16=0 \Rightarrow x=\pm 2$ y ambas soluciones son válidas.

c) Factorizando obtenemos: $x^2(x-1)(x+1)(2x+3)=0$ y sus soluciones serán las siguientes: $x=0$ doble ; $x=-1$; $x=1$; $x=-\dfrac{3}{2}$.

d) Operando obtenemos: $x^4-2x^2-3=0$ cuyas soluciones son: $x=\sqrt{3}$; $x=-\sqrt{3}$.

35. Los sistemas son:

a) Las soluciones son: $x=3$ e $y=1$ ó $x=-2$ e $y=-4$

b) Las soluciones son: $x=20$; $y=30$; $z=50$

c) Las soluciones son: $x=3$; $y=1$; $z=3$

d) Sumando ambas ecuaciones obtenemos: $(x+y)^2=36 \Rightarrow x+y=6$ ó $x+y=-6$ y la solución provendrá de la resolución de los dos sistemas siguientes:

$$\begin{cases} x+y=6 \\ x^2+xy=30 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=5 \\ y=1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x+y=-6 \\ x^2+xy=30 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=-5 \\ y=-1 \end{matrix}$$

36. Las soluciones quedan:

a) La solución sería: $x = 2$

b) Haciendo $3^x = z$ obtenemos la ecuación: $9z^2 - 8z - 55 = 0$ cuyas soluciones quedan como $z = 2,96$ y $z = -2,07$; por tanto:

$$3^x = 2,96 \Rightarrow x = \frac{\log 2,96}{\log 3} = 0,99$$

c) Operando obtenemos:

$$\log\left(5 - x^3\right) = 3\log\left(1 - x\right) \Rightarrow 5 - x^3 = \left(1 - x\right)^3 \Rightarrow 3x^2 - 3x - 4 = 0$$

$\Rightarrow x = 1,76$ solución no válida *y* $x = -0,76$ que es la solución válida.

d) Obtenemos la ecuación: $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ cuyas soluciones no verifican la ecuación original. Diremos, por tanto, que carece de soluciones.

37. Las soluciones quedan:

a) Operando obtenemos la inecuación: $\frac{3x - 1}{x - 1} < 0$ cuya solución es el intervalo $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$

b) Operando la ecuación: $x^3 - 11x^2 + 10x \leq 0$ cuya solución se define por $\left(-\infty, 0\right] \cup \left[1, 10\right]$

38. Llamando *x*, *y* a las dimensiones del jardín e imponiendo las condiciones del problema obtenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{c} 2x + 2y = 36 \\ \left(x + 2\right)\left(y + 2\right) = xy + 40 \end{array}\right\}$$

Este sistema tiene indefinidas soluciones, todos los valores de *x* e *y* que verifiquen la siguiente expresión: $x + y = 18$ con $x \in \left(0, 18\right)$ e $y \in \left(0, 18\right)$.

39. Llamando *x*, *y*, *z* a los números e imponiendo las condiciones del problema obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 5x \\ x + y + z = 2y + 9 \\ x + y + z = 2z + 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 9 \\ y = 18 \\ z = 18 \end{array}$$

40. Cuando la edad del hijo esté en el intervalo $(0,3)$.

41. Llamando x al número de móviles vendidos obtenemos la ecuación: $5x+1500>10x+1200$ cuya solución es $x<60$. Luego la solución es el conjunto de números enteros de x comprendidos en el intervalo $(0,60)$.

42. Llamamos x al número de kilómetros hacia arriba a la ida, y al número de kilómetros hechos en llano y z al número de kilómetros hacia abajo. Imponiendo las condiciones del problema obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=920 \\ \dfrac{x}{80}+\dfrac{y}{100}+\dfrac{z}{120}=9 \\ \dfrac{x}{120}+\dfrac{y}{100}+\dfrac{z}{80}=10 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=240 \text{ km} \\ y=200 \text{ km} \\ z=480 \text{ km} \end{array}$$

43. Las soluciones quedan:

a) $x^2-8=\pm 1 \quad \Rightarrow \quad x=\pm 3$ y $x=\pm\sqrt{7}$

b) $2x-3=x+9 \quad \Rightarrow \quad x=12$ o bien $2x-3=-(x+9) \quad \Rightarrow \quad x=-2$

Unidad 4 – Trigonometría I

PÁGINA 87

cuestiones iniciales

1. Un ángulo α, situado en el segundo cuadrante, tiene por coseno $\cos\alpha = -0{,}2$. Determina el resto de las razones trigonométricas de este ángulo.

2. Discute si son verdaderos o falsos los siguientes enunciados:

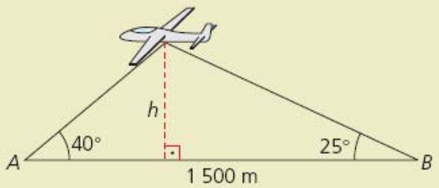
a) El seno de un ángulo vale 1,5.

b) La tangente de un ángulo vale –5 000.

c) El coseno de 720° vale 1.

3. Calcula el área de un pentágono regular de 12 cm de lado.

4. Dos amigos, situados a 1 500 m de distancia, observan en un mismo instante una avioneta, tal como se muestra en la figura. Las visuales que cada uno de ellos dirigen a la avioneta forman, respectivamente, ángulos de 40° y 25° con la horizontal. Calcula la altura a la que se encuentra la avioneta.



SOLUCIONES

1. Sabemos que $\cos\alpha = -0{,}2$ y que $90^{\circ} < \alpha < 180^{\circ}$. Utilizando la fórmula $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ hallamos $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}98$. Por otro lado quedaría:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -4{,}9$$

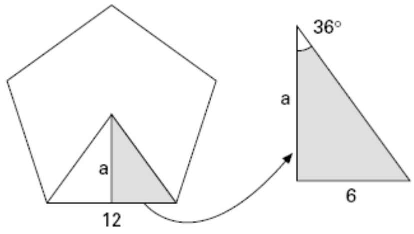
2. La discusión quedaría:

a) Falsa pues $\operatorname{sen}\alpha \in [-1{,}1]$

b) Verdadera pues $\operatorname{tg}\alpha \in (-\infty, +\infty)$

c) Verdadera pues $\cos 720^{\circ} \cong \cos 360^{\circ} = 1$.

3. Según el esquema:



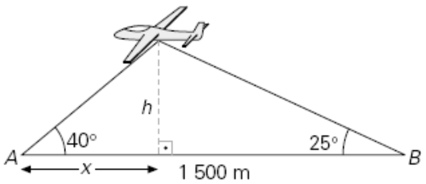
$$360º : 5 = 72º$$

En el triángulo rayado calculemos el valor de la apotema del pentágono.

$$\operatorname{tg} 36° = \frac{6}{a} \Rightarrow a = 8,26 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{5 \cdot 12 \cdot 8,26}{2} \Rightarrow \text{Área} = 247,8 \text{ cm}^2$$

4. Según el esquema:



De los dos triángulos rectángulos de la figura obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg} 40º = \dfrac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 25º = \dfrac{h}{1500 - x} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} h = \dfrac{1500 \cdot \operatorname{tg} 40º \cdot \operatorname{tg} 25º}{\operatorname{tg} 40º + \operatorname{tg} 25º} \\ \\ h = 449,61 \text{ m} \end{array}$$

PÁGINA 103

ACTIVIDADES

■ Intenta utilizar las ideas referentes a la fase de llevar adelante la estrategia en la resolución de los siguientes problemas:

1. El pequeño astuto. El pequeño astuto tiene más de 36 cajas, pero menos de 1 991. Las dispone todas en una pila triangular y luego las coloca formando una pila cuadrada. ¿Cuántas cajas tiene?

2. Igualdad. ¿Será cierta la siguiente igualdad?

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{988\cdot 999}+\frac{1}{999\cdot 1\,000}=0{,}999$$

3. Tostado rápido. Hay que tostar en un tostador tres rebanadas de pan. En el tostador caben dos rebanadas a la vez, pero sólo se tuestan por un lado. Se tarda 30 segundos en tostar una cara de una rebanada de pan; 5 segundos en colocarla en el tostador; 5 segundos en sacarla; y 3 segundos en darle la vuelta. ¿Cuál es el mínimo de tiempo que se necesita para tostar las tres rebanadas?

SOLUCIONES

1. Hay que buscar un número que sea a la vez triangular y cuadrado.

Números triangulares: $1, 3, 4, 10, 15, 21, \ldots, \dfrac{n^2+n}{2}$

Números cuadrados: $1, 4, 9, 16, 25, \ldots, n^2$

$\Rightarrow \dfrac{n^2+n}{2}=x^2 \Rightarrow$ esto se cumple para $n=8$, pues $\dfrac{8^2+8}{2}=x^2 \Rightarrow x^2=36.$

Como dice que hay más de 36 cajas, hay que buscar otra solución, y ésta es:

$n=49$, pues $\dfrac{49^2+49}{2}=35^2=1225 \Rightarrow$ Luego $x^2=1225$ cajas tiene.

2. Observamos que:

$$\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n} \text{ con } n\geq 2.$$

Luego:

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$
$$...=...-...$$
$$\frac{1}{998\cdot 999}=\frac{1}{998}-\frac{1}{999}$$
$$\frac{1}{999\cdot 1000}=\frac{1}{999}-\frac{1}{1000}$$

Sumando:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{998\cdot 999}+\frac{1}{999\cdot 1000}=0{,}999$$

3. Sean A, B, C, las tres rebanadas. Con A1 indicamos que se tuesta la cara 1 y con A2 indicamos que se tuesta la cara 2.

1.º A_1B_1 tarda: $30s$: tostar cara A_1 y B_1
$5s$: colocar A_1
$5s$: colocar B_1
$5s$: sacar B_1

2.º A_2C_1 tarda: $3s$: dar la vuelta A_1
$5s$: meter C_1
$30s$: tostar cara A_2 y C_1
$3s$: dar la vuelta C_2

3.º B_2C_2 tarda: $5s$: sacar A_2
$5s$: meter B_2
$30s$: tostar cara B_2 y C_2
$5s$: sacar B_2
$5s$: sacar C_2

En total se necesitan: 136 s en tostar las 3 rebanadas.

PÁGINA 106

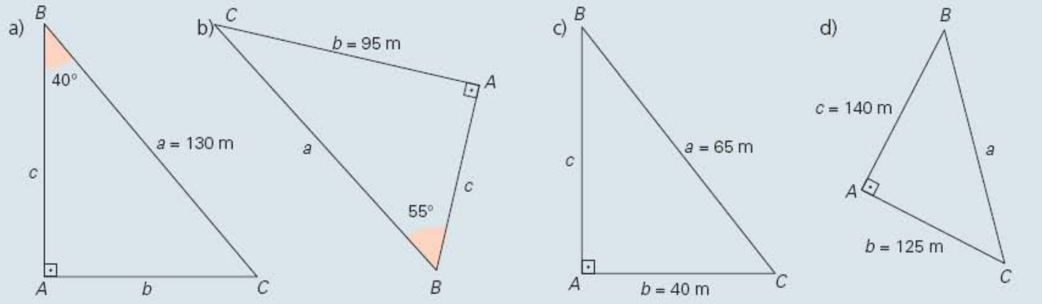
ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla referida a la equivalencia de ángulos en los distintos sistemas de medida:

90°		120°		225°		39° 42′		135° 22′ 42″	
	$\frac{\pi}{4}$ rad		$\frac{3\pi}{2}$ rad		$\frac{4\pi}{3}$ rad		1 rad		2,5 rad

2. Resuelve los siguientes triángulos rectángulos:



3. Desde un cierto punto del suelo se ve un árbol bajo un ángulo de 42°. ¿Bajo qué ángulo se verá colocándose a distancia doble? ¿y colocándose a distancia triple?

4. Calcula la altura de un poste, sabiendo que desde un cierto punto del suelo se ve este con un ángulo de 30° y, si nos acercamos 30 m, lo vemos con un ángulo de 45°.

5. Calcula los ángulos de un trapecio isósceles de altura 60 m cuyas bases miden 83 y 51 m.

6. Calcula el perímetro de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 30 cm de diámetro.

7. Si las puntas de un compás distan 8 cm y cada rama mide 15 cm, ¿qué ángulo forman?

8. Sabiendo que $\cos \alpha = -\frac{5}{12}$ y que el ángulo está en el segundo cuadrante, halla las demás razones trigonométricas.

9. Sabiendo que $\text{tg } x = \frac{4}{3}$ y que $180° < x < 270°$, calcula las demás razones trigonométricas.

↑ Los astrolabios se utilizan para determinar ángulos.

10. Calcula las restantes razones trigonométricas de un ángulo A cuya tangente es positiva y $\text{sen } A = -\frac{3}{5}$.

1. La tabla queda:

90º	45º	120º	270º	225º
$\frac{\pi}{2}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{2\pi}{3}$ rad	$\frac{3\pi}{2}$ rad	$\frac{5\pi}{4}$ rad
240º	39º 42'	57º 20'	135º 22' 42''	143º 19'
$\frac{4\pi}{3}$ rad	$0,22\,\pi$ rad	1rad	$0,75\,\pi$ rad	2,5 rad

2. La resolución de los triángulos queda:

I) $\hat{C} = 50º;\ b = 130 \cdot \text{sen } 40º = 83,56 \text{ m};$
$c = 130 \cdot \cos 40º = 99,59 \text{ m}$

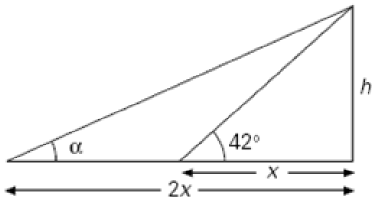
II) $\hat{C} = 35º;\ c = \dfrac{95}{\text{tg } 55º} = 66,52 \text{ m};$

$a = \dfrac{95}{\text{sen } 55º} = 115,97 \text{ m}$

III) $\cos \hat{C} = \dfrac{40}{65} \Rightarrow \hat{C} = 52º\, 1';\ \hat{B} = 37º\, 59';$
$c = \sqrt{65^2 - 40^2} = 51,23 \text{ m}$

IV) $a = \sqrt{140^2 + 125^2} = 187,68 \text{ m};$
$\text{tg } \hat{C} = \dfrac{140}{125} \Rightarrow \hat{C} = 48º\, 14'\, 23''$
$\hat{B} = 41º\, 45'\, 37''$

3. Sea la figura:



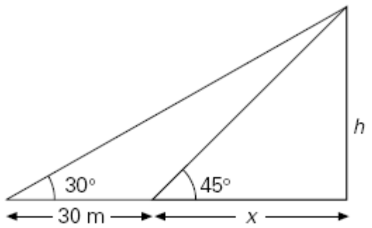
Queda:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg } 42^{\text{o}} = \dfrac{h}{x} \\ \text{tg } \alpha = \dfrac{h}{2x} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ tg } \alpha = \frac{1}{2} \text{tg } 42^{\text{o}} = 0{,}45; \quad \alpha = 24^{\text{o}}\, 14'\, 15''$$

Si nos colocamos a distancia triple se verificará:

$$\text{tg } \beta = \frac{h}{3x} = \frac{1}{3} \cdot \text{tg } 42^{\text{o}} = 0{,}3 \ \Rightarrow \ \beta = 16^{\text{o}}\, 42'\, 23''$$

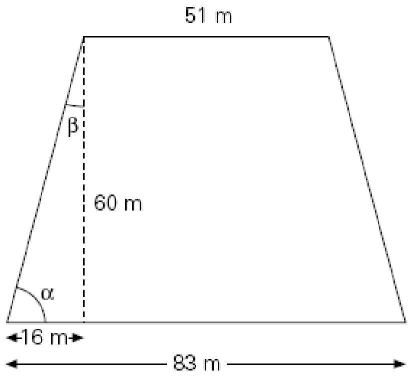
4. Sea la figura:



Queda:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg } 45^{\text{o}} = \dfrac{h}{x} \\ \text{tg } 30^{\text{o}} = \dfrac{h}{30 + x} \end{array}\right\} \quad h = \frac{30 \cdot \text{tg } 45^{\text{o}} \cdot \text{tg } 30^{\text{o}}}{\text{tg } 45^{\text{o}} - \text{tg } 30^{\text{o}}} \quad \Rightarrow \quad h = 40{,}98 \text{ m}$$

5. Sea la figura:

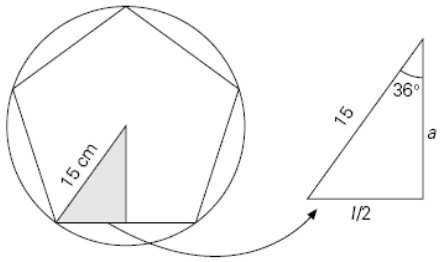


Queda:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{60}{16} \Rightarrow \alpha = 75^{\circ}\, 4'\, 7''$$
$$\beta = 90 - \alpha = 14^{\circ}\, 55'\, 53''$$

Los ángulos del trapecio miden $75^{\circ}\, 4'\, 7''$ los dos agudos y $104^{\circ}\, 55'\, 33''$ cada uno de los dos obtusos.

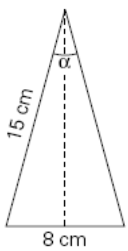
6. Sea la figura:



Llamamos *l* al lado del pentágono. De la figura obtenemos:

$$\operatorname{sen} 36^{\circ} = \frac{l/2}{15} \Rightarrow l = 30 \cdot \operatorname{sen} 36^{\circ} \Rightarrow l = 17,63 \text{ cm}$$
$$\text{Perímetro} = 5 \cdot 17,63 = 88,15 \text{ cm}$$

7. Sea la figura:



Llamamos α al ángulo que forman las ramas del triángulo rectángulo de la figura. Obtenemos:

$$\operatorname{sen} \alpha/2 = \frac{4}{15} \Rightarrow \alpha = 30^{\circ}\, 55'\, 55''$$

8. Quedan:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{119}}{12} = 0{,}91; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{-\sqrt{119}}{5} = -2{,}18$$

9. Quedan:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} \;\Rightarrow\; \cos x = \frac{-3}{5} \;\; y \;\; \operatorname{sen} x = \frac{-4}{5}$$

10. Quedan:

$$\text{Si } \operatorname{tg} A > 0 \;\Rightarrow\; 0 < A < \frac{\pi}{2} \;\text{ ó }\; \pi < A < \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{Como } \operatorname{sen} A = -\frac{3}{5} \;\Rightarrow\; \pi < A < \frac{3\pi}{2}$$

$$\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1 \;\Rightarrow\; \cos A = -\frac{4}{5} \;\text{ y }\; \operatorname{tg} A = \frac{3}{4}$$

■ 11. Simplifica las siguientes expresiones trigonométricas:

a) $\dfrac{1 + tg^2\alpha}{1 + cotg^2\alpha}$

b) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1 + sen\alpha}$

c) $\dfrac{\cos^2\alpha \cdot (1 + tg^2\alpha)}{cotg\alpha}$

d) $sen\alpha \cdot \cos\alpha \cdot (tg\alpha + cotg\alpha)$

e) $sen^3\alpha + sen\alpha \cdot \cos^2\alpha$

f) $\cos^3\alpha + sen^3\alpha + \cos^2\alpha \cdot sen\alpha + \cos\alpha \cdot sen^2\alpha$

g) $\dfrac{sen^2\alpha}{1 + \cos\alpha}$

h) $\dfrac{\sec\alpha}{1 + tg^2\alpha}$

i) $tg^2\alpha - tg^2\alpha \cdot sen^2\alpha$

j) $sen^4\alpha - \cos^4\alpha$

■ 12. Determina, sin hacer uso de la calculadora, las siguiente razones trigonométricas:

a) sen 120°

b) sen 1 215°

c) cos 210°

d) tg (–60°)

e) tg 300°

f) $\sec \dfrac{23\pi}{6}$

g) cotg 225°

h) $cosec \dfrac{29\pi}{4}$

■ 13. Sabiendo que sen $\alpha = 0{,}6$ y que α es un ángulo del primer cuadrante, calcula:

a) sen (180° – α)

b) tg (90° + α)

c) cos (180° + α)

d) sen (270° + α)

e) cos (90° – α)

f) cotg (360° – α)

■ 14. Demuestra, de forma razonada, si son o no ciertas las siguientes igualdades:

a) $\dfrac{tg\, a + tg\, b}{cotg\, a + cotg\, b} = tg\, a \cdot tg\, b$

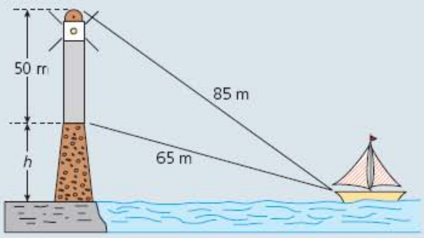
b) $sen^4 x - sen^2 x = \cos^4 x - \cos^2 x$

c) $\dfrac{1 - sen\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{1 + sen\alpha}$

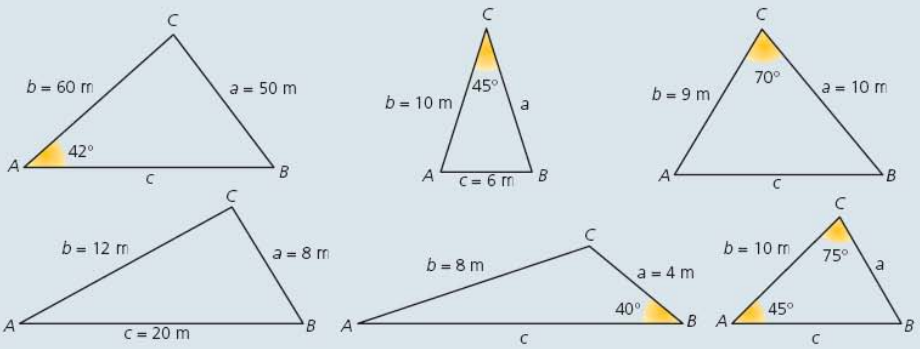
d) $tg^2 x - tg^2 x \cdot sen^2 x = sen^2 x$

■ 15. En la figura aparece dibujado un faro de 50 m de altura situado sobre un promontorio. Las respectivas distancias desde los extremos superior e inferior del faro a un barco son de 85 y 65 m.

Halla la altura del promontorio.



■ 16. Resuelve cada uno de los siguientes triángulos:



11. Las simplificaciones quedan:

a) $\dfrac{1+\text{tg}^2\alpha}{1+\text{cotg}^2\alpha}=\dfrac{1+\text{tg}^2\alpha}{1+\dfrac{1}{\text{tg}^2\alpha}}=\text{tg}^2\alpha$

b) $\dfrac{\cos^2\alpha}{1+\text{sen}\,\alpha}=\dfrac{1-\text{sen}^2\alpha}{1+\text{sen}\,\alpha}=1-\text{sen}\,\alpha$

c) $\dfrac{\cos^2\alpha\cdot(1+\text{tg}^2\alpha)}{\text{cotg}\,\alpha}=\dfrac{\cos^2\alpha\cdot\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha}}=\text{tg}\,\alpha$

d) $\text{sen}\,\alpha\cdot\cos\alpha\,(\text{tg}\,\alpha+\text{cotg}\,\alpha)=1$

e) $\text{sen}^3\alpha+\text{sen}\,\alpha\cdot\cos^2\alpha=\text{sen}\,\alpha$

f) $\cos^3\alpha+\text{sen}^3\alpha+\cos^2\alpha\,\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha=(\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha)(\cos^2\alpha+\text{sen}^2\alpha)=\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha$

g) $\dfrac{\text{sen}^2\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1-\cos^2\alpha}{1+\cos\alpha}=1-\cos\alpha$

h) $\dfrac{\sec\alpha}{1+\text{tg}^2\alpha}=\dfrac{\dfrac{1}{\cos\alpha}}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}=\cos\alpha$

i) $\text{tg}^2\alpha-\text{tg}^2\alpha\cdot\text{sen}^2\alpha=\text{tg}^2\alpha\cdot(1-\text{sen}^2\alpha)=\text{tg}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=\text{sen}^2\alpha$

j) $\text{sen}^4\alpha-\cos^4\alpha=(\text{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha)\cdot(\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha)=\text{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha$

12. Queda:

a) $\text{sen}\,120^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\text{sen}\,1215^{\circ}=\text{sen}135^{\circ}=\text{sen}\,45^{\circ}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos 210^{\circ}=-\cos 30^{\circ}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\text{tg}\,(-60^{\circ})=-\text{tg}\,60^{\circ}=-\sqrt{3}$

e) $\text{tg}\,300^{\circ}=-\text{tg}\,60^{\circ}=-\sqrt{3}$

f) $\sec\frac{23\pi}{6}=\sec 330^{\circ}=\frac{2}{\sqrt{3}}$

g) $\text{cotg}\,225^{\circ}=\text{cotg}\,45^{\circ}=1$

h) $\text{cosec}\frac{29\pi}{4}=\text{cosec}\,225^{\circ}=-\sqrt{2}$

13. Los cálculos quedan:

a) $\text{sen}\,(180^{\circ}-\alpha)=\text{sen}\,\alpha=0,6$

b) $\text{tg}\,(90^{\circ}+\alpha)=-\text{cotg}\,\alpha=-\frac{4}{3}$

c) $\cos(180^{\circ}+\alpha)=-\cos\alpha=-0,8$

d) $\text{sen}\,(270^{\circ}+\alpha)=-\cos\alpha=-0,8$

e) $\cos(90^{\circ}-\alpha)=\text{sen}\,\alpha=0,6$

f) $\text{cotg}\,(360^{\circ}-\alpha)=-\text{cotg}\,\alpha=-\frac{4}{3}$

14. Se comprueba del siguiente modo:

a) $$\frac{\text{tg}\, a + \text{tg}\, b}{cotg\ a + cotg\ b} = \frac{\text{tg}\, a + \text{tg}\, b}{\frac{1}{\text{tg}\, a} + \frac{1}{\text{tg}\, b}} = \frac{(\text{tg}\, a + \text{tg}\, b) \cdot \text{tg}\, a \cdot \text{tg}\, b}{\text{tg}\, a + \text{tg}\, b} = \text{tg}\, a \cdot \text{tg}\, b$$

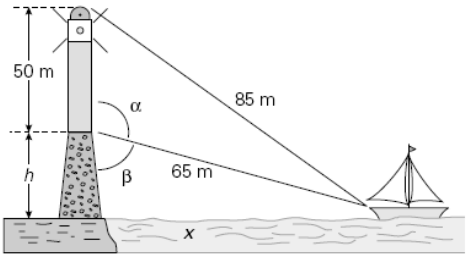
b) $$\text{sen}^4 x - \text{sen}^2 x = \text{sen}^2 x\,(\text{sen}^2 x - 1) = (1 - \cos^2 x)\,(-\cos^2 x) = \cos^4 x - \cos^2 x$$

c) $$\frac{1 - \text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{1 + \text{sen}\,\alpha} \iff 1 - \text{sen}^2\alpha = \cos^2\alpha$$

d) $$\text{tg}^2 x - \text{tg}^2 x \cdot \text{sen}^2 x = \text{tg}^2 x\,(1 - \text{sen}^2 x) = \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} \cdot \cos^2 x = \text{sen}^2 x$$

Todas las igualdades son verdaderas.

15. Sea la representación del problema:



Por Pitágoras obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} 85^2 = x^2 + (50 + h)^2 \\ 65^2 = h^2 + x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad h = 5\text{ m}$$

También podemos calcular el ángulo α por el teorema del coseno:

$$85^2 = 50^2 + 65^2 - 2 \cdot 65 \cdot 50 \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 94^\circ\, 24'\, 42''$$

Por tanto $\beta = 180^\circ - \alpha = 85^\circ\, 35'\, 18'' \quad \Rightarrow \quad \cos\beta = \dfrac{h}{65} \quad \Rightarrow \quad h = 65 \cdot \cos\beta = 5\text{ m}$

16. Los triángulos se resuelven del siguiente modo:

a) $50^2 = 60^2 + c^2 - 2 \cdot 60 \cdot c \cdot \cos 42º \Rightarrow c = 74{,}39\,\text{m}$ *ó* $c = 14{,}79\,\text{m}$

$$\bullet \text{Si } c = 74{,}39\,\text{m} \Rightarrow \cos C = \frac{50^2 + 60^2 - 74{,}39^2}{2 \cdot 50 \cdot 60} \Rightarrow C = 84º\,35'\,9'' \text{ y } B = 53º\,24'\,51''$$

$$\bullet \text{Si } c = 14{,}79\,\text{m} \Rightarrow \cos C = \frac{50^2 + 60^2 - 14{,}79^2}{2 \cdot 50 \cdot 60} \Rightarrow C = 11º\,25'\,5'' \text{ y } B = 126º\,34'\,55''$$

b) $6^2 = 10^2 + a^2 - 2 \cdot 10 \cdot a \cos 45º \Rightarrow a$ no es un número real. Este triángulo no tiene solución.

c) $c^2 = 9^2 + 10^2 - 2 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \cos 70º \Rightarrow c = 10{,}93\,\text{m}$
$10^2 = 9^2 + 10{,}93^2 - 2 \cdot 9 \cdot 10{,}93 \cdot \cos A \Rightarrow A = 59º\,17'\,35''$ y $B = 50º\,42'\,25''$

$$\text{d) } \cos A = \frac{12^2 + 20^2 - 8^2}{2 \cdot 12 \cdot 20} \Rightarrow A = 0º$$

Imposible. Además un lado es igual a la suma de los otros dos, por tanto no existe este triángulo.

e) $8^2 = 4^2 + c^2 - 2 \cdot 4 \cdot c \cdot \cos 40º \Rightarrow c = 10{,}64\,\text{m}$

$$\cos A = \frac{8^2 + 10{,}64^2 - 4^2}{2 \cdot 8 \cdot 10{,}64} \Rightarrow A = 18º\,44'\,44'' \text{ y } C = 121º\,15'\,16''$$

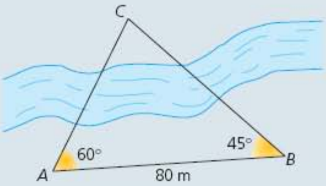
f) $B = 60º$.

Utilizando el teorema del seno obtenemos:

$$\frac{a}{\text{sen } 45º} = \frac{10}{\text{sen } 60º} \Rightarrow a = 8{,}16\,\text{m}$$
$$\frac{c}{\text{sen } 75º} = \frac{10}{\text{sen } 60º} \Rightarrow c = 11{,}15\,\text{m}$$

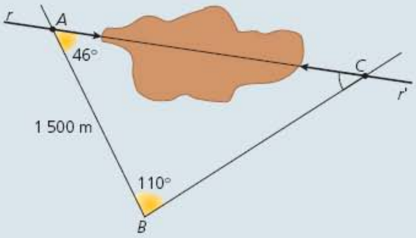
PÁGINA 108

ACTIVIDADES FINALES

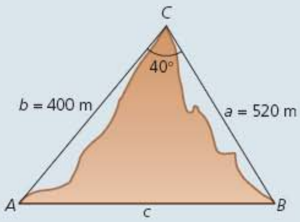


■ 17. Desde dos puntos *A* y *B* situados en la misma orilla de un río y distantes entre sí 80 m, se observa un punto *C*, situado en la orilla opuesta, bajo ángulos de 60° y 45°, respectivamente.
Calcula las distancias desde los puntos *A* y *B* hasta el punto *C*.

■ 18. La figura muestra la forma de construir un túnel que atraviesa una montaña, perforando simultáneamente por ambas caras de la montaña. Fijamos la dirección de perforación ofrecida por *r*, por lo que el problema consiste en encontrar la dirección de perforación dada por *r'*. En la práctica, se procede de la forma siguiente: fijamos un punto *A* en la recta *r* . Elegimos un ángulo *A*, por ejemplo 46°, y medimos una distancia *AB* de 1 500 m, por ejemplo. En *B* tomamos un ángulo, por ejemplo, de 110°. Con estos datos podemos determinar el ángulo *C* y la distancia *BC*. A partir de ambos datos queda determinada la dirección *r'* de perforación. Calcula estos datos.



■ 19. La figura muestra el corte transversal de una montaña en la que se quiere construir un túnel. La cima o punto *C*, visible desde *A* y *B*, se encuentra a 400 m de A y 520 m de *B*, y el ángulo *C* mide 40°.
Calcula la longitud del túnel *AB*.



■ 20. Halla el área de un decágono regular circunscrito a una circunferencia de 10 cm de radio.

■ 21. En un trapecio isósceles conocemos la diagonal, que mide 15 cm; el lado oblicuo, que mide 5 cm; y el ángulo que este forma con la base mayor, que es de 60°. Halla el área del trapecio.

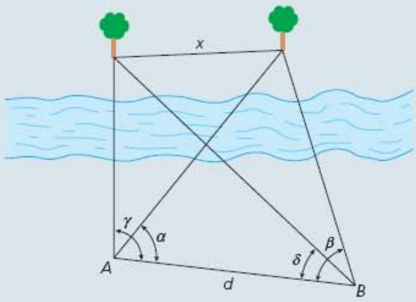
■ 22. Las diagonales de un paralelogramo miden 20 y 16 cm, respectivamente, y uno de los ángulos que forman al cortarse mide 120°. Halla el área y el perímetro del mismo.

■ 23. Dos barcos salen de un puerto, y desde un mismo punto, según dos rectas que forman entre sí un ángulo de 60°. Calcula la distancia que los separará al cabo de dos horas de navegación suponiendo que mantienen velocidades constantes de 50 y 65 km/h, respectivamente.

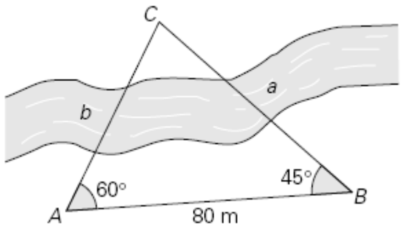
■ 24. Calcula los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita a un dodecágono de 6 dm de lado.

■ 25. El ángulo en el vértice de un cono de revolución mide 60° y la generatriz 12 m. Halla el volumen del cono.

■ 26. En la vida real se presentan muchas situaciones en las que se necesita conocer la distancia entre dos puntos inaccesibles. Este problema fue resuelto ya en el año 1615 por el sabio holandés Snelius. En la figura tenemos dos árboles a los que no podemos acceder, porque nos lo impide el río. Desde dos puntos *A* y *B* medimos los ángulos α, β, γ y δ, y la distancia d entre ambos puntos. Calcula la distancia *x* sabiendo que $\alpha = 50°$, $\beta = 75°$, $\gamma = 110°$, $\delta = 40°$ y $d = 120$ m.



17. Un esquema del problema sería:

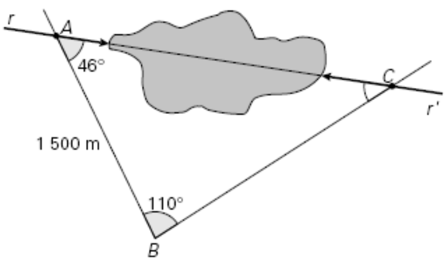


El ángulo $\hat{C} = 75º$. Utilizando el teorema del seno obtenemos:

$$\frac{a}{\text{sen } 60º} = \frac{80}{\text{sen } 75º} \Rightarrow a = 71,73 \text{ m}$$
$$\frac{b}{\text{sen } 45º} = \frac{80}{\text{sen } 75º} \Rightarrow b = 58,56 \text{ m}$$

Las distancias pedidas son 71,13 m y 58,56 m.

18. Un esquema del problema es el siguiente:

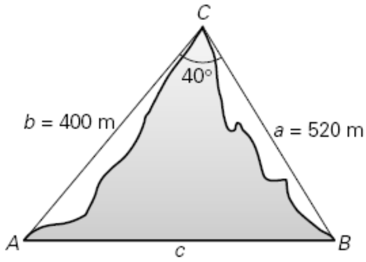


El ángulo $\hat{C} = 24º$.

Determinamos la distancia BC (lado *a*) mediante el teorema del seno:

$$\frac{1500}{\text{sen } 24º} = \frac{BC}{\text{sen } 46º} \Rightarrow BC = 2\,652,85 \text{ m}$$

19. La figura queda:

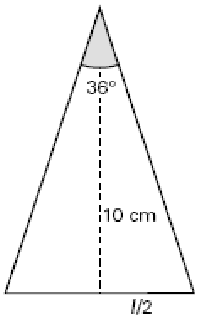


Mediante el teorema del coseno:

$$c^2 = 400^2 + 520^2 - 2 \cdot 400 \cdot 520 \cdot \cos 40º \Rightarrow c = 334,25 \text{ m} = AB$$

20. Como el decágono está circunscrito a la circunferencia, el radio de ésta es la apotema del polígono. El ángulo central del polígono es 36º.

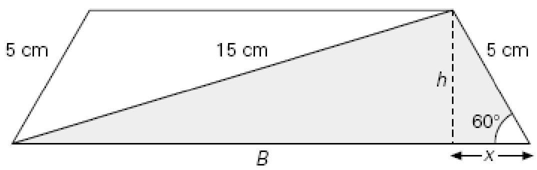
Obtenemos el lado del triángulo de la figura:



El cálculo queda:

$$\text{tg}\, 18º = \frac{l/2}{10} \Rightarrow l = 6,5 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad \text{Área} = \frac{10 \cdot 6,5 \cdot 10}{2} = 325 \text{ cm}^2$$

21. la figura es:



En el triángulo rayado aplicamos el teorema del coseno y obtenemos la base mayor B.

$$15^2 = B^2 + 5^2 - 2 \cdot B \cdot 5 \cdot \cos 60º \Rightarrow B = 16,86 \text{ cm}$$

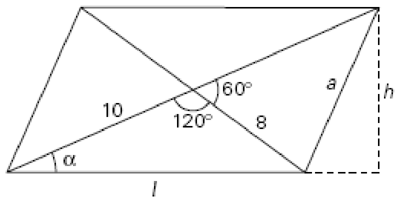
La altura *h* del triángulo mide: $h = 5 \cdot \text{sen}\, 60º = 4,33 \text{ cm}$

La base menor mide: $B - 2 \cdot x = B - 2 \cdot 5 \cdot \cos 60º = 11,86 \text{ cm}$

El área total queda:

$$\text{Área} = \frac{B + b}{2} h = \frac{16,86 + 11,86}{2} 4,33 = 62,18 \text{ cm}^2$$

22. La figura queda:



Los cálculos son:

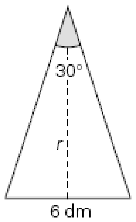
$$l^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos 120º \Rightarrow l = 15,62 \text{ cm}$$
$$a^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos 60º \Rightarrow a = 9,17 \text{ cm}$$
$$\text{Perímetro} = 2 \cdot 15,62 + 2 \cdot 9,17 = 49,58 \text{ cm}$$

$$a^2 = 20^2 + l^2 - 2 \cdot 20 \cdot l \cdot \cos \alpha \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9,17^2 = 20^2 + 15,62^2 - 2 \cdot 20 \cdot 15,62 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \alpha = 26º\, 20'\, 50''$$
$$\text{sen}\, \alpha = \frac{h}{20} \Rightarrow \text{sen}\, 26º\, 20'\, 50'' = \frac{h}{20} \Rightarrow h = 8,88 \text{ cm}$$
$$\text{Área} = \text{base} \cdot \text{altura} = \text{l} \cdot \text{h} = 15,62 \cdot 8,88 \Rightarrow \text{Área} = 138,71 \text{cm}^2$$

23. La distancia *d* que los separa viene dada por:

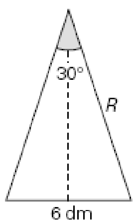
$$d^2 = 100^2 + 130^2 - 2 \cdot 100 \cdot 130 \cdot \cos 60º \Rightarrow d = 117,9\ k\text{m}$$

24. Las soluciones en cada uno de los casos:



El radio de la circunferencia inscrita es la apotema del dodecágono, por tanto:

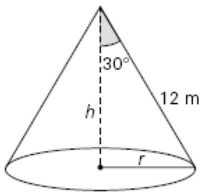
$$\text{tg}\, 15º = \frac{3}{r} \Rightarrow r = 11,20 \text{ dm}$$



El radio de la circunferencia circunscrita lo calculamos en el triángulo:

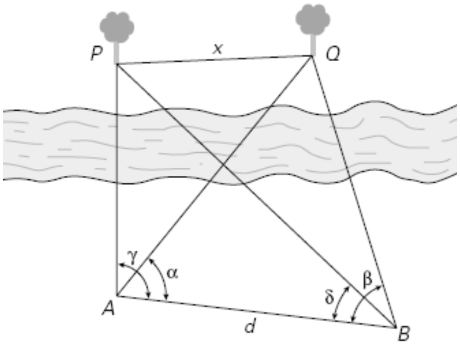
$$\text{sen}\, 15º = \frac{3}{R} \Rightarrow R = 11,59 \text{ dm}$$

25. La solución queda:



$$\left.\begin{array}{r} r = 12 \cdot \text{sen } 30^{\circ} = 6 \text{ m} \\ h = 12 \cdot \cos 30^{\circ} = 10{,}39 \text{ m} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{V} = \frac{\pi\, r^2\, h}{3} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 10{,}39}{3} = 391{,}7 \text{ m}^3$$

26. Según la figura:



Los cálculos quedan:

Sean P y Q los árboles.

En el triángulo ABP hallamos PB:

$$\frac{PB}{\text{sen } 110^{\circ}} = \frac{120}{\text{sen } 30^{\circ}} \Rightarrow PB = 225{,}53 \text{ m}$$

En el triángulo ABQ hallamos BQ:

$$\frac{BQ}{\text{sen } 50^{\circ}} = \frac{120}{\text{sen } 55^{\circ}} \Rightarrow BQ = 112{,}22 \text{ m}$$

En el triángulo PBQ hallamos x:

$$x^2 = PB^2 + BQ^2 - 2 \cdot PB \cdot BQ \cdot \cos 35^{\circ} \Rightarrow x = 148{,}30 \text{ m}$$

Unidad 5 – Trigonometría II

PÁGINA 111

cuestiones iniciales

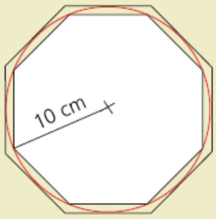
1. Razona la veracidad de las siguientes igualdades:

a) cos (60° + 45°) = cos 60° + cos 45°

b) sen (2 · 30°) = 2 · sen 30°

c) tg (45° – 30°) = tg 45° – tg 30°

2. En una circunferencia de 10 cm de radio inscribimos y circunscribimos sendos octógonos regulares. Calcula el área de la superficie comprendida entre ellos.



3. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) sen $(x + 25°) = 0,5$ b) sen x = cos x c) tg $(2x) = \sqrt{3}$

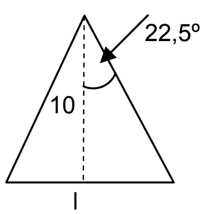
4. Deduce la expresión que permite calcular el área de un triángulo del que se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

SOLUCIONES

1. Las tres igualdades son falsas. Para probarlo basta con utilizar la calculadora.

2. Calculamos el área del octógono circunscrito y le restamos el área del octógono inscrito obteniendo la superficie pedida.

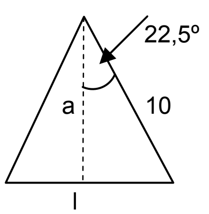
- El octógono circunscrito consta de ocho triángulos como el de la figura:



$$\text{tg}\,22,5º = \frac{l/2}{10} \Rightarrow l = 8,28\,\text{cm}$$

Área del octógono circunscrito $= 331,2\,\text{cm}^2$

- El octógono inscrito consta de ocho triángulos como el de la figura:



$$\text{sen } 22,5º = \frac{l/2}{10} \Rightarrow l = 7,65\,\text{cm}$$

$$\cos\,22,5º = \frac{a}{10} \Rightarrow a = 9,24\,\text{cm}$$

Área del octógono inscrito $= 282,744\,\text{cm}^2$

El área comprendida entre ambos será: $331,2 - 282,744 = 48,456\,\text{cm}^2$

3. Las soluciones quedan:

a) $\operatorname{sen}(x+25^\circ)=\dfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=5^\circ+360^\circ K \\ x=125^\circ+360^\circ K \end{cases}$

b) $\operatorname{sen} x=\cos x \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=45^\circ+360^\circ K \\ x=225^\circ+360^\circ K \end{cases}$

c) $\operatorname{tg}(2x)=\sqrt{3} \;\Rightarrow\; \{x=30^\circ+90^\circ K$

4. Supongamos conocidos los lados *b* y *c* y el ángulo A comprendido:

Calculamos la altura: $h=b\cdot\operatorname{sen}A$

El área será:

$$\text{Área}=\frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2}=\frac{c\cdot b\cdot\operatorname{sen}A}{2} \;\Rightarrow\; \text{Área}=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\operatorname{sen}A$$

PÁGINA 123

ACTIVIDADES

- Practica la fase de revisar el proceso y sacar consecuencias de él en los siguientes problemas:

1. **Vacas lecheras.** Cuatro vacas blancas y tres vacas negras dan tanta leche en cinco días como tres vacas blancas y cinco negras en cuatro días. ¿Qué clase de vaca es la más lechera, la blanca o la negra?
2. **Igualdad.** En un almacén de fruta almacenamos naranjas en pilas con forma de pirámide de base cuadrada. Cada lado de la base lo forman 15 naranjas, ¿cuál es el máximo número de naranjas que podemos apilar? Intenta generalizar este problema.

SOLUCIONES

1. Llamemos B a las vacas blancas y N a las vacas negras:

$$5\cdot(4B+3N)=4\cdot(3B+5N) \Rightarrow 20B+15N=12B+20N \Rightarrow 8B=5N$$

Dan más leche las vacas negras.

2. El número de naranjas en la pirámide es:

$1^2+2^2+3^2+4^2+...+14^2+15^2=1\,240$ naranjas.

PÁGINA 126

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Sabiendo que $\text{sen } a = -\frac{12}{13}$ y $\text{tg } b = \frac{24}{7}$, y que $270° < a < 360°$ y $180° < b < 270°$, calcula:

   a) $\text{sen } (a + b)$ b) $\cos (a + b)$ c) $\text{tg } (a + b)$.

2. Partiendo de las razones trigonométricas de 30°, 45° y 60°, calcula:

   a) sen 90° b) cos 90° c) sen 120° d) cos 120° e) tg 120° f) sen 105° g) cos 105° h) tg 105°

3. Sabiendo que el seno de un ángulo es $\text{sen } a = \frac{3}{5}$ y $\frac{\pi}{2} < a < \pi$, halla las razones trigonométricas de $a - 30°$.

4. Justifica las siguientes igualdades:

   a) $\text{sen } (180° + a) = -\text{sen } a$

   b) $\text{tg} \left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\text{cotg } a$

   c) $\text{sen } (270° + a) = -\cos a$

   d) $\text{tg } (\pi + 2a) = \text{tg } 2a$

   e) $\cos (90° + a) = -\text{sen } a$

   f) $\text{tg } (270° + a) = -\text{cotg } a$

5. Calcula el valor de la siguiente expresión:

$$\text{sen } a \cdot \text{sen } (b - c) - \text{sen } b \cdot \text{sen } (a - c) + \text{sen } c \cdot \text{sen } (a - b)$$

6. Demuestra que $\cos (a + b) \cdot \cos (a - b) = \cos^2 a - \text{sen}^2 b = \cos^2 b - \text{sen}^2 a$.

7. Demuestra que $\text{sen } (a + b) \cdot \text{sen } (a - b) = \text{sen}^2 a - \text{sen}^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a$.

8. Halla las expresiones que se piden usando los teoremas de adición:

   a) $\cos 3a$ en función de $\cos a$

   b) $\text{sen } 4a$ en función de $\text{sen } a$

9. Sabiendo que $\text{tg } a = \sqrt{24}$, y que a es un ángulo cuyo seno y coseno son negativos, calcula las razones trigonométricas del ángulo $2a$.

10. Sabiendo que $\text{tg } 2a = \sqrt{3}$, halla $\text{tg } a$

11. Simplifica las expresiones:

    a) $\dfrac{\text{sen } 2a}{1 + \cos 2a}$ b) $\dfrac{\text{sen } 2a}{\text{sen } a} : \dfrac{1 + \cos 2a}{\cos a}$

12. Demuestra que $\text{tg } x = \text{cotg } x - 2 \text{ cotg } 2x$.

13. Comprueba que $\dfrac{\text{tg } a}{\text{tg } 2a - \text{tg } a} = \cos 2a$.

14. Calcula las razones trigonométricas de 22° 30′ y las de 75°. En ambos casos, utiliza las expresiones del ángulo mitad.

1. Quedan:

$$\text{sen}\, a = -\frac{12}{13} \Rightarrow \cos a = \frac{5}{13} \text{ y } \text{tg}\, a = -\frac{12}{5}$$
$$\text{tg}\, b = \frac{24}{7} \Rightarrow \cos b = -\frac{7}{25} \text{ y } \text{sen}\, b = -\frac{24}{25}$$
$$\text{sen}\,(a+b) = -\frac{36}{325};\ \cos(a+b) = -\frac{323}{325};\ \text{tg}\,(a+b) = \frac{36}{323}$$

2. Los cálculos son los siguientes:

$$\text{sen}\, 90° = \text{sen}\,(30° + 60°) = 1$$

$$\cos 90° = \cos(30° + 60°) = 0$$

$$\text{sen}\, 120° = \text{sen}\,(60° + 60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120° = \cos(60° + 60°) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{tg}\, 120° = \text{tg}\,(60° + 60°) = -\sqrt{3}$$

$$\text{sen}\, 105° = \text{sen}\,(45° + 60°) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\cos 105° = \cos(45° + 60°) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$\text{tg}\, 105° = \text{tg}\,(45° + 60°) = -2 - \sqrt{3}$$

3. Quedan:

$$\text{sen}\, a = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos a = -\frac{4}{5}$$
$$\text{sen}\,(a - 30°) = \text{sen}\, a \cdot \cos 30° - \text{sen}\, 30° \cdot \cos a = \frac{3\sqrt{3} + 4}{10}$$
$$\cos(a - 30°) = \cos a \cdot \cos 30° + \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, 30° = \frac{3 - 4\sqrt{3}}{10}$$
$$\text{tg}\,(a - 30°) = \frac{\text{sen}\,(a - 30°)}{\cos(a - 30°)} = -\frac{48 + 25\sqrt{3}}{39}$$

4. Para ello es suficiente con utilizar los teoremas de adición para el seno, coseno y tangente estudiados en esta unidad didáctica.

5. Queda de la forma:

$$\begin{aligned}&\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen}(b-c)-\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen}(a-c)+\operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen}(a-b)=\\&=\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \cos c-\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} c \cdot \cos b-\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} a \cdot \cos c+\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c \cdot \cos a+\\&+\operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen} a \cdot \cos b-\operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen} b \cdot \cos a=0\end{aligned}$$

6. Queda de la forma:

$$\begin{aligned}&\cos(a+b)\cdot\cos(a-b)=(\cos a\cdot\cos b-\operatorname{sen} a\cdot\operatorname{sen} b)\cdot(\cos a\cdot\cos b+\operatorname{sen} a\cdot\operatorname{sen} b)=\\&=\cos^2 a\cdot\cos^2 b-\operatorname{sen}^2 a\cdot\operatorname{sen}^2 b\end{aligned}$$

A partir de esta expresión obtenemos las dos igualdades:

- $\cos^2 a\cdot\cos^2 b-\operatorname{sen}^2 a\cdot\operatorname{sen}^2 b=\cos^2 a\cdot(1-\operatorname{sen}^2 b)-(1-\cos^2 a)\cdot\operatorname{sen}^2 b=\cos^2 a-\operatorname{sen}^2 b$
- $\cos^2 a\cdot\cos^2 b-\operatorname{sen}^2 a\cdot\operatorname{sen}^2 b=\cos^2 b\cdot(1-\operatorname{sen}^2 a)-(1-\cos^2 b)\cdot\operatorname{sen}^2 a=\cos^2 b-\operatorname{sen}^2 a$

7. Queda de la forma:

$$\begin{aligned}&\operatorname{sen}(a+b)\cdot\operatorname{sen}(a-b)=(\operatorname{sen} a\cdot\cos b+\operatorname{sen} b\cdot\cos a)\cdot(\operatorname{sen} a\cdot\cos b-\operatorname{sen} b\cdot\cos a)=\\&=\operatorname{sen}^2 a\cdot\cos^2 b-\operatorname{sen}^2 b\cdot\cos^2 a\end{aligned}$$

A partir de esta expresión obtenemos las dos igualdades:

- $\operatorname{sen}^2 a\cdot\cos^2 b-\operatorname{sen}^2 b\cdot\cos^2 a=\operatorname{sen}^2 a\cdot(1-\operatorname{sen}^2 b)-(1-\operatorname{sen}^2 a)\cdot\operatorname{sen}^2 b=\operatorname{sen}^2 a-\operatorname{sen}^2 b$
- $\operatorname{sen}^2 a\cdot\cos^2 b-\operatorname{sen}^2 b\cdot\cos^2 a=\cos^2 b\cdot(1-\cos^2 a)-(1-\cos^2 b)\cdot\cos^2 a=\cos^2 b-\cos^2 a$

8. Queda:

a) $\cos 3a=\cos(2a+a)=4\cos^3 a-3\cos a$

b) $\operatorname{sen} 4a=\operatorname{sen} 2\cdot 2a=(4\operatorname{sen} a-8\operatorname{sen}^3 a)\cdot\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 a}$

También se puede resolver esta actividad mediante la fórmula de De Moivre.

9. Las razones trigonométricas quedan:

$$\operatorname{tg} a=\sqrt{24}\ \ y\ \left(\pi<a<\frac{3\pi}{2}\right)\ \Rightarrow\ \operatorname{sen} a=-\frac{\sqrt{24}}{5};\ \cos a=-\frac{1}{5}$$

$$\operatorname{sen} 2a=2\operatorname{sen} a\cdot\cos a=\frac{2\sqrt{24}}{25};\quad \cos 2a=\cos^2 a-\operatorname{sen}^2 a=-\frac{23}{25};\quad \operatorname{tg} 2a=\frac{2\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^2 a}=-\frac{2\sqrt{24}}{23}$$

10. La tangente queda:

$$\operatorname{tg} 2a = \sqrt{3} \;\Rightarrow\; \frac{2\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^2 a} = \sqrt{3} \;\Rightarrow\; \sqrt{3}\operatorname{tg}^2 a + 2\operatorname{tg} a - \sqrt{3} = 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{tg} a = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ o bien } \operatorname{tg} a = -\sqrt{3}$$

11. Las simplificaciones quedan:

a) $\dfrac{\operatorname{sen} 2a}{1+\cos 2a} = \dfrac{2\operatorname{sen} a \cdot \cos a}{2\cos^2 a} = tg\ a$

b) $\dfrac{\operatorname{sen} 2a}{\operatorname{sen} a} : \dfrac{1+\cos 2a}{\cos a} = \dfrac{\operatorname{sen} 2a \cdot \cos a}{\operatorname{sen} a \cdot (1+\cos 2a)} = 1$

12. Partimos del segundo miembro para llegar al primero:

$$\operatorname{cotg} x - 2\operatorname{cotg} 2x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{2}{\operatorname{tg} 2x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{2(1-\operatorname{tg}^2 x)}{2\operatorname{tg} x} = \frac{1-1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} x$$

13. Partiendo del primer miembro obtenemos:

$$\frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} 2a - \operatorname{tg} a} = \frac{\operatorname{tg} a}{\dfrac{2\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^2 a} - \operatorname{tg} a} = \frac{(1-\operatorname{tg}^2 a)\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} a\,(1+\operatorname{tg}^2 a)} = \cos 2a$$

14. Quedan:

$$\operatorname{sen} 22^\circ\, 30' = \operatorname{sen}\left(\frac{45^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos 22^\circ\, 30' = \cos\left(\frac{45^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos 45^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 22^\circ\, 30' = \operatorname{tg}\left(\frac{45^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{1+\cos 45^\circ}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{sen} 75^\circ = \operatorname{sen}\left(\frac{150^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos 150^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos 75^\circ = \cos\left(\frac{150^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos 150^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{tg}\left(\frac{150^\circ}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos 150^\circ}{1+\cos 150^\circ}} = 2+\sqrt{3}$$

PÁGINA 127

■ 15. Sabiendo que cotg $a = -2$ y a es el mayor ángulo negativo que verifica esta igualdad, calcula las razones trigonométricas del ángulo mitad.

■ 16. Expresa, en función de una razón trigonométrica del ángulo mitad:

a) $\dfrac{1 - \cos a}{\text{sen } a}$ b) $\dfrac{\text{sen } 2a}{1 + \cos 2a} \cdot \dfrac{\cos a}{1 + \cos a}$

■ 17. Sabiendo que $\cos \dfrac{x}{2} = -\dfrac{2}{3}$ y que x es un ángulo del tercer cuadrante, halla sen x, cos x.

■ 18. Simplifica las expresiones siguientes:

a) $\dfrac{\text{sen } 40° + \text{sen } 20°}{\cos 40° + \cos 20°}$ b) $\dfrac{\text{sen } 195° - \text{sen } 75°}{\text{sen } 195° + \text{sen } 75°}$ c) $\dfrac{\cos 60° - \cos 40°}{\text{sen } 60° - \text{sen } 40°}$

■ 19. Demuestra que $\dfrac{\cos (x - y) - \cos (x + y)}{\text{sen } (x + y) + \text{sen } (x - y)} = \text{tg } y$.

■ 20. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\text{sen} \left(\dfrac{\pi}{4} + 2x\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\text{tg} \left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ e) $\text{sen } 3x - \text{sen } 30° = 0$

b) $\cos \left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{2}$ d) $\cos \left(\dfrac{1}{2} (x + \pi)\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ f) $\text{cotg} \left(\dfrac{x + 45°}{2}\right) = \sqrt{3}$

■ 21. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\text{sen } 2x = 2 \cos x$

b) $\text{sen } x + \text{sen } 3x = \cos x$

c) $\text{sen } 4x = \text{sen } 2x$

d) $\cos 2x - \cos 6x = \text{sen } 5x + \text{sen } 3x$

e) $\text{sen } 2x \cdot \cos x = 6 \text{ sen}^3 x$

f) $2 \text{ sen } x = \text{tg } x$

■ 22. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\text{sen } x = 1 + 2 \cos^2 x$

b) $\sec x + \text{tg } x = 0$

c) $6 \cos^2 \dfrac{x}{2} + \cos x = 1$

d) $6 \cos^2 x + 6 \text{ sen}^2 x = 5 + \text{sen } x$

e) $\text{tg } 2x \cdot \text{tg } x = 1$

f) $\cos^2 x = 3 \text{ sen}^2 x$

■ 23. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\text{sen } x + \sqrt{3} \cos x = 2$ b) $\text{sen } x + \cos x = \sqrt{2}$ c) $\text{sen } x + \cos x = \dfrac{5}{2}$

■ 24. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l} x + \text{sen}^2 y = 2 \\ x + \cos^2 y = 1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} \text{sen } x \cdot \cos y = \dfrac{3}{4} \\ \cos x \cdot \text{sen } y = \dfrac{1}{4} \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l} \cos x + \cos y = 1 \\ \cos (x + y) = 1 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{l} x + y = \dfrac{\pi}{2} \\ \text{sen } x + \text{sen } y = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{array}\right\}$

15. Quedaría:

$$\text{cotg}\, a = -2 \;\Rightarrow\; \left(\frac{3\pi}{2} < a < 2\pi\right) \Rightarrow \left(\frac{\pi}{2} < \frac{a}{2} < \pi\right) \quad \Rightarrow \quad \text{tg}\, a = -\frac{1}{2};\; \cos a = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{sen}\,\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos a}{2}} = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2\sqrt{5}}};\quad \cos\frac{a}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2\sqrt{5}}};\quad \text{tg}\,\frac{a}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}} = 2-\sqrt{5}$$

16. Queda expresado del siguiente modo:

a) $$\frac{1-\cos a}{\text{sen}\, a} = \frac{1-\cos^2\frac{a}{2}+\text{sen}^2\frac{a}{2}}{2\,\text{sen}\,\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}} = \frac{2\,\text{sen}^2\frac{a}{2}}{2\,\text{sen}\,\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}} = \text{tg}\,\frac{a}{2}$$

b) $$\frac{\text{sen}\,2a}{1+\cos 2a}\cdot\frac{\cos a}{1+\cos a} = \frac{2\,\text{sen}\,a\cdot\cos a}{1+\cos^2 a-\text{sen}^2 a}\cdot\frac{\cos a}{1+\cos^2\frac{a}{2}-\text{sen}^2\frac{a}{2}} = \frac{2\cdot 2\,\text{sen}\,\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}\cdot\cos^2 a}{\left(2\cos^2 a\right)\cdot(2\cos^2\frac{a}{2})} = \text{tg}\,\frac{a}{2}$$

17. Ambas razones trigonométricas quedan:

$$\cos\frac{x}{2} = -\frac{2}{3} \;\Rightarrow\; \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = -\frac{2}{3} \;\Rightarrow\; \cos x = -\frac{1}{9};\; \text{sen}\, x = \frac{-4\sqrt{5}}{9}$$

18. Las simplificaciones quedan:

a) $$\frac{\text{sen}\,40^\circ+\text{sen}\,20^\circ}{\cos 40^\circ+\cos 20^\circ} = \frac{2\,\text{sen}\,30^\circ\cdot\cos 10^\circ}{2\cos 30^\circ\cdot\cos 10^\circ} = \text{tg}\,30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

b) $$\frac{\text{sen}\,195^\circ-\text{sen}\,75^\circ}{\text{sen}\,195^\circ+\text{sen}\,75^\circ} = \frac{2\cos 135^\circ\cdot\text{sen}\,60^\circ}{2\,\text{sen}\,135^\circ\cdot\cos 60^\circ} = \text{cotg}\,135^\circ\cdot\text{tg}\,60^\circ = -\sqrt{3}$$

c) $$\frac{\cos 60^\circ-\cos 40^\circ}{\text{sen}\,60^\circ-\text{sen}\,40^\circ} = \frac{-2\,\text{sen}\,50^\circ\cdot\text{sen}\,10^\circ}{2\cos 50^\circ\cdot\text{sen}\,10^\circ} = -\text{tg}\,50^\circ = -1{,}19$$

19. Se demuestra del siguiente modo:

$$\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{\text{sen}(x+y)+\text{sen}(x-y)} = \frac{-2\,\text{sen}\,x\cdot\text{sen}\,(-y)}{2\,\text{sen}\,x\cdot\cos y} = \text{tg}\, y$$

20. La solución queda:

a) $x=\frac{\pi}{24}+K\pi$ ó $x=\frac{5\pi}{24}+K\pi$

b) $x=\frac{11\pi}{36}+\frac{2K\pi}{3}$ ó $x=\frac{19\pi}{36}+\frac{2K\pi}{3}$

c) $x=\frac{\pi}{6}+\frac{K\pi}{2}$

d) $x=-\frac{2\pi}{3}+4K\pi$ ó $x=\frac{8\pi}{3}+4K\pi$

e) $x=10^\circ+120^\circ K$ ó $x=50^\circ+120^\circ K$

f) $x=15^\circ+360^\circ K$

21. Las soluciones quedan:

a) $\operatorname{sen} 2x=2\cos x \Rightarrow 2\operatorname{sen} x\cdot\cos x=2\cos x \Rightarrow 2\operatorname{sen} x\cdot\cos x-2\cos x=0$

$\Rightarrow \cos x=0;\ \operatorname{sen} x=1 \Rightarrow \boxed{x=90^\circ+180^\circ K}$

b) $\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 3x=\cos x \Rightarrow 2\operatorname{sen} 2x\cdot\cos x=\cos x \Rightarrow 2\operatorname{sen} 2x\cdot\cos x-\cos x=0$

$\Rightarrow \cos x=0;\ \operatorname{sen} 2x=\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x=90^\circ+180^\circ K}\boxed{x=15^\circ+180^\circ K}\boxed{x=75^\circ+180^\circ K}$

c) $\operatorname{sen} 4x=\operatorname{sen} 2x \Rightarrow 2\operatorname{sen} 2x\cdot\cos 2x=\operatorname{sen} 2x \Rightarrow 2\operatorname{sen} 2x\cdot\cos 2x-\operatorname{sen} 2x=0$

$\Rightarrow \operatorname{sen} 2x\cdot(2\cos 2x-1)=0 \Rightarrow \cos 2x=\frac{1}{2};\ \operatorname{sen} 2x=0 \Rightarrow \boxed{x=0^\circ+90^\circ K}\boxed{x=30^\circ+180^\circ K}\ \boxed{x=150^\circ+180^\circ K}$

d) $\cos 2x-\cos 6x=\operatorname{sen} 5x+\operatorname{sen} 3x \Rightarrow -2\operatorname{sen} 4x\cdot\operatorname{sen}(-2x)=2\operatorname{sen} 4x\cdot\cos x$

$\Rightarrow 2\operatorname{sen} 4x\cdot(\operatorname{sen} 2x-\cos x)=0 \Rightarrow \operatorname{sen} 4x=0 \Rightarrow \boxed{x=45^\circ K} \Rightarrow \operatorname{sen}(2x)-\cos x=0$

$\Rightarrow \cos x(2\operatorname{sen} x-1)=0 \Rightarrow \cos x=0;\ \operatorname{sen} x=\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x=90^\circ+180^\circ K}\boxed{x=30^\circ+360^\circ K}\ \boxed{x=150^\circ+360^\circ K}$

e) $\operatorname{sen} 2x \cdot \cos x = 6\operatorname{sen}^3 x \;\Rightarrow\; 2\operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x - 6\operatorname{sen}^3 x = 0 \;\Rightarrow\; 2\operatorname{sen} x \cdot (\cos^2 x - 3\operatorname{sen}^2 x) = 0$

$\Rightarrow\; \operatorname{sen} x = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{x = 0^\circ + 180^\circ K} \;\Rightarrow\; \cos^2 x - 3\operatorname{sen}^2 x = 0 \;\Rightarrow\; \cos^2 x - 3(1 - \cos^2 x) = 0$

$\Rightarrow\; \cos x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \;\Rightarrow\; \boxed{x = 30^\circ + 180^\circ K} \;\; \boxed{x = 150^\circ + 180^\circ K}$

f) $2\operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x \;\Rightarrow\; \operatorname{sen} x(2\cos x - 1) = 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{sen} x = 0\,;\; \cos x = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow\; \boxed{x = 0^\circ + 180^\circ K} \;\; \boxed{x = 60^\circ + 360^\circ K} \;\; \boxed{x = 300^\circ + 360^\circ K}$

22. La solución de cada ecuación queda:

a) $\operatorname{sen} x = 1 + 2\cos^2 x \;\Rightarrow\; \operatorname{sen} x = 1 + 2 - 2\operatorname{sen}^2 x \;\Rightarrow\; 2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 3 = 0$

$\Rightarrow\; \operatorname{sen} x = 1 \;\Rightarrow\; \boxed{x = 90^\circ + 360^\circ K}$

b) $\sec x + \operatorname{tg} x = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 0$

$\Rightarrow\; \operatorname{sen} x = -1 \;\Rightarrow\; \boxed{x = 270^\circ + 360^\circ K}$

c) $6\cos^2\dfrac{x}{2} + \cos x = 1 \;\Rightarrow\; 6\left(\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}\right)^2 + \cos x = 1 \;\Rightarrow\; 3 + 3\cos x + \cos x = 1$

$\Rightarrow\; \cos x = -\dfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; \boxed{x = 120^\circ + 360^\circ K}\boxed{x = 240^\circ + 360^\circ K}$

d) $6\cos^2 x + 6\operatorname{sen}^2 x = 5 + \operatorname{sen} x \;\Rightarrow\; 6 = 5 + \operatorname{sen} x$

$\Rightarrow\; \operatorname{sen} x = 1 \;\Rightarrow\; \boxed{x = 90^\circ + 360^\circ K}$

e) $\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} x = 1 \;\Rightarrow\; \dfrac{2\operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 1$

$\Rightarrow\; \operatorname{tg} x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \;\Rightarrow\; \begin{array}{l}\boxed{x = 30^\circ + 180^\circ K} \\ \boxed{x = 150^\circ + 180^\circ K}\end{array}$

f) $\cos^2 x = 3\operatorname{sen}^2 x \;\Rightarrow\; 1 = 4\operatorname{sen}^2 x$

$\Rightarrow\; \operatorname{sen} x = \pm\dfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; \begin{array}{l}\boxed{x = 30^\circ + 180^\circ K} \\ \boxed{x = 150^\circ + 180^\circ K}\end{array}$

23. La solución queda:

a) $\operatorname{sen} x+\sqrt{3}\cos x=2 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\operatorname{sen} x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=1$

$\Rightarrow\; \operatorname{sen}(x+60^\circ)=1 \;\Rightarrow\; \boxed{x=30^\circ+360^\circ K}$

b) $\operatorname{sen} x+\cos x=\sqrt{2} \;\Rightarrow\; \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen} x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=1$

$\Rightarrow\; \operatorname{sen}(x+45^\circ)=1 \;\Rightarrow\; \boxed{x=45^\circ+360^\circ K}$

c) $\operatorname{sen} x+\cos x=\frac{5}{2} \;\Rightarrow\;$ Imposible $\operatorname{sen} x+\cos x \not> 2$

24. Las soluciones de los sistemas quedan:

a) $\left.\begin{array}{l} x+\operatorname{sen}^2 y=2 \\ x+\cos^2 y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Sumando ambas ecuaciones: $\Rightarrow 2x+1=3 \;\Rightarrow\; \boxed{x=1}$

$\operatorname{sen}^2 y=1 \;\Rightarrow\; \operatorname{sen} y=\pm 1 \;\Rightarrow\; \boxed{y=\frac{\pi}{2}}\ \boxed{y=\frac{3\pi}{2}}$

b) $\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} x\cdot\cos y=\frac{3}{4} \\ \cos x\cdot\operatorname{sen} y=\frac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow$ Sumando ambas ecuaciones obtenemos: $\Rightarrow \operatorname{sen}(x+y)=1 \;\Rightarrow\; x+y=90^\circ \;\Rightarrow\; x=90^\circ-y$

Sustituyendo en la 1ª ecuación: $\operatorname{sen}(90^\circ-y)\cdot\cos y=\frac{3}{4} \;\Rightarrow\; \cos^2 y=\frac{3}{4} \;\Rightarrow\; \cos y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow\; \boxed{y=30^\circ;\ x=60^\circ}\ \boxed{y=150^\circ;\ x=300^\circ}\ \boxed{y=210^\circ;\ x=240^\circ}\ \boxed{y=330^\circ;\ x=120^\circ}$

c) $\left.\begin{array}{l} \cos x+\cos y=1 \\ \cos(x+y)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ De la 2ª ecuación obtenemos: $\Rightarrow x+y=0^\circ \;\Rightarrow\; x=-y$

Sustituyendo en la 1ª ecuación: $\cos(-y)+\cos y=1 \;\Rightarrow\; 2\cos y=1$

$\Rightarrow\; \cos y=\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \boxed{\begin{array}{l} y=60^\circ \\ x=300^\circ \end{array}}\ \boxed{\begin{array}{l} y=300^\circ \\ x=60^\circ \end{array}}$

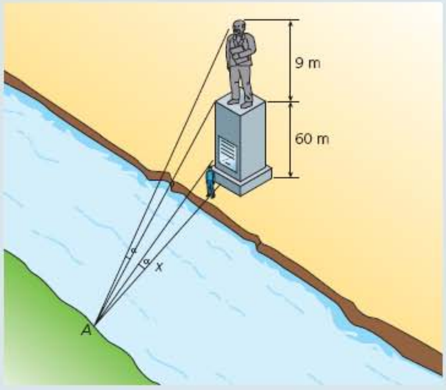
d) $\left.\begin{array}{l} x+y=90^\circ \\ \operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y=\frac{\sqrt{6}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$ $y=90^\circ-x$ Sustituyendo en la 2ª ecuación

$\operatorname{sen} x+\operatorname{sen}(90^\circ-x)=\frac{\sqrt{6}}{2} \;\Rightarrow\; 2\cdot\operatorname{sen} 45^\circ\cdot\cos(90^\circ-x)=\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\Rightarrow\; \cos(45^\circ-x)=\frac{\sqrt{3}}{2} \;\Rightarrow\; x-45^\circ=30^\circ$ ó $x-45^\circ=330^\circ \;\Rightarrow\; \boxed{\begin{array}{l} y=75^\circ \\ x=15^\circ \end{array}}$ ó $\boxed{\begin{array}{l} y=15^\circ \\ x=75^\circ \end{array}}$

ACTIVIDADES FINALES

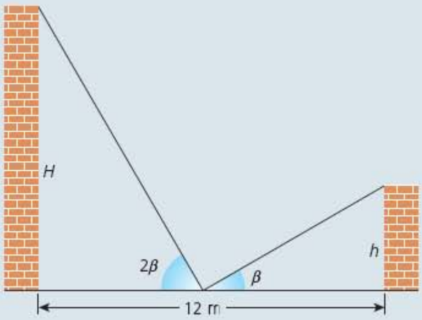
■ 25. En una de las orillas de un río hay un pedestal de 60 m de altura sobre el que se apoya una estatua de 9 m de alzada. Halla la anchura x del río, sabiendo que desde un punto A, situado en la orilla opuesta al pedestal, se ve la estatua bajo el mismo ángulo que se vería a un hombre de 1,80 m situado delante del pedestal.



■ 26. Sabiendo que $\text{tg}\ \frac{A}{2} = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ y que A es un ángulo cuyo seno es menor que su coseno, halla $\cos 3A - \cos A$.

■ 27. Una calle mide 12 m de ancha. Desde el punto medio de la misma se observan los aleros de sendos edificios de alturas H y h bajo ángulos 2β y β, respectivamente.

En el caso de que los ángulos sean de 60° y 30°, calcula H y h. Encuentra la relación general que liga a las alturas H y h, y comprueba que las alturas calculadas anteriormente verifican la relación general.



■ 28. Siendo A, B, C los ángulos de un triángulo, demuestra que:

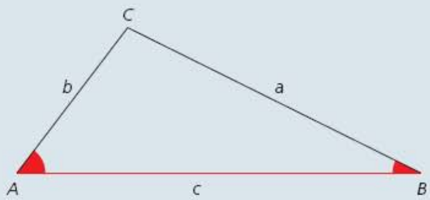
$$\text{tg}\ A + \text{tg}\ B + \text{tg}\ C = \text{tg}\ A \cdot \text{tg}\ B \cdot \text{tg}\ C$$

Nota: ayúdate del desarrollo de $\text{tg}\ (A + B + C)$, y recuerda que $A + B + C = 180°$.

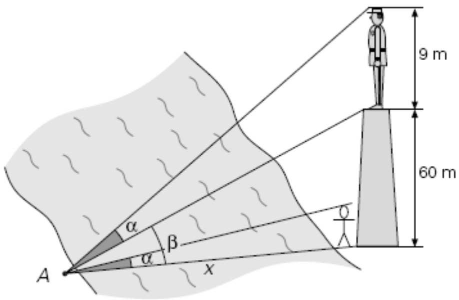
■ 29. En los manuales de agrimensura aparece la siguiente fórmula para calcular el área de un triángulo, siempre que se conozcan los elementos que en ella aparecen:

$$S = \frac{1}{2} \cdot c^2 \cdot \frac{\text{tg}\ A \cdot \text{tg}\ B}{\text{tg}\ A + \text{tg}\ B}$$

Ayudándote de la altura correspondiente al vertice C, demuestra la fórmula anterior.



25. Según la figura siguiente:



Llamando β al ángulo bajo el cual se ve el pedestal, tenemos:

$$\operatorname{tg}(\beta+\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\alpha};\quad \frac{60+9}{x}=\frac{\frac{60}{x}+\frac{1{,}8}{x}}{1-\frac{60}{x}\cdot\frac{1{,}8}{x}}\Rightarrow\frac{69}{x}=\frac{61{,}8\cdot x}{x^2-108}$$

$$\Rightarrow 7{,}2x^2=7\,452\;\Rightarrow\;\boxed{x=32{,}17\text{ m}}$$

La anchura del río es de 32,17 metros.

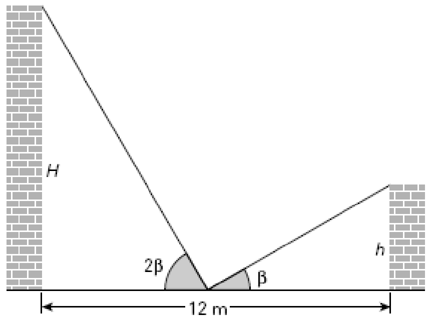
26. Queda del siguiente modo:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=-\sqrt{\frac{3}{2}}\;\Rightarrow\;\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}=-\sqrt{\frac{3}{2}}\;\Rightarrow\;\cos A=-\frac{1}{5};\ \operatorname{sen}A=-\frac{\sqrt{24}}{5}<\cos A$$

Hallamos:

$$\cos 3A-\cos A=-2\operatorname{sen}2A\cdot\operatorname{sen}A=\frac{96}{125}$$

27. Sea el esquema:



Los cálculos quedan:

$$\text{tg}\,60° = \frac{H}{6} \Rightarrow H = 6\cdot\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{H = 10{,}39\text{ m}}$$

$$\text{tg}\,30° = \frac{h}{6} \Rightarrow h = 6\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{h = 3{,}46\text{ m}}$$

$\text{tg}\,2\beta = \dfrac{2\,tg\,\beta}{1-tg^2\,\beta}$. Sustituyendo $\text{tg}\,2\beta = \dfrac{H}{6}$ y $\text{tg}\,\beta = \dfrac{h}{6}$ obtenemos: $\dfrac{H}{6} = \dfrac{2\cdot\dfrac{h}{6}}{1-\dfrac{h^2}{36}}$

$$\Rightarrow H\cdot h^2 + 72h - 36H = 0 \Rightarrow \boxed{h = \frac{6\sqrt{36+H^2}-36}{H}}$$

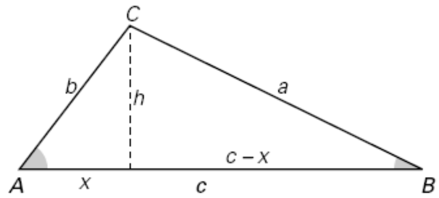
Ésta es la relación que liga ambas alturas. Relación que se verifica para los valores obtenidos anteriormente.

28. A partir del desarrollo de $\text{tg}(A+B+C)$ y de sustituir $A+B+C=180º$, obtenemos la expresión buscada:

$$\text{tg}\,(A+B+C) = \text{tg}\left[A+(B+C)\right] = \frac{\text{tg}\,A+\text{tg}\,(B+C)}{1-\text{tg}\,A\cdot\text{tg}\,(B+C)} = \frac{\text{tg}\,A+\text{tg}\,B+\text{tg}\,C-\text{tg}\,A\cdot\text{tg}\,B\cdot\text{tg}\,C}{1-\text{tg}\,B\cdot\text{tg}\,C-\text{tg}\,A\cdot\text{tg}\,B-\text{tg}\,A\cdot\text{tg}\,C}$$

Como $A+B+C=180º$ entonces $\text{tg}\,(A+B+C)=0$ y queda $\text{tg}\,A+\text{tg}\,B+\text{tg}\,C = \text{tg}\,A\cdot\text{tg}\,B\cdot\text{tg}\,C$

29. Sea un triángulo:



El área del triángulo es:

$$S = \frac{1}{2}\,\text{base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{2}\,c \cdot h$$

Vamos a calcular *h*:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg} A = \dfrac{h}{x} \\ \operatorname{tg} B = \dfrac{h}{c - x} \end{array}\right\} \Rightarrow\ h = c \cdot \frac{\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}$$

De modo que sustituyendo en el área obtenemos la fórmula buscada:

$$S = \frac{1}{2}\,c \cdot c \cdot \frac{\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B} = \frac{1}{2}\,c^2 \cdot \frac{\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}$$

Unidad 6 – Números complejos

PÁGINA 131

cuestiones iniciales

1. Halla las soluciones de las ecuaciones:

a) $x^2 - 4 = 0$ b) $x^2 + 4 = 0$

2. Halla las medidas de los lados de un rectángulo cuando se conocen el perímetro, *P* y el área, *A*. Considera los casos:

a) $P = 5{,}2$ y $A = 1{,}44$ b) $P = 4{,}8$ y $A = 1{,}69$

a

$P = 2a + 2b$

$A = a \cdot b$

b

3. Como sabes, es posible construir un triángulo rectángulo con una cuerda de 12 unidades, cuyos lados miden 3, 4 y 5, y su área 6 unidades cuadradas. **Diofanto** (275 d. C.) se preguntó si se podría construir con la misma cuerda un triángulo rectángulo de perímetro 12 y de área 7 unidades cuadradas. Intenta resolver la cuestión anterior.

SOLUCIONES

1. Las soluciones de las ecuaciones dadas son:

$$x^2 - 4 = 0 \;\Rightarrow\; x = \pm 2 \qquad\qquad x^2 + 4 = 0 \;\Rightarrow\; x = \pm 2\mathrm{i}$$

2. En cada uno de los casos:

$$\text{1)}\;\left.\begin{array}{r} 2a + 2b = 5{,}2 \\ a \cdot b = 1{,}44 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 0{,}8 \text{ unidades} \\ b = 1{,}8 \text{ unidades} \end{array} \;\; o \;\; \begin{array}{l} a = 1{,}8 \text{ u} \\ b = 0{,}8 \text{ u} \end{array}$$

$$\text{2)}\;\left.\begin{array}{r} 2a + 2b = 4{,}8 \\ a \cdot b = 1{,}69 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{no tiene soluciones reales}$$

3. Llamando *x*, *y* a los catetos del triángulo rectángulo obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x \cdot y}{2} = 7 \\ x^2 + y^2 = (12 - x - y)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 12x^2 - 86x + 168 = 0$$

Esta ecuación no tiene soluciones reales, por tanto no es posible construir el triángulo que proponía Diofanto.

PÁGINA 145

ACTIVIDADES

■ Con el fin de que te acostumbres a escribir los protocolos de resolución de los problemas, redacta los protocolos de los siguientes problemas:

1. **Decoración.** ¿Cómo colocarías 10 lámparas de pie en torno a un cuarto de estar cuadrado, de manera que haya el mismo número de lámparas junto a cada pared?

2. **Las calles del pueblo.** Todas las calles de un pueblo son rectas, sin que haya dos paralelas. Al emplear una farola en cada cruce, se colocan 66 farolas. ¿Cuántas calles tiene como mínimo el pueblo?

3. **Un criado sabio.** Un señor tenía sus mejores botellas de vino dispuestas en la cava de la manera indicada en la figura.

6	9	6
9		9
6	9	6

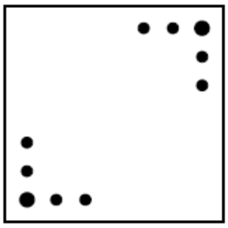
Desconfiaba de su criado y todas las noches, antes de acostarse, bajaba a la cava y las contaba, sumando el número de botellas que había en los tres compartimentos de cada uno de los cuatro lados. Si la suma era 21 botellas en los cuatro casos, descansaba feliz.

El criado, por su parte, sabedor de la estratagema y del bajo concepto que de él tenía el señor, decidió robarle botellas. ¡Y lo consiguió! Le robaba unas cuantas y redistribuía las restantes, de tal modo que ello no perturbase los sueños del amo.

¿Cuántas botellas, como máximo, pudo robar? ¿cómo quedó la cava?

SOLUCIONES

1. Si cada punto representa una lámpara, la solución quedaría del siguiente modo:



2. Si hay n calles el número máximo de cruces es:

$$C_{n,2} = \frac{n^2 - n}{2}.$$

Luego si hay 66 farolas $\Rightarrow$ 66 cruces $\Rightarrow \dfrac{n^2 - n}{2} \Rightarrow n^2 - n - 132 = 0 \Rightarrow n = 12$ calles como mínimo tenía el pueblo.

3. Ésta es una de las disposiciones en que quedó la cava.
Como máximo se pudo robar:

$$60 - 42 = 18 \text{ botellas.}$$

La disposición de las 42 botellas en la cava admite muchas formas diferentes.

1		20
20		1

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $4i + (3 - 5i) + (2 - i) + (1 - i)$

b) $(2 + 4i) + (3 - 2i) - 2 \cdot (-4 + 7i)$

c) $(2 + i) - (-2 + 3i) + (3 + 5i)$

d) $(5 - 4i) - (-3 + 2i) + \frac{1}{2} \cdot (6 - 6i)$

2. Calcula los productos y cocientes:

a) $(4 - 2i) \cdot (5 + 3i)$

b) $(3 + 4i) \cdot (6 - i)$

c) $(3 + i) \cdot (3 - i)$

d) $\frac{1 + 3i}{3 - i}$

e) $\frac{2 - 5i}{4 + 2i}$

f) $\frac{5}{2i}$

3. Sabiendo que $u = 4 - 3i$, $v = 2i$, $w = -1 + i$, calcula:

a) $u + v - w$

b) $u + i - (v - w)$

c) u^2

d) v^3

e) $(u + v)^2$

f) $u \cdot v \cdot w$

g) $u \cdot (v - w)$

h) $\frac{u}{w}$

i) $\frac{(u + v)^3}{w^3}$

j) $\frac{v}{w}$

4. Calcula los valores de las operaciones siguientes:

a) i^{17}

b) i^{50}

c) i^{301}

d) i^{723}

e) $i^{1\,999}$

f) $i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{20}$

g) $1 + i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{2\,000}$

h) $\frac{i^{302}}{i^{485} - i^{274}}$

i) $\frac{i^3 + i^6 + i^{11} + i^{13}}{1 + i^3}$

5. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Halla x con la condición de que $(x + 3i)^2$ sea un número imaginario puro.

b) Encuentra a con la condición de que $(2 + i) \cdot (a - 3i)$ sea un número real.

c) Calcula $a + bi$ para que se verifique: $(a + bi) \cdot (2 - i) = 7 - i$.

d) Determina el número real x para que el cociente $\frac{2 + xi}{1 - xi}$ sea un número real.

6. Escribe de todas las formas posibles los siguientes complejos:

a) $2 + 2i$

b) $1 - i$

c) $-3 + 4i$

d) i

e) $\sqrt{2}_{135°}$

f) $4_{30°}$

g) $2_{225°}$

h) $2_{60°}$

7. Representa en el plano complejo los siguientes números complejos:

$3 + 2i$, $5 - 7i$, $8i$, 3, $-2 + 3i$, $5 - 5i$, $2_{30°}$, $1_{90°}$, $4_{45°}$, $1_{180°}$, $2_{225°}$, $1_{270°}$

8. Efectúa las siguientes operaciones, expresando los resultados en forma binómica:

a) $4_{20°} \cdot 3_{25°}$

b) $12_{54°} : 3_{24°}$

c) $20_{83°} : 5_{23°}$

d) $[6\,(\cos 130° + i \operatorname{sen} 130°)] \cdot [3\,(\cos 80° + i \operatorname{sen} 80°)]$

e) $\frac{4\,(\cos 330° + i \operatorname{sen} 330°)}{2\,(\operatorname{sen} 30° + i \operatorname{sen} 30°)}$

SOLUCIONES

1. Las soluciones son:

a) $6-3i$ b) $13-12i$ c) $7+3i$ d) $11-9i$

2. Las soluciones son:

a) $26+2i$ b) $22+21i$ c) 10

d) i e) $-\frac{1}{10}-\frac{6}{5}i$ f) $-\frac{5}{2}i$

3. Las soluciones son:

a) $5-2i$ b) $3-3i$ c) $7-24i$ d) $-8i$ e) $15-8i$

f) $-14-2i$ g) $7+i$ h) $-\frac{7}{2}-\frac{1}{2}i$ i) $\frac{5}{4}-\frac{99}{4}i$ j) $1-i$

4. Las soluciones son:

a) $i^{17}=i$ b) $i^{50}=i^2=-1$

c) $i^{301}=i^1=i$ d) $i^{723}=i^3=-i$

e) $i^{1\,999}=i^3=-i$ f) $i+i^2+i^3+\ldots+i^{20}=\dfrac{i^{20}\cdot i-i}{i-1}=0$

g) $i+i^2+i^3+\ldots+i^{2\,000}=\dfrac{i^{2\,000}\cdot i-i}{i-1}=1$ h) $\dfrac{i^{302}}{i^{485}-i^{274}}=\dfrac{i^2}{i-i^2}=\dfrac{-1}{i+1}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$

i) $\dfrac{i^3+i^6+i^{11}+i^{13}}{1+i^3}=\dfrac{i+1}{i-1}=-i$

5. Quedan del siguiente modo:

a) $(x+3i)^2=x^2-9+6xi \;\Rightarrow\;$ imaginario puro $x^2-9=0 \;\Rightarrow\; x=\pm 3$

b) $(2+i)(a-3i)=2a-6i+ai+3=$ nº real $\Rightarrow\; -6+a=0 \;\Rightarrow\; a=6$

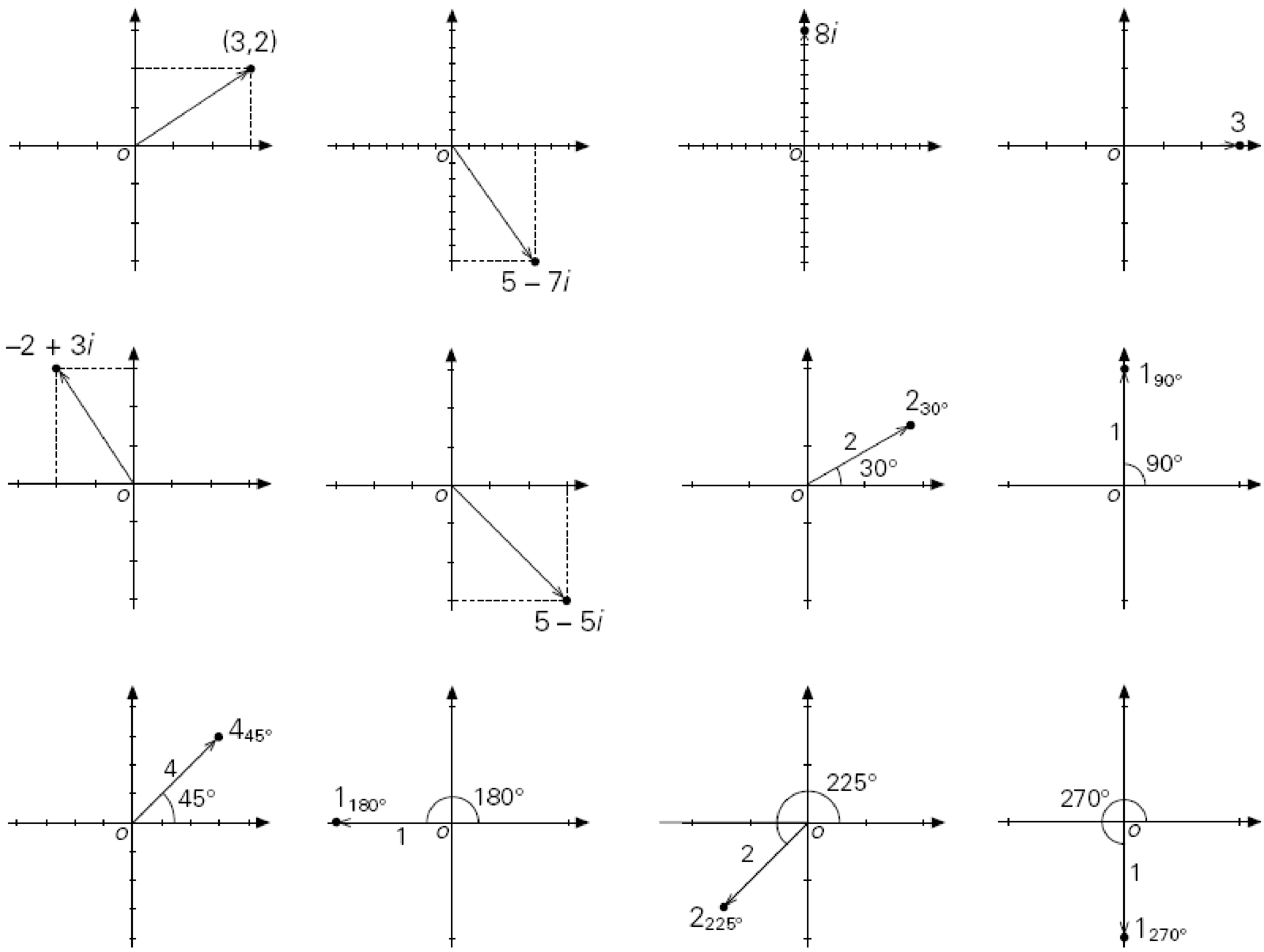
c) $(a\cdot bi)(2-i)=7-i \;\Rightarrow\; (a+bi)=\dfrac{7-i}{2-i}=\dfrac{(7-i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=3+i$

d) $\dfrac{2+xi}{1-xi}=\dfrac{(2+xi)(1+xi)}{(1-xi)(1+xi)}=\dfrac{2-x^2+3xi}{1+x^2}=$ nº real $\Rightarrow\; 3x=0 \;\Rightarrow\; x=0$

6. La tabla queda del siguiente modo:

Afijo	Forma binómica	Forma polar	Forma trigonométrica
$(2,2)$	$2+2i$	$\left(2\sqrt{2}\right)_{45^\circ}$	$2\sqrt{2}\,(\cos 45^\circ + i\,\text{sen}\,45^\circ)$
$(1,-1)$	$1-i$	$\sqrt{2}_{315^\circ}$	$\sqrt{2}\,(\cos 315^\circ + i\,\text{sen}\,315^\circ)$
$(-3,4)$	$-3+4i$	5_{127°	$5\,(\cos 127^\circ + i\,\text{sen}\,127^\circ)$
$(0,1)$	i	1_{90°	$1(\cos 90^\circ + i\,\text{sen}\,90^\circ)$
$(-1,1)$	$-1+i$	$\sqrt{2}_{135^\circ}$	$\sqrt{2}\,(\cos 135^\circ + i\,\text{sen}\,135^\circ)$
$(2\sqrt{3},2)$	$2\sqrt{3}+2i$	4_{30°	$4\,(\cos 30^\circ + i\,\text{sen}\,30^\circ)$
$(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$	2_{225°	$2\,(\cos 225^\circ + i\,\text{sen}\,225^\circ)$
$(2,2\sqrt{3})$	$2+2\sqrt{3}i$	4_{60°	$4\,(\cos 60^\circ + i\,\text{sen}\,60^\circ)$

7. Las representaciones quedan del siguiente modo:



8. Las soluciones son:

a) $4_{20^\circ} \cdot 3_{25^\circ} = 12_{45^\circ} = 12\,(\cos 45^{o} + i\,\text{sen}\, 45^{o}) = 12\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2}\,i$

b) $\frac{12_{54^\circ}}{3_{24^\circ}} = 4_{30^\circ} = 4\,(\cos 30^{o} + i\,\text{sen}\, 30^{o}) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3} + 2i$

c) $\frac{20_{83^\circ}}{5_{23^\circ}} = 4_{60^\circ} = 4\,(\cos 60^{o} + i\,\text{sen}\, 60^{o}) = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + 2\sqrt{3}\,i$

d) $\left[6\,(\cos 130^{o} + i\,\text{sen}\,130^{o})\right] \cdot \left[3\,(\cos 80^{o} + i\,\text{sen}\,80^{o})\right] = 6_{130^\circ} \cdot 3_{80^\circ} = 18_{210^\circ} = 18\,(\cos 210^{o} + i\,\text{sen}\,210^{o}) =$

$= 18\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -9\sqrt{3} - 9i$

e) $\frac{4\,(\cos 330^{o} + i\,\text{sen}\,330^{o})}{2\,(\mathit{sen}\,30^{o} + i\,\text{sen}\,30^{o})} = \frac{4_{330^\circ}}{2_{30^\circ}} = 2_{300^\circ} = 2\,(\cos 300^{o} + i\,\text{sen}\,300^{o}) = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \sqrt{3}\,i$

■ 9. Calcula las siguientes potencias:

a) $(1_{30°})^3$ b) $(4_{225°})^2$ c) $[4(\cos 20° + i \text{ sen } 20°)]^3$

■ 10. Calcula el cuadrado, el cubo y la cuarta potencia de los complejos:

a) $1 + i$ b) $1 - i$ c) $2 + 3i$ d) $-2 + i$ e) $2_{45°}$ f) $1_{225°}$ g) $3_{90°}$ h) $3_{180°}$

■ 11. Expresa el resultado de las siguientes operaciones en forma polar:

a) $(-4 - 4i)^4$ c) $(i^8 + i^5) : \sqrt{2}i$ e) $\dfrac{(2\sqrt{3} - 2i)^8}{(-4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i)^6}$

b) $(\sqrt{3} + i)^5 : (1 - i)^3$ d) $i^{39} \cdot (-4 - 4\sqrt{3}i)^7$ f) $i^{-73} \cdot \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i\right)$

■ 12. Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt[3]{i}$ c) $\sqrt[4]{1 + i}$ e) $\sqrt[3]{1 - i}$ g) $\sqrt[5]{\dfrac{-32}{i}}$ i) $\sqrt[6]{i}$

b) $\sqrt{-25}$ d) $\sqrt[3]{-27}$ f) $\sqrt[3]{\dfrac{1 - i}{1 + i}}$ h) $\sqrt[6]{729i}$ j) $\sqrt[3]{\dfrac{i^5 - i^{-5}}{2i}}$

■ 13. Obtén y representa gráficamente las soluciones de las siguientes raíces:

a) $\sqrt[6]{1}$ b) $\sqrt[3]{-1}$ c) $\sqrt[4]{16i}$ d) $\sqrt[5]{-32}$ e) $\sqrt[3]{-27i}$

■ 14. Comprueba que los números complejos $4 + 3i$ y $4 - 3i$ son las soluciones de la ecuación:

$$x^2 - 8x + 25 = 0$$

■ 15. Halla las ecuaciones de segundo grado, cuyas soluciones son los números:

a) i y $-i$ b) $2 + 2i$ y $2 - 2i$ c) $2 + 3i$ y $2 - 3i$ d) $2_{45°}$ y $2_{315°}$.

■ 16. Halla todas las soluciones de las ecuaciones:

a) $z^6 - 1 = 0$ c) $z^4 + 1 = 0$ e) $z^4 - 81 = 0$

b) $z^2 + z + 1 = 0$ d) $z^3 - 6z^2 + 10z - 8 = 0$ f) $z^6 - 64 = 0$

■ 17. Calcular el módulo y el argumento de todas las raíces de las ecuaciones:

a) $z^2 + z + 1 = 0$ c) $z^2 + iz + 2 = 0$ e) $z^3 + 1 = 0$

b) $z^2 - \sqrt{12}\, z + 4 = 0$ d) $z^6 - 28z^3 + 27 = 0$ f) $z^3 - 64i = 0$

■ 18. Utilizando la fórmula de Moivre, obtén $\text{sen } 2\alpha$ y $\cos 2\alpha$ en función de $\text{sen } \alpha$ y $\cos \alpha$. De igual forma, halla $\text{sen } 4\alpha$ y $\cos 4\alpha$ en función de $\text{sen } \alpha$ y $\cos \alpha$.

■ 19. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Determina b para que el módulo del cociente $(b + 4i) : (1 + i)$ sea $\sqrt{26}$.

b) La suma de dos números complejos conjugados es 24, y la suma de sus módulos es 26. ¿De qué números complejos se trata?

c) La suma de dos números complejos es $5 - 3i$. El cociente de ambos es imaginario puro, y la parte real del numerador es 4. Halla dichos números.

9. Las potencias quedan:

a) $\left(1_{30^\circ}\right)^3 = 1_{90^\circ} = i$

b) $\left(4_{225^\circ}\right)^2 = 16_{450^\circ} = 16_{90^\circ} = 16\,i$

c) $\left[4\left(\cos 20^\text{o} + i\,\text{sen}\,20^\text{o}\right)\right]^3 = \left(4_{20^\circ}\right)^3 = 64_{60^\circ} = 32 + 32\sqrt{3}\,i$

10. Cada uno de los casos quedan:

a) $1+i = \sqrt{2}_{45^\circ}$
$(1+i)^2 = \left(\sqrt{2}_{45^\circ}\right)^2 = 2_{90^\circ} = 2\,i$
$(1+i)^3 = \left(\sqrt{2}_{45^\circ}\right)^3 = 2\sqrt{2}_{135^\circ} = -2+2i$
$(1+i)^4 = \left(\sqrt{2}_{45^\circ}\right)^4 = 4_{180^\circ} = -4$

b) $1-i = \sqrt{2}_{315^\circ}$
$(1-i)^2 = \left(\sqrt{2}_{315^\circ}\right)^2 = 2_{630^\circ} = 2_{270^\circ} = -2i$
$(1-i)^3 = \left(\sqrt{2}_{315^\circ}\right)^3 = 2\sqrt{2}_{945^\circ} = 2\sqrt{2}_{225^\circ} = -2-2i$
$(1-i)^4 = \left(\sqrt{2}_{315^\circ}\right)^4 = 4_{1260^\circ} = 4_{180^\circ} = -4$

c) $(2+3i)^2 = -5+12i$
$(2+3i)^3 = (-5+12i)(2+3i) = -46+9\,i$
$(2+3i)^4 = (-5+12i)^2 = -119-120\,i$

d) $(-2+i)^2 = 3-4i$
$(-2+i)^3 = (3-4i)(-2+i) = -2+11i$
$(-2+i)^4 = (3-4i)^2 = -7-24i$

e) $\left(2_{45^\circ}\right)^2 = 4_{90^\circ}$; $\left(2_{45^\circ}\right)^3 = 8_{135^\circ}$; $\left(2_{45^\circ}\right)^4 = 16_{180^\circ}$

f) $\left(1_{225^\circ}\right)^2 = 1_{90^\circ}$; $\left(1_{225^\circ}\right)^3 = 1_{315^\circ}$; $\left(1_{225^\circ}\right)^4 = 1_{180^\circ}$

g) $\left(3_{90^\circ}\right)^2 = 9_{180^\circ}$; $\left(3_{90^\circ}\right)^3 = 27_{270^\circ}$; $\left(3_{90^\circ}\right)^4 = 81_{0^\circ}$

h) $\left(3_{180^\circ}\right)^2 = 9_{0^\circ}$; $\left(3_{180^\circ}\right)^3 = 27_{180^\circ}$; $\left(3_{180^\circ}\right)^4 = 81_{0^\circ}$

11. Las soluciones quedan:

a) $(-4-4i)^4 = \left(\sqrt{32}_{315^\circ}\right)^4 = 1024_{180^\circ}$

b) $\dfrac{\left(\sqrt{3}+i\right)^5}{(1-i)^3} = \dfrac{(2_{30^\circ})^5}{\left(\sqrt{2}_{315^\circ}\right)^3} = \dfrac{32_{150^\circ}}{2\sqrt{2}_{225^\circ}} = 8\sqrt{2}_{-75^\circ} = 8\sqrt{2}_{285^\circ}$

c) $\dfrac{i^8+i^5}{\sqrt{2}\,i} = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}\,i} = \dfrac{-1+i}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}_{135^\circ}}{\sqrt{2}_{0^\circ}} = 1_{135^\circ}$

d) $i^{39}\cdot\left(-4-4\sqrt{3}\,i\right)^7 = -i\left(-4-4\sqrt{3}\,i\right)^7 = 1_{270^\circ}\cdot\left(8_{240^\circ}\right)^7 = 1_{270^\circ}\cdot 8^7{}_{240^\circ} = 8^7{}_{150^\circ}$

e) $\dfrac{\left(2\sqrt{3}-2i\right)^8}{\left(-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}\,i\right)^6} = \dfrac{\left(4_{330^\circ}\right)^8}{\left(8_{135^\circ}\right)^6} = \dfrac{4^8{}_{120^\circ}}{8^6{}_{90^\circ}} = \left(\dfrac{1}{4}\right)_{30^\circ}$

f) $i^{-73}\cdot\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3}{2}i\right) = i^{-1}\cdot 3_{330^\circ} = \dfrac{3_{330^\circ}}{1_{90^\circ}} = 3_{240^\circ}$

12. Las raíces quedan:

a) $\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{1_{90^\circ}} = 1_{\frac{90^\circ+360^\circ K}{3}} = 1_{30^\circ+120^\circ K}$ $\Rightarrow$ Las raíces son: 1_{30°; 1_{150°; 1_{270°

b) $\sqrt{-25} = \sqrt{25_{180^\circ}} = \sqrt{25}_{\frac{180^\circ+360^\circ K}{2}} = 5_{90^\circ+180^\circ K}$ $\Rightarrow$ Las raíces son: 5_{90°; 5_{270°

c) $\sqrt[4]{1+i} = \sqrt[4]{\sqrt{2}_{45^\circ}} = \sqrt[8]{2}_{\frac{45^\circ+360^\circ K}{4}} = \sqrt[8]{2}_{11^\circ 15'+90^\circ K}$ $\Rightarrow$ Las raíces son: $\sqrt[8]{2}_{11^\circ 15'}$; $\sqrt[8]{2}_{101^\circ 15'}$; $\sqrt[8]{2}_{191^\circ 15'}$; $\sqrt[8]{2}_{281^\circ 15'}$

d) $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{27_{180^\circ}} = 3_{\frac{180^\circ+360^\circ K}{3}} = 3_{60^\circ+120^\circ K}$ $\Rightarrow$ Las raíces son: 3_{60°; 3_{180°; 3_{300°

e) $\sqrt[3]{1-i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}_{315^\circ}} = \sqrt[6]{2}_{\frac{315^\circ+360^\circ K}{3}} = \sqrt[6]{2}_{105^\circ+120^\circ K}$ $\Rightarrow$ Las raíces son: $\sqrt[6]{2}_{105^\circ}$; $\sqrt[6]{2}_{225^\circ}$; $\sqrt[6]{2}_{345^\circ}$

f) $\sqrt[3]{\dfrac{1-i}{1+i}} = \sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{1_{270^\circ}} = 1_{\frac{270^\circ+360^\circ K}{3}} = 1_{90^\circ+120^\circ K}$ $\Rightarrow$ Las raíces son: 1_{90°; 1_{210°; 1_{330°

g) $\sqrt[5]{\dfrac{-32}{i}} = \sqrt[5]{32i} = \sqrt[5]{32_{90^\circ}} = 2_{\frac{90^\circ+360^\circ K}{5}} = 2_{18^\circ+72^\circ K} \Rightarrow$ Las raíces son: $2_{18^\circ}; 2_{90^\circ}; 2_{162^\circ}; 2_{234^\circ}; 2_{306^\circ}$

h) $\sqrt[6]{729i} = \sqrt[6]{729_{90^\circ}} = \sqrt[6]{729}_{\frac{90^\circ+360^\circ K}{6}} = 3_{15^\circ+60^\circ K} \Rightarrow$ Las raíces son: $3_{15^\circ}; 3_{75^\circ}; 3_{135^\circ}; 3_{195^\circ}; 3_{225^\circ}; 3_{315^\circ}$

i) $\sqrt[6]{i} = \sqrt[6]{1_{90^\circ}} = \sqrt[6]{1}_{\frac{90^\circ+360^\circ K}{6}} = 1_{15^\circ+60^\circ K} \Rightarrow$ Las raíces son: $1_{15^\circ}; 1_{75^\circ}; 1_{135^\circ}; 1_{195^\circ}; 1_{225^\circ}; 1_{315^\circ}$

j) $\sqrt[3]{\dfrac{i^5 - i^{-5}}{2i}} = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1_{0^\circ}} = \sqrt[3]{1}_{\frac{0^\circ+360^\circ K}{3}} = 1_{120^\circ K} \Rightarrow$ Las raíces son: $1_{0^\circ}; 1_{120^\circ}; 1_{240^\circ}$

13. Quedan del siguiente modo:

a) $\sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{1_{0^\circ}} = 1_{\frac{0^\circ+360^\circ K}{6}} = 1_{60^\circ K} \Rightarrow$ Las soluciones son: $1_{0^\circ}; 1_{60^\circ}; 1_{120^\circ}; 1_{180^\circ}; 1_{240^\circ}; 1_{300^\circ}$

Gráficamente obtenemos los vértices de un hexágono regular centrado en el origen de coordenadas.

b) $\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1_{180^\circ}} = 1_{\frac{180^\circ+360^\circ K}{3}} = 1_{60^\circ+120^\circ K} \Rightarrow$ Las soluciones son: $1_{60^\circ}; 1_{180^\circ}; 1_{300^\circ}$

Gráficamente obtenemos los vértices de un triángulo equilátero centrado en el origen de coordenadas.

c) $\sqrt[4]{16i} = \sqrt[4]{16_{90^\circ}} = 2_{\frac{90^\circ+360^\circ K}{4}} = 2_{22,5^\circ+90^\circ K} \Rightarrow$ Las soluciones son: $2_{22,5^\circ}; 2_{112,5^\circ}; 2_{202,5^\circ}; 2_{292,5^\circ}$

Gráficamente obtenemos los vértices de un cuadrado centrado en el origen de coordenadas.

d) $\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{32_{180^\circ}} = 2_{\frac{180^\circ+360^\circ K}{5}} = 2_{36^\circ+72^\circ K} \Rightarrow$ Las soluciones son: $2_{36^\circ}; 2_{108^\circ}; 2_{180^\circ}; 2_{252^\circ}; 2_{324^\circ}$

Gráficamente obtenemos los vértices de un pentágono regular centrado en el origen de coordenadas.

e) $\sqrt[3]{-27i} = \sqrt[3]{27_{270^\circ}} = 3_{\frac{270^\circ+360^\circ K}{3}} = 3_{90^\circ+120^\circ K} \Rightarrow$ Las soluciones son: $3_{90^\circ}; 3_{210^\circ}; 3_{330^\circ}$

Gráficamente obtenemos los vértices de un triángulo equilátero centrado en el origen de coordenadas.

14. Sustituyendo en la ecuación original cada una de las raíces obtenemos:

- $(4+3\mathrm{i})^2-8(4+3\mathrm{i})+25=16+24\mathrm{i}-9-32-24\mathrm{i}+25=0$
- $(4-3\mathrm{i})^2-8(4-3\mathrm{i})+25=16-24\mathrm{i}-9-32+24\mathrm{i}+25=0$

15. Las ecuaciones quedan del siguiente modo:

Toda ecuación de segundo grado se puede construir del siguiente modo a partir de sus dos soluciones: $z^2-S\cdot z+P=0$ con $S=$suma de soluciones y $P=$producto de soluciones.

a) $\left.\begin{array}{l} S=\mathrm{i}+(-\mathrm{i})=0 \\ P=\mathrm{i}\cdot(-\mathrm{i})=-\mathrm{i}^2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow z^2+1=0$

b) $\left.\begin{array}{l} S=(2+2\mathrm{i})+(2-2\mathrm{i})=4 \\ P=(2+2\mathrm{i})\cdot(2-2\mathrm{i})=8 \end{array}\right\} \Rightarrow z^2-4z+8=0$

c) $\left.\begin{array}{l} S=(2+3\mathrm{i})+(2-3\mathrm{i})=4 \\ P=(2+3\mathrm{i})\cdot(2-3\mathrm{i})=13 \end{array}\right\} \Rightarrow z^2-4z+13=0$

d) $\left.\begin{array}{l} 2_{45^\circ}=\sqrt{2}+\sqrt{2}\,\mathrm{i} \\ 2_{315^\circ}=\sqrt{2}-\sqrt{2}\,\mathrm{i} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} S=\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\,\mathrm{i}\right)+\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\,\mathrm{i}\right)=2\sqrt{2} \\ P=\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\,\mathrm{i}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\,\mathrm{i}\right)=4 \end{array}\right\} \Rightarrow z^2-2\sqrt{2}\,z+4=0$

16. Las ecuaciones quedan:

a) $z^6-1=0 \Rightarrow z=\sqrt[6]{1}=\sqrt[6]{1_{0^\circ}}=1_{\frac{0^\circ+360^\circ K}{6}}=1_{60^\circ K} \Rightarrow z_0=1_{0^\circ};\ z_1=1_{60^\circ};\ z_2=1_{120^\circ};\ z_3=1_{180^\circ};\ z_4=1_{240^\circ};\ z_5=1_{300^\circ}$

b) $z^2+z+1=0 \Rightarrow z=\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2} \Rightarrow z_0=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i};\ z_1=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

c) $z^4+1=0 \Rightarrow z=\sqrt[4]{-1}=\sqrt[4]{1_{180^\circ}}=1_{\frac{180^\circ+360^\circ K}{4}}=1_{45^\circ+90^\circ K} \Rightarrow z_0=1_{45^\circ};\ z_1=1_{135^\circ};\ z_2=1_{225^\circ};\ z_3=1_{315^\circ}$

d) $z^3-6z^2+10z-8=0 \Rightarrow (z-4)\,(z^2-2z+2)=0 \Rightarrow z_0=4;\ z_1=1+\mathrm{i};\ z_2=1-\mathrm{i}$

e) $z^4-81=0 \Rightarrow z=\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{81_{0^\circ}}=3_{\frac{0^\circ+360^\circ K}{4}}=3_{90^\circ K} \Rightarrow z_0=3_{0^\circ};\ z_1=3_{90^\circ};\ z_2=3_{180^\circ};\ z_3=3_{270^\circ}$

f) $z^6-64=0 \Rightarrow z=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{64_{0^\circ}}=2_{\frac{0^\circ+360^\circ K}{6}}=2_{60^\circ K} \Rightarrow z_0=2_{0^\circ};\ z_1=2_{60^\circ};\ z_2=2_{120^\circ};$

$z_3=2_{180^\circ};\ z_4=2_{240^\circ};\ z_5=2_{300^\circ}$

17. Las soluciones quedan:

a) $z^2+z+1=0 \Rightarrow z=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}$

$\Rightarrow \quad z_1=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=1_{120°}\,; \quad z_2=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=1_{240°}$

b) $z^2-\sqrt{12}\,z+4=0 \;\Rightarrow\; z=\dfrac{\sqrt{12}\pm\sqrt{12-16}}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}\pm 2\mathrm{i}}{2}=\sqrt{3}\pm\mathrm{i}$

$\Rightarrow \quad z_1=\sqrt{3}+\mathrm{i}=2_{30°}; \quad z_2=\sqrt{3}-\mathrm{i}=2_{330°}$

c) $z^2+\mathrm{i}z+2=0 \;\Rightarrow\; z=\dfrac{-i\pm\sqrt{\mathrm{i}^2-8}}{2}=\dfrac{-i\pm\sqrt{-9}}{2}=\dfrac{1\pm 3\mathrm{i}}{2}$

$\Rightarrow \quad z_1=\mathrm{i}; \quad z_2=-2\mathrm{i}$

d) $z^6-28z^3+27=0 \;\Rightarrow\; z^3=\dfrac{28\pm\sqrt{784-108}}{2}=\dfrac{28\pm 26}{2}=\begin{cases}27\\ 1\end{cases}$

Para cada solución: $\begin{cases}27 \Rightarrow z=\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{27_{0°}}=3_{120°K} \;\Rightarrow\; z_0=3_{0°};\; z_1=3_{120°};\; z_2=3_{240°}\\ 1 \;\Rightarrow\; z=\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{1_{0°}}=1_{120°K} \;\Rightarrow\; z_3=1_{0°};\; z_4=1_{120°};\; z_5=1_{240°}\end{cases}$

e) $z^3+1=0 \;\Rightarrow\; z=\sqrt[3]{-1}=\sqrt[3]{1_{180°}}=1_{\frac{180°+360°K}{3}}=1_{60°+120°K}$

$\Rightarrow \quad z_0=1_{60°};\; z_1=1_{180°};\; z_2=1_{300°}$

f) $z^3-64\mathrm{i}=0 \;\Rightarrow\; z=\sqrt[3]{64\mathrm{i}}=\sqrt[3]{64_{90°}}=4_{\frac{90°+360°K}{3}}=4_{30°+120°K}$

$\Rightarrow \quad z_0=4_{30°}; z_1=4_{150°}; z_2=4_{270°}$

18. Las demostraciones quedan:

• $(\cos\alpha + i\,sen\,\alpha)^2 = \cos 2\alpha + i\,sen\,2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha + 2\,sen\,\alpha\,\cos\alpha\, i = \cos 2\alpha + i\,sen\,2\alpha$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha \\ sen\,2\alpha = 2\,sen\,\alpha\cdot\cos\alpha \end{cases}$$

• $(\cos\alpha + i\,sen\,\alpha)^4 = \cos 4\alpha + i\,sen\,4\alpha + \cos^4\alpha + sen^4\alpha - 6\cos^2\alpha\,sen^2\alpha +$

$+ 4\,sen\,\alpha\cdot\cos^3\alpha\cdot i - 4\,sen^3\alpha\,\cos\alpha\, i = \cos 4\alpha + i\,sen\,4\alpha$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 4\alpha = \cos^4\alpha + sen^4\alpha - 6\cos^2\alpha\cdot sen^2\alpha \\ sen\,4\alpha = 4\,sen\,\alpha\cdot\cos^3\alpha - 4\,sen^3\alpha\cdot\cos\alpha \end{cases}$$

19. Quedan resueltas del siguiente modo:

a) $\dfrac{b+4\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{b+4}{2} + \dfrac{4-b}{2}\mathrm{i} \;\Rightarrow\; \sqrt{\left(\dfrac{b+4}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{4-b}{2}\right)^2} = \sqrt{26} \;\Rightarrow\; \dfrac{b^2+16}{2} = 26 \;\Rightarrow\; b^2 = 36 \;\Rightarrow\; b = \pm 6$

b) $\left.\begin{array}{r} (a+b\mathrm{i})+(a-b\mathrm{i})=24 \\ \sqrt{a^2+b^2}=26 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a=12 \\ b=\pm 5 \end{array} \Rightarrow$ Los números complejos son: $(12+5\mathrm{i})$; $(12-5\mathrm{i})$

c) $\left.\begin{array}{r} (a+b\mathrm{i})+(c-d\mathrm{i})=5-3\mathrm{i} \\ \dfrac{a+b\mathrm{i}}{c-d\mathrm{i}}=\text{imaginario puro} \\ a=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a+c=5 \\ b+d=-3 \\ bd+4c=0 \\ a=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a=4 \\ c=1 \\ b=-4 \\ d=1 \end{array} \quad \text{ó} \quad \begin{array}{l} a=4 \\ c=1 \\ b=1 \\ d=-4 \end{array}$

Los números complejos son: $(4-\mathrm{i})$ *y* $(1+\mathrm{i})$ o bien $(4+\mathrm{i})$ y $(1-4\mathrm{i})$

ACTIVIDADES FINALES

■ 20. El número 5i es una raíz cúbica de un número complejo; calcula las otras raíces y el número complejo.

■ 21. Calcula y representa las ocho primeras potencias del complejo $z = 1 + i$. Observa que los afijos se encuentran sobre una curva espiral.

■ 22. Halla las coordenadas de los vértices de un hexágono regular, de centro en el origen, sabiendo que uno de sus vértices es el afijo del número complejo $2_{180°}$.

■ 23. Halla las coordenadas de los vértices de un cuadrado, con centro en el origen, de forma que uno de sus vértices sea el afijo del número complejo $2_{90°}$.

■ 24. ¿Qué ocurre con el afijo de un número complejo cuando este se multiplica por i? ¿y cuando se divide por i?

■ 25. Un cuadrado de centro 0 tiene un vértice en (3, 4). Halla las coordenadas de los demás vértices.

■ 26. Un cuadrado tiene sus vértices por encima del eje real. Si dos vértices consecutivos del cuadrado son $2 + i$ y $5 + 3i$, halla los otros dos vértices.

■ 27. Dado un complejo cualquiera, distinto del complejo cero, ¿cuál es el módulo de su inverso? ¿y el argumento de su inverso? ¿Dónde se sitúa el afijo del inverso del complejo dado?

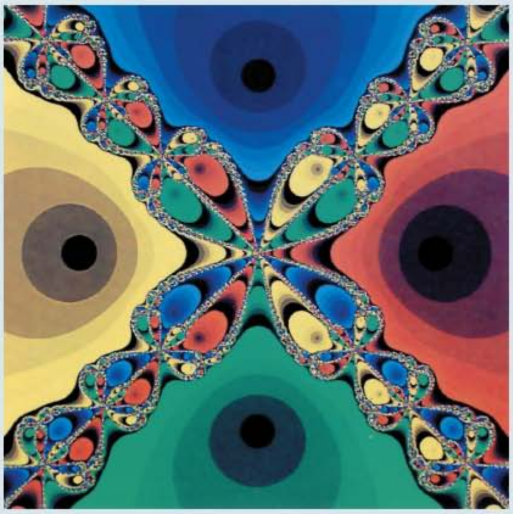
■ 28. Calcula las coordenadas de los vértices, el perímetro y el área del triángulo cuyos vértices son los afijos de $\sqrt[3]{-64}$.

■ 29. Halla el cuadrilátero cuyos vértices son los afijos de las raíces de la ecuación:

$$z^4 + 4 = 0$$

■ 30. Halla dos complejos conjugados tales que el triángulo que forman sus afijos con el origen sea equilátero y su área valga $2\sqrt{3}$.

■ 31. Calcula el área del hexágono cuyos vértices son los afijos de las raíces sextas de $-64i$.



↑ Imagen obtenida de un estudio por ordenador de la aproximación a las soluciones de la ecuación $z^4 - 1 = 0$.

La imagen permite ilustrar las siguientes palabras del matemático francés Jacques Hadaward (1865-1963):

«La trayectoria más corta entre dos verdades reales pasa a través del dominio complejo.»

20. Queda:

$$\sqrt[3]{z} = 5\text{i} \Rightarrow z = 125\text{i}^3 \Rightarrow z = -125\text{i}$$

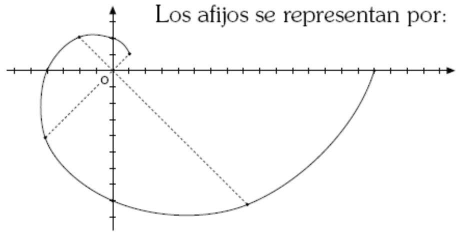
Las otras raíces son:

$$\sqrt[3]{-125\text{i}} = \sqrt[3]{125_{270^\circ}} = 5_{90^\circ+120^\circ K} \Rightarrow z_0 = 5_{90^\circ} = 5\text{i};\ z_1 = 5_{210^\circ} = \frac{-5\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}\text{i};\ z_2 = 5_{330^\circ} = \frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}\text{i}$$

21. La solución queda:

$$z = 1+\text{i} = \sqrt{2}_{45^\circ} \qquad z^5 = z^4 \cdot z = 4\sqrt{2}_{225^\circ}$$
$$z^2 = (1+\text{i})^2 = 2\text{i} = 2_{90^\circ} \qquad z^6 = z^5 \cdot z = 8_{270^\circ}$$
$$z^3 = (1+\text{i})^3 = 2\sqrt{2}_{135^\circ} \qquad z^7 = z^6 \cdot z = 8\sqrt{2}_{315^\circ}$$
$$z^4 = z^2 \cdot z^2 = 2_{90^\circ} \cdot 2_{90^\circ} = 4_{180^\circ} \qquad z^8 = z^7 \cdot z = 16_{360^\circ}$$

Los afijos se representan por:



22. Los vértices del hexágono regular son:

$$2_{180^\circ};\ 2_{240^\circ};\ 2_{300^\circ};\ 2_{0^\circ};\ 2_{60^\circ};\ 2_{120^\circ}$$

Las coordenadas:

$$(2,0);\ (1,\sqrt{3});\ (-1,\sqrt{3});\ (-2,0);\ (-1,-\sqrt{3});\ (1,-\sqrt{3})$$

23. Los vértices del cuadrado son:

$$2_{90^\circ};\ 2_{180^\circ};\ 2_{270^\circ};\ 2_{0^\circ}$$

Las coordenadas:

$$(0,2);\ (-2,0);\ (0,-2);\ (2,0)$$

24. La solución queda:

- Se obtiene el número complejo girando 90º, es decir, si el número complejo tiene como afijo (a, b) obtenemos, al multiplicar por i, el número complejo de afijo ($-b$, a).

- Al dividir el número complejo i, se obtiene el mismo número complejo girado 270º.

$$\frac{a+b\text{i}}{\text{i}} = b - a\text{i}.\ \text{Su afijo es } (b, -a)$$

25. Los vértices del cuadrado son: $(3,4);\ (-4,3);\ (-3,-4);\ (4,-3)$

26. Los vértices son: $2+\text{i}$; $5+3\text{i}$; $3+6\text{i}$; $1+5\text{i}$

27. Quedaría del siguiente modo:

Sea el complejo: $z = a + b\text{i}$

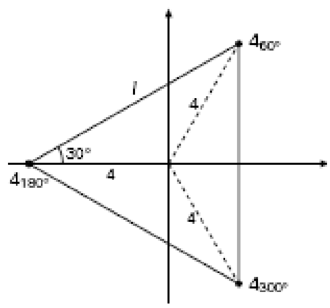
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+b\text{i}} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\text{i} \Rightarrow \begin{cases} \text{Su módulo es: } \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{1}{|z|} \\ \text{Su argumento: } \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{-b}{a} \quad \text{(es el opuesto del argumento de } z\text{)} \end{cases}$$

Gráficamente, el inverso de z se obtiene por una homotecia de razón $K = \dfrac{1}{|z|}$ y ángulo $(-\arg z)$

28. Los vértices de la figura se obtienen a partir vienen de la siguiente ecuación:

$$\sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{64_{180^\circ}} = 4_{\frac{180^\circ+360^\circ K}{3}} = 4_{60^\circ+120^\circ K} \quad \Rightarrow \quad 4_{60^\circ};\ 4_{180^\circ};\ 4_{300^\circ}$$

Calculamos el lado l mediante el teorema del coseno:



$l^2 = 4^2 + 4^2 - 2\cdot 4\cdot 4\cdot \cos 120^\circ \quad \Rightarrow \quad l = 6{,}93 \text{ u}$

$\text{Perímetro} = 3\cdot l = 20{,}79 \text{ u}$

$$\text{Área} = \frac{l\cdot\dfrac{l\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 20{,}78 \text{ u}^2$$

29. La solución queda:

$$z^4 + 4 = 0 \quad \Rightarrow z = \sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4_{180^\circ}} = \sqrt{2}_{\frac{180^\circ+360^\circ K}{4}} = \sqrt{2}_{45^\circ+90^\circ K}$$

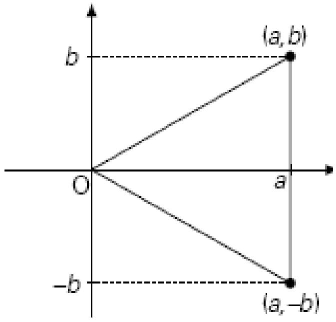
Los vértices son: $\sqrt{2}_{45^\circ} = 1+\text{i}$ $\quad \sqrt{2}_{135^\circ} = -1+\text{i}$ $\quad \sqrt{2}_{225^\circ} = -1-\text{i}$ $\quad \sqrt{2}_{315^\circ} = 1-\text{i}$

30. Sean los complejos $(a+b\text{i})$ y $(a-b\text{i})$. El triángulo que se forma es el de la figura:

Para que sea equilátero se debe cumplir que: $\sqrt{a^2+b^2}=2b$

Para que su área sea $2\sqrt{3}$ se debe cumplir: $\dfrac{2b\cdot a}{2}=2\sqrt{3}$

Resolviendo el sistema obtenemos:



$$\left.\begin{array}{r}\sqrt{a^2+b^2}=2b\\ ab=2\sqrt{3}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}a^2=3b^2\\ ab=2\sqrt{3}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}a=\pm\sqrt{6}\\ b=\pm\sqrt{2}\end{array}$$

Los complejos son: $(\sqrt{6}+\sqrt{2}\,\text{i})$ y $(\sqrt{6}-\sqrt{2}\,\text{i})$
$(-\sqrt{6}-\sqrt{2}\,\text{i})$ y $(-\sqrt{6}+\sqrt{2}\,\text{i})$

31. Los vértices de la figura se obtienen a partir vienen de la siguiente ecuación:

$$\sqrt[6]{-64\,i}=\sqrt[6]{64_{270°}}=2_{\frac{270°+360°K}{6}}=2_{45°+60°K} \Rightarrow 2_{45°};\ 2_{105°};\ 2_{165°};\ 2_{225°};\ 2_{285°};\ 2_{345°}$$

Calculando el valor del área obtenemos: $6\sqrt{3}\,\text{u}^2$.

Unidad 7 – Geometría analítica en el plano

PÁGINA 153

cuestiones iniciales

1. Estudia si los siguientes puntos están alineados:

$A(5, 2)$ $B(3, 3)$ $C(0, 4)$

2. Sea el triángulo de vértices $A(3, 2)$; $B(7, 4)$; $C(5, 6)$. Estudia qué tipo de triángulo es y halla su perímetro y su área.

3. Halla las coordenadas del baricentro del triángulo de vértices $A(0, 0)$; $B(4, 2)$; $C(2, -8)$. Representa las ecuaciones de sus medianas.

4. Determina la ecuación de la recta en los casos siguientes:

a) Pasa por $(-1, 0)$, $m = -3$ b) Pasa por los puntos $(1, 2)$ y $(2, 1)$

SOLUCIONES

1. La ecuación de la recta que pasa por A y B es: $x+2y-9=0$. El punto C no pertenece a la recta pues no verifica la ecuación. Por tanto A, B y C no están alineados.

2. Calculemos la longitud de los lados del triángulo:

$$d(A,B)=\sqrt{20} \qquad d(A,C)=\sqrt{20} \qquad d(B,C)=\sqrt{8}$$

Por lo que el triángulo es isósceles.
El perímetro y el área se calculan del siguiente modo:

$$\text{Perímetro}=\sqrt{20}+\sqrt{20}+\sqrt{8}=4\sqrt{5}+2\sqrt{2}\ \text{u}$$

$$\text{d(B,C)}=\sqrt{8}=2\sqrt{2};\ P \text{ es el punto medio de } BC \Rightarrow P(6,5) \Rightarrow \text{d}(A,P)=3\sqrt{2}$$

$$\text{Área}=\frac{2\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}}{2}=6\ u^2$$

3. El baricentro de un triángulo tiene de coordenadas:

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right) \Rightarrow \text{ En nuestro caso queda } g(2,-2)$$

Las ecuaciones de las medianas quedan:

Desde A al punto medio de $\overline{BC}$ queda: $x+y=0$

Desde B al punto medio de $\overline{AC}$ queda: $2-y-6=0$

Desde C al punto medio de $\overline{AB}$ queda: $x=2$

4. Las ecuaciones pedidas son:

a) $y=-3x-3$ b) $y=-x+3$

PÁGINA 167

ACTIVIDADES

■ Con el fin de que te acostumbres a usar las fases de un modelo, resuelve los siguientes problemas:

1. **Vendimiadores.** Una cuadrilla de vendimiadores tenía que vendimiar dos fincas, una de doble superficie que la otra. Toda la cuadrilla estuvo vendimiando en la finca grande durante medio día. Por la tarde, la mitad de la cuadrilla vendimió en la finca pequeña y la otra mitad en la grande. Al finalizar el día sólo les quedó un poco que vendimiar en la finca pequeña, para lo cual fue necesario que vendimiara un solo vendimiador el día siguiente. ¿Cuántas personas componían la cuadrilla?

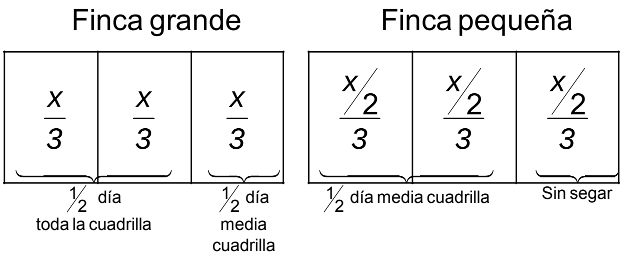
2. **Primos.** Supongamos que X es cualquier número primo mayor que 3. Demuestra que X^2 da de resto 1 cuando se divide por 12.

3. **Tinta de imprenta.** Para numerar las páginas de un libro grande hacen falta 2 989 dígitos. ¿Cuántas páginas tiene el libro?

4. **Tres naipes.** Tres naipes de una baraja están colocados boca arriba en una fila horizontal. A la derecha del rey hay una o dos damas. A la izquierda de una dama, hay una o dos damas. A la izquierda de un corazón, hay una o dos picas. A la derecha de una pica, hay una o dos picas. ¿Puedes decir de qué cartas se trata?

SOLUCIONES

1. Podemos resolver el problema mediante ecuaciones pero es un camino muy complicado. Intentaremos representar la situación:



Superficie finca grande $= x$ Superficie finca pequeña $= x/2$

Las condiciones del problema nos muestran que si toda cuadrilla trabajó durante la mitad del día en la finca grande y sólo la mitad de la cuadrilla el otro medio día. Entonces la mitad de la cuadrilla vendimió la tercera parte de la finca grande en medio día, es decir, $x/3$. Luego en la finca pequeña durante medio día vendimiaron el equivalente a la finca grande, es decir, $x/3 = 2x/6$, luego quedó sin vendimiar $x/6$ de la finca pequeña que la vendimió 1 trabajador al día siguiente.

Si un trabajador vendimia $x/6$ en un día y se vendimiaron el campo grande $3x/3$ más el pequeño $\left(3x/6 - x/6\right)$ todos los trabajadores en 1 día, entonces el primer día se hicieron:

$$\frac{3x}{3}+\left(\frac{3x}{6}-\frac{3x}{6}\right)=\frac{6x}{6}+\frac{2x}{6}=\frac{8x}{6}=8\cdot\left(\frac{x}{6}\right)$$

Es decir, en la cuadrilla había 8 vendimiadores.

2. Hay que ver que $x^2-1=\dot{12}$.

$$x^2-1=(x-1)(x+1) \;\Rightarrow\; \text{Al ser } x \text{ primo} > 3 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x-1=\dot{3} \quad \text{y} \quad x+1=\dot{4} \\ \qquad\qquad \text{o} \\ x-1=\dot{4} \quad \text{y} \quad x+1=\dot{3} \end{cases}$$

En ambos casos, $x^2-1=\dot{3}\cdot\dot{4}=\dot{12}$

3. Hacemos el siguiente diagrama:

Páginas numeradas	$1-9$	$10-99$	$100-999$	$1\ 000-1\ 025$
Dígitos usados	9	180	2 700	100
Total dígitos	9	$180+9$	$180+9+2\ 700=2\ 889$	$2\ 889+100$

En total hacen falta: $2\ 889+100=2\ 989$ dígitos.
100 dígitos son 25 páginas, entonces hacen falta $999+25=1\ 024$ páginas.
El libro tiene 1 024 páginas.

4. Por medio de ensayo y error dirigido se obtiene:

- Con la información referida a los Reyes (*R*) y las Damas (*D*) llegamos a que puede ser *RDD* o *DRD*.

- Con la información referida a los Corazones (*C*) y las Picas (*P*) llegamos a que puede ser *PCP* o *PPC*.

Juntando los resultados obtenidos llegamos a que la solución es: Rey de Picas – Dama de Picas – Dama de Corazones.

PÁGINA 170

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Un vector fijo tiene su origen en el punto $A(1, -4)$ y sus coordenadas son (3, 2). Halla las coordenadas de su extremo. Calcula el módulo del vector.

2. Tres vértices consecutivos de un rectángulo son los puntos de coordenadas (1, 1); (6, 6) y (3, 9). Halla las coordenadas del cuarto vértice.

3. Dados los vectores $\vec{v} = (1, 5)$; $\vec{w} = (-3, 4)$ y $\vec{u} = (5, 12)$, halla:
   a) $|\vec{v}|$, $|\vec{w}|$, $|\vec{u}|$
   b) El coseno del ángulo que forman dos a dos
   c) Los ángulos que forman dos a dos
   d) $\vec{v} + \vec{w} + \vec{u}$ analítica y gráficamente
   e) Un vector normal a $\vec{w}$
   f) $3\vec{v}$
   g) Un vector paralelo a $\vec{v}$

4. Halla el producto escalar $\vec{v} \cdot \vec{w}$ en los siguientes casos:
   a) $|\vec{v}| = 4$; $|\vec{w}| = 6$; $\widehat{(\vec{v}, \vec{w})} = 45°$
   b) $|\vec{v}| = 3$; $\vec{w} = (2, \sqrt{5})$; $\widehat{(\vec{v}, \vec{w})} = 60°$
   c) $\vec{v} = (3, -4)$; $\vec{w} = (-12, -5)$
   d) $\vec{v} = (-3, 4)$; $\vec{w} = (15, -20)$

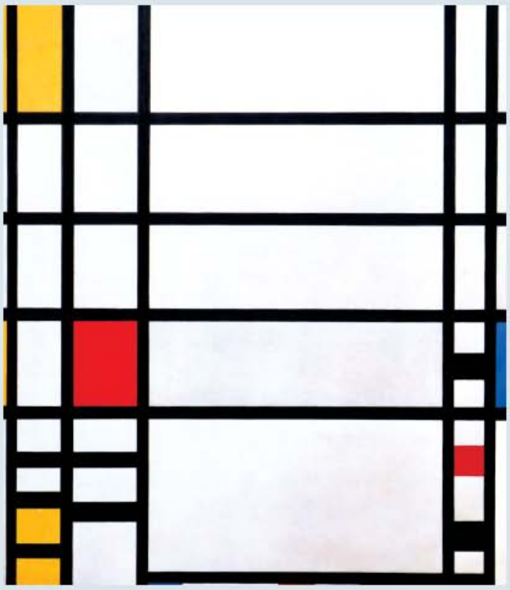
5. Sabiendo que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son unitarios, demuestra que $\vec{a} + \vec{b}$ es ortogonal a $\vec{a} - \vec{b}$.

6. Sean los vectores $\vec{v} = (3, x)$; $\vec{w} = (y, 5)$. Calcula x e y, de manera que ambos vectores sean perpendiculares y $|\vec{w}| = 13$.

7. Dados los vectores $\vec{a} = (1, 5)$ y $\vec{b} = (3, -1)$, halla un vector $\vec{c}$ de manera que se verifique $\vec{c} \cdot \vec{a} = 1$ y $\vec{c} \perp \vec{b}$.

8. Dos vértices consecutivos de un cuadrado son los puntos (3, 0) y (5, 4). Halla las coordenadas de los otros vértices.

9. Halla, en todas las formas que conozcas, las ecuaciones de las rectas en cada uno de los siguientes casos:
   a) Pasa por el punto $A(-2, 2)$ y tiene por vector director $\vec{v} = (2, -3)$.
   b) Pasa por los puntos $P(4, 3)$ y $Q(-2, 4)$.
   c) Pasa por el punto $(3, -1)$ y tiene de pendiente $m = -2$.
   d) Pasa por el origen de coordenadas y tiene 30° de inclinación.
   e) Pasa por el punto $(3, -2)$ y es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.



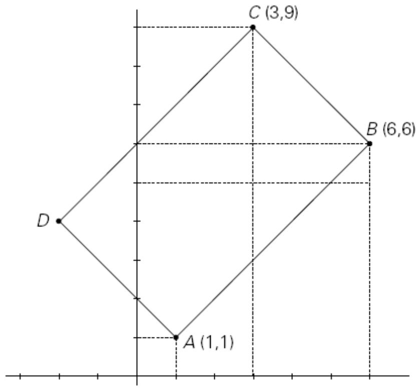
↑ *Trafalgar Square*, del pintor holandés Piet C. Mondrian (1872-1944), cuadro en el que la trama ortogonal de rectas define por completo la composición.

SOLUCIONES

1. El módulo queda:

$\vec{V}_{AB} = (3,2) \;\Rightarrow\; B(4,-2)$ y el módulo quedará $|\vec{V}_{AB}| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$

2. Consideramos el rectángulo ABCD:



$\vec{V}_{AD} = \vec{V}_{BC} = (-3,3)$

Como $A(1,1)$ y $\vec{V}_{AD} = (-3,3) \;\Rightarrow\; \boxed{D(-2,4)}$

3. Quedan del siguiente modo:

a) $|\vec{v}| = \sqrt{26}$; $|\vec{w}| = 5$; $|\vec{u}| = 13$

b) $\cos(\vec{v},\vec{w}) = \dfrac{17}{5\sqrt{26}}$; $\cos(\vec{v},\vec{u}) = \dfrac{65}{13\sqrt{26}}$; $\cos(\vec{w},\vec{u}) = \dfrac{33}{65}$

c) $(\widehat{\vec{v},\vec{w}}) = 48^\circ 10' 47''$; $(\widehat{\vec{v},\vec{u}}) = 11^\circ 18' 36''$; $(\widehat{\vec{w},\vec{u}}) = 59^\circ 29' 23''$

d) $\vec{v} + \vec{w} + \vec{u} = (3,21)$

e) Vector normal a $\vec{w} = (-3,4)$ es $\vec{n} = (4,3)$

f) $3 \cdot \vec{v} = 3 \cdot (1,5) = (3,15)$

g) Un vector paralelo a $\vec{v} = (1,5)$ es $\vec{p} = (1,5)$ ó $\vec{q} = (2,10)$

4. La solución es:

a) $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\vec{v},\vec{w}) = 4 \cdot 6 \cdot \cos 45^\circ = 12\sqrt{2} = 16,97$

b) $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\vec{v},\vec{w}) = 3 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = \dfrac{9}{2} = 4,5$

c) $\vec{v} \cdot \vec{w} = (3,-4) \cdot (-12,-5) = -16$

d) $\vec{v} \cdot \vec{w} = (-3,4) \cdot (15,-20) = -125$

5. La demostración queda:

Como $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son unitarios $\Rightarrow$ $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$

Calculemos el producto escalar de $(\vec{a}+\vec{b})$ por $(\vec{a}-\vec{b})$:

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{b}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$

Al ser su producto escalar nulo, podemos decir que son ortogonales.

6. Quedaría:

$$\left.\begin{matrix} \vec{v}\cdot\vec{w}=0 \\ |\vec{w}|=13 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3y+5x=0 \\ \sqrt{y^2+25}=13 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x=\dfrac{36}{5} \\ y=-12 \end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix} x=-\dfrac{36}{5} \\ y=+12 \end{matrix}}$$

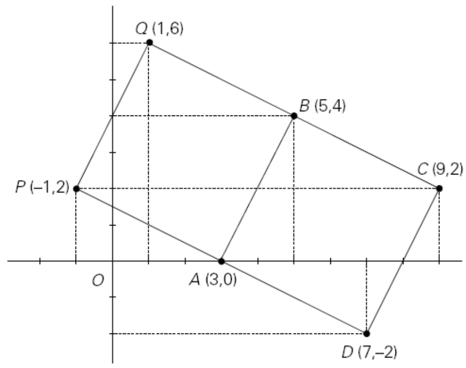
7. Quedaría:

$$\left.\begin{matrix} \vec{c}\cdot\vec{a}=1 \\ \vec{c}\cdot\vec{b}=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+5y=1 \\ 3x-y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{16} \\ y=\dfrac{3}{16} \end{cases} \Rightarrow \text{El vector queda: } \vec{c}=\left(\frac{1}{16},\frac{3}{16}\right)$$

8. Quedaría del siguiente modo:

$\vec{V}_{AB} = (2,4)$

Mediante los vectores perpendiculares y paralelos a $\vec{V}_{AB}$ obtenemos las dos soluciones del problema como se observa en la figura.



9. La tabla queda:

	Ecuación vectorial	Ecuaciones paramétricas	Ecuación continua	Ecuación general	Ecuación explícita
a)	$(x, y) = (-2, 2) + t\,(2, -3)$	$\left.\begin{array}{l} x = -2 + 2t \\ y = 2 - 3t \end{array}\right\}$	$\frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{-3}$	$3x + 2y + 2 = 0$	$y = -\frac{3}{2}x - 1$
b)	$\vec{v} = (-6, 1)$ $(x, y) = (4, 3) + t\,(-6, 1)$	$\left.\begin{array}{l} x = 4 - 6t \\ y = 3 + t \end{array}\right\}$	$\frac{x-4}{-6} = \frac{y-3}{1}$	$x + 6y - 22 = 0$	$y = -\frac{1}{6}x + \frac{22}{6}$
c)	$\vec{v} = (1, -2)$ $(x, y) = (3, -1) + t\,(1, -2)$	$\left.\begin{array}{l} x = 3 + t \\ y = -1 - 2t \end{array}\right\}$	$\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-2}$	$2x + y - 5 = 0$	$y = -2x + 5$
d)	$m = \text{tg } 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $(x, y) = (0, 0) + t\left(\sqrt{3}, 1\right)$	$\left.\begin{array}{l} x = 0 + \sqrt{3}\,t \\ y = 0 + t \end{array}\right\}$	$\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{y}{1}$	$x - \sqrt{3}\,y = 0$	$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$
e)	$\vec{v} = (1, 1)$ $(x, y) = (3, -2) + t\,(1, 1)$	$\left.\begin{array}{l} x = 3 + t \\ y = -2 + t \end{array}\right\}$	$\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{1}$	$x - y - 5 = 0$	$y = x - 5$

■ 10. Dada la recta de ecuación $2x - 6y + 3 = 0$, escríbela en forma continua, paramétrica, vectorial y explícita.

■ 11. Calcula el valor de a para que la recta de ecuación $ax + 3y - 9 = 0$:

a) Pase por el punto (3, 1)

b) Tenga de pendiente $m = -1$

c) Uno de sus vectores sea $\vec{v} = (6, -4)$

■ 12. Halla las ecuaciones de los ejes coordenados y de las bisectrices de cada uno de los cuadrantes.

■ 13. Estudia la posición relativa de cada uno de los siguientes pares de rectas:

a) $\left.\begin{array}{l} r\colon x - 3y + 5 = 0 \\ s\colon 2x - 6y + 9 = 0 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} r\colon 3x + 2y - 12 = 0 \\ s\colon x - y + 7 = 0 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l} r\colon \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{2} \\ s\colon 3x + 2y - 4 = 0 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{l} r\colon x + 2y - 3 = 0 \\ s\colon 2x + 4y - 6 = 0 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{l} r\colon y = 2x - 5 \\ s\colon y = x + 4 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{l} r\colon x - y = 2 \\ s\colon (x, y) = (1, 2) + t\,(3, 3) \end{array}\right\}$

■ 14. Halla un vector director y uno normal a las rectas de ecuaciones:

a) $2x - 5y + 10 = 0$

b) $\left.\begin{array}{l} x = 1 - 2t \\ y = 3t \end{array}\right\}$

c) $y = 4x - 8$

d) $\dfrac{x+2}{3} = y - 4$

■ 15. Calcula el ángulo que forman las rectas r y s en cada uno de los siguientes casos:

a) $\left.\begin{array}{l} r\colon (x, y) = (3, -1) + t\,(1, 4) \\ s\colon (x, y) = (2, -3) + t\,(2, 8) \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} r\colon \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{-3} \\ s\colon \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{2} \end{array}\right\}$

■ 16. Halla el perímetro del triángulo de vértices $A(5, 3)$, $B(6, 2)$, $C(3, 1)$.

■ 17. Halla la distancia del punto $(-2, 0)$ a la recta $3x + 2y + 2 = 0$.

■ 18. Halla el área del cuadrado que tiene dos de sus lados en las rectas $4x - y + 5 = 0$, $8x - 2y + 12 = 0$.

■ 19. Calcula, en cada uno de los casos, las ecuaciones de la recta paralela y perpendicular por el punto que se indica:

a) $y = -2x + 6$; $P(1, 1)$

b) $2x - 4y + 5 = 0$; $P(0, 3)$

c) $x - 2 = \dfrac{y+4}{3}$; $P(0, 0)$

■ 20. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $x - 2y - 4 = 0$, $y = 4x + 5$, y es paralela a la recta $3x + 2y = 0$.

■ 21. Las ecuaciones de dos rectas son $3x - 5y + 2 = 0$ y $6x + my = 1$. Halla el valor de m para que:

a) Las rectas sean paralelas.

b) Las rectas sean perpendiculares.

c) Las rectas sean coincidentes.

d) La segunda recta pase por el punto (6, 5).

■ 22. Halla la ecuación de la recta mediatriz del segmento de extremos $A(1, 2)$ y $B(5, 2)$.

■ 23. La recta de ecuación $4x - 3y = 54$ es mediatriz del segmento AB. Sabiendo que A tiene de coordenadas (1, 0), halla las coordenadas del punto B.

10. Un punto de esa recta es $P\left(0,\frac{1}{2}\right)$. Su pendiente es $m=\frac{2}{6}$ y su vector director $\vec{v}_1=(6,2)$ o $\vec{v}_2=(3,1)$.

Con estos datos obtenemos las ecuaciones:

Ecuación vectorial: $(x,y)=\left(0,\frac{1}{2}\right)+t\,(3,1)$ Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x=0+3t \\ y=\frac{1}{2}+t \end{cases}$

Ecuación continua: $\frac{x-0}{3}=\frac{y-\frac{1}{2}}{1}$ Ecuación explícita: $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}$

11. Para cada valor queda:

a) El punto (3,1) debe verificar la ecuación de la recta $\Rightarrow\ 3a+3-9=0\ \Rightarrow\ \boxed{a=2}$

b) La recta $ax+3y-9=0$ en forma explícita es: $y=\frac{-a}{3}x+3 \Rightarrow\ m=\frac{-a}{3}=-1\ \Rightarrow\ \boxed{a=3}$

c) Uno de sus vectores es $\vec{v}=(6,-4)\ \Rightarrow\ m=\frac{-4}{6}$. Como $m=\frac{-a}{3}=\frac{-4}{6}\ \Rightarrow\ \boxed{a=2}$

12. Ambos ejes quedan:

- Eje OX: Pasa por el punto $O(0,0)$ y uno de sus vectores directores es $\vec{v}=(1,0)$.

  La ecuación será: $\boxed{y=0}$

- Eje OY: Pasa por el punto $O(0,0)$ y uno de sus vectores directores es $\vec{w}=(0,1)$.

  La ecuación será: $\boxed{x=0}$

- Bisectriz 1.^{er} y 3.^{er} cuadrante: Pasa por el punto $O(0,0)$ y forma un ángulo de 45º con el eje OX, es decir: $m=\mathrm{tg}\,45°=1$.

  La ecuación será: $\boxed{y=x}$

- Bisectriz 2.º y 4.º cuadrante: Pasa por el punto $O(0,0)$ y forma un ángulo de 135º con el eje OX, es decir: $m=\mathrm{tg}\,135°=-1$.

  La ecuación será: $\boxed{y=-x}$

13. Las posiciones son:

a) Paralelas.
b) Secantes no perpendiculares.
c) Secantes perpendiculares.
d) Coincidentes.
e) Secantes no perpendiculares.
f) Paralelas.

14. Los vectores en cada caso son:

Vamos a llamar $\vec{v}$ al vector director y $\vec{n}$ al vector normal.

a) $\vec{v}=(5,2)$ y $\vec{n}=(-2,5)$
b) $\vec{v}=(-2,3)$ y $\vec{n}=(3,2)$
c) $\vec{v}=(1,4)$ y $\vec{n}=(-4,1)$
d) $\vec{v}=(3,1)$ y $\vec{n}=(1,-3)$

15. Aplicamos la definición de producto escalar a los dos vectores directores de las rectas en cada uno de los casos:

a) $\overrightarrow{v_r}=(1,4)$ $\overrightarrow{w_s}=(2,8)$ $\Rightarrow$ $\cos(\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{w_s})=\dfrac{\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{w_s}}{|\overrightarrow{v_r}|\cdot|\overrightarrow{w_s}|}=\dfrac{2+32}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{68}}=1$ $\Rightarrow$ $(\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{w_s})=0º$

b) $\overrightarrow{v_r}=(2,-3)$ $\overrightarrow{w_s}=(3,2)$ $\Rightarrow$ $\cos(\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{w_s})=\dfrac{\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{w_s}}{|\overrightarrow{v_r}|\cdot|\overrightarrow{w_s}|}=\dfrac{6-6}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}}=0$ $\Rightarrow$ $(\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{w_s})=90º$

16. Calculamos la longitud de los lados como el módulo de cada vector:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{V}_{AB}=(1,-1)\ \Rightarrow\ |\vec{V}_{AB}|=\sqrt{2}\\ \vec{V}_{AC}=(-2,-2)\ \Rightarrow\ |\vec{V}_{AC}|=\sqrt{8}\\ \vec{V}_{BC}=(-3,-1)\ \Rightarrow\ |\vec{V}_{BC}|=\sqrt{10}\end{array}\right\}\Rightarrow \text{Perímetro}=\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{10}=3\sqrt{2}+\sqrt{10}=7{,}4\ \text{u}$$

17. Queda:

$$\left.\begin{array}{r}P(-2,0)\\ r\equiv 3x+2y+2=0\end{array}\right\}\Rightarrow d(P,r)=\frac{|(-2)\cdot 3+2\cdot 0+2|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{4}{\sqrt{13}}=1{,}11\ \text{u}$$

18. La longitud del cuadrado es la distancia entre las rectas:

$\begin{cases} r \equiv 4x - y + 5 = 0 \\ s \equiv 8x - 2y + 12 = 0 \end{cases}$ Tomando un punto de la recta r $P_r(0,5)$

$$l = d(r,s) = d(P_r, s) = \left| \frac{8 \cdot 0 - 2 \cdot 5 + 12}{\sqrt{8^2 + (-2)^2}} \right| = \frac{2}{\sqrt{68}} \quad \Rightarrow \quad \text{Área} = l^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{68}} \right)^2 = \frac{4}{68} = 0{,}059 \text{ u}^2$$

19. Cada caso queda:

a) Todas las $\parallel$ son de la forma: $y = -2x + K$ y la que pasa por $P(1,1)$ es: $y = -2x + 3$.
Todas las $\perp$ son de la forma: $x - 2y + K = 0$ y la que pasa por $P(1,1)$ es: $x - 2y + 1 = 0$.

b) Todas las $\parallel$ son de la forma: $2x - 4y + K = 0$ y la pedida: $2x - 4y + 12 = 0$
Todas las $\perp$ son de la forma: $4x + 2y + K = 0$ y la pedida es: $4x + 2y - 6 = 0$.

La recta paralela es: $\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{3} \quad \Rightarrow \quad 3x - y = 0.$

La recta perpendicular es: $\frac{x-0}{3} = \frac{y-0}{-1} \quad \Rightarrow \quad x + 3y = 0.$

20. Queda del siguiente modo:

Punto de intersección $\begin{cases} x - 2y - 4 = 0 \\ y = 4x + 5 \end{cases}$ es $P(-2, -3)$

Todas las paralelas a $3x + 2y = 0$ son de la forma $3x + 2y + K = 0$, la que pasa por el punto $P(-2, -3)$ cumple: $-6 - 6 + K = 0 \quad \Rightarrow \quad K = 12$, es decir, la recta pedida es: $3x + 2y + 12 = 0$.

21. Queda del siguiente modo:

a) $m_1 = \frac{-3}{-5}$ y $m_2 = \frac{-6}{m} \Rightarrow$ Si son paralelas: $m_1 = m_2 \Rightarrow \frac{-3}{-5} = \frac{-6}{m} \Rightarrow m = -10$

b) $m_1 = \frac{-3}{-5}$ y $m_2 = \frac{-6}{m} \Rightarrow$ Si son perpendiculares: $m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow \frac{-3}{-5} \cdot \frac{-6}{m} = -1 \Rightarrow m = \frac{18}{5}$

c) No existe ningún valor de m para que sean coincidentes.

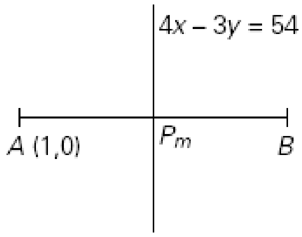
d) $P(6,5) \in 6x + my = 1 \Rightarrow 36 + 5m = 1 \Rightarrow m = -7$

22. La mediatriz del segmento *AB* pasa por el punto medio del segmento *AB*, $P_m(3,2)$ y tiene como vector director el perpendicular al segmento *AB*:

$$\vec{V}_{AB}=(4,0) \Rightarrow \vec{V}_{\perp}=(0,-4) \Rightarrow \text{La recta pedida es: } x-3=0$$

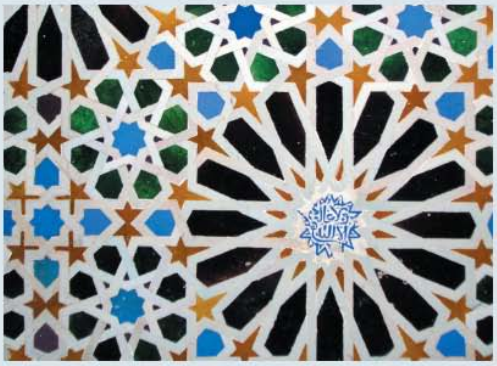
23. Hallamos la recta *AB*, que pasa por *A* y es perpendicular a la recta dada. Donde se corten ambas rectas es el punto medio entre *A* y *B*.

$$\left.\begin{aligned} r_{AB} \equiv 3x+4y-3=0 \\ 4x-3y=54 \end{aligned}\right\} \Rightarrow P_m(9,-6) \Rightarrow B(17,-12)$$



ACTIVIDADES FINALES

24. Halla la ecuación de la mediatriz del segmento que se forma en la recta $2x + 3y - 12 = 0$ cuando esta interseca a los ejes coordenados.



25. Dados los puntos $A(1, 1)$ y $B(3, 2)$ y la recta $x - y + 5 = 0$, halla:

   a) El simétrico del punto A respecto del punto B.

   b) El simétrico del punto B respecto de la recta dada.

26. Halla el simétrico del punto $P(3, 2)$ respecto de la recta $2x + y - 3 = 0$ y demuestra que la distancia de ambos a la recta es la misma.

27. Halla las ecuaciones de las rectas paralelas a $3x + 4y - 1 = 0$ y que disten de ella 3 unidades de longitud.

28. Halla la ecuación de la recta perpendicular a la recta $4x + 3y - 12 = 0$ y que dista 5 unidades de longitud del origen de coordenadas.

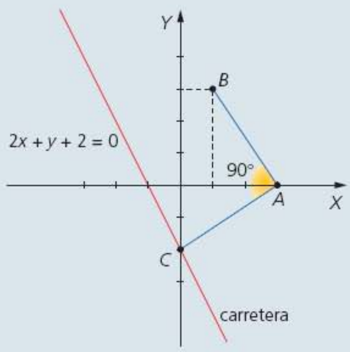
29. Un triángulo rectángulo en A tiene dos vértices en los puntos $A(1, 3)$ y $C(3, 0)$. Halla el vértice B sabiendo que está situado en la recta $2x + y + 2 = 0$.

30. Un triángulo isósceles tiene por lado desigual el segmento que une los puntos $(1, -3)$ y $(3, 1)$. El otro vértice está situado sobre la recta $x + y + 3 = 0$. Halla las coordenadas de este vértice y el área del triángulo.

31. Un triángulo ABC tiene dos vértices en los puntos $A(1, -3)$ y $B(2, 1)$. El tercer vértice está situado en la recta $x + y + 3 = 0$, y el área del triángulo es de 6 unidades cuadradas. Halla las coordenadas del tercer vértice.

32. Desde un punto $A(3, 0)$ se observa, bajo un ángulo recto, el pico más alto de una montaña situado en el punto $B(1, 3)$, y una gasolinera situada en el punto C de la carretera. Determina las coordenadas de la gasolinera, sabiendo que la recta que contiene a la carretera tiene por ecuación $2x + y + 2 = 0$.

33. Un paralelogramo tiene tres vértices en los puntos $(2, 3)$; $(5, 1)$; $(4, 0)$. Halla las coordenadas del cuarto vértice. ¿Cuántas soluciones hay?



34. Los puntos $A(3, 5)$ y $B(7, 1)$ son los vértices consecutivos de un rectángulo $ABCD$. El vértice C está en la bisectriz del cuarto cuadrante. Halla los vértices C y D y el área del rectángulo.

35. Calcula el área del cuadrilátero de vértices $(2, -6)$; $(3, 2)$; $(-5, 1)$; $(-2, -4)$.

36. Un paralelogramo tiene un vértice en el punto $(4, 6)$ y dos lados en las rectas $y = 5x + 2$; $x + 3y + 10 = 0$. Halla los restantes vértices del paralelogramo y su área.

24. El segmento tiene de extremos $A(6,0)$ $B(0,4)$. La mediatriz del segmento *AB* pasa por el punto medio del segmento *AB* y es perpendicular a la recta dada:

$$P_m = (3,2) \Rightarrow \text{ mediatriz}: 3x - 2y - 5 = 0$$

25. La solución queda:

a) El simétrico de *A* respecto a *B* es el punto *A´* de modo que *B* es el punto medio del segmento *AA´*, es decir, *A´*(5,3).

b) Para hallar el simétrico *B´*, del punto *B* respecto a la recta dada hallamos la recta perpendicular a la dada pasando por *B*. En el punto en el que ambas se cortan es el punto medio *P* de *B* y *B´*.

$$\left.\begin{array}{l}\text{recta dada } \equiv x - y + 5 = 0 \\ \text{recta} \perp \text{por B} \equiv x + y - 5 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow P(0,5) \Rightarrow B´(-3,8)$$

26. Hallamos la ecuación de la recta perpendicular a la dada pasando por *P* ; el punto en que se cortan ambas rectas es el punto medio entre *P* y *P´*.

$$\left.\begin{array}{l}x - 2y + 1 = 0 \\ 2x + y - 3 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow P_m(1,1) \Rightarrow P'(-1,0).$$

Veamos que la distancia de *P* y *P´*a la recta $r \equiv 2x + y - 3 = 0$ es igual:

$$d(P,r) = \frac{|2 \cdot 3 + 2 - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \qquad d(P´,r) = \frac{|2 \cdot (-1) + 0 - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

27. Todas las rectas paralelas a la dada tienen la ecuación: $3x + 4y + K = 0$. Basándonos en esto calcularemos el valor de *K* que cumpla las condiciones dadas.
Tomamos un punto de la recta $3x + 4y - 1 = 0 \Rightarrow P(-1,1)$.

$$\frac{|3 \cdot (-1) + 4(1) + K|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3 \Rightarrow \frac{|K + 1|}{5} = 3 \Rightarrow |K + 1| = 15 \Rightarrow \boxed{K = 14} \ \boxed{K = -16}.$$

Hay dos rectas paralelas que disten 3 unidades de la dada y son las rectas de ecuaciones:

$$3x + 4y + 14 = 0 \qquad 3x + 4y - 16 = 0$$

28. Todas las rectas perpendiculares a la dada tienen por ecuación: $3x-4y+K=0$. Calcularemos el valor de K para que cumpla las condiciones del problema. Sea $P(0,0)$ el origen de coordenadas, se ha de cumplir:

$$\left|\frac{3\cdot 0-4\cdot 0+K}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}\right|=5 \Rightarrow \left|\frac{K}{5}\right|=5 \Rightarrow K=\pm 25$$

Las rectas que cumplen las condiciones son:

$$3x-4y+25=0 \qquad\qquad 3x-4y-25=0$$

29. El vértice B es de la forma $B(a,-2-2a)$ por pertenecer a la recta.

Si el triángulo es rectángulo en A $\Rightarrow \vec{V}_{AB} \perp \vec{V}_{AC} \Rightarrow \vec{V}_{AB}\cdot\vec{V}_{AC}=0 \Rightarrow (a-1,-5-2a)\cdot(2,-3)=0$

De aquí se obtiene que $a=-\dfrac{13}{8} \Rightarrow B\left(-\dfrac{13}{8},\dfrac{5}{4}\right)$

30. La solución queda:

- Los vértices $B(1,-3)$ y $C(3,1)$ forman el lado desigual del triángulo isósceles.

El vértice A está situado en el punto de intersección de la recta dada $x+y+3=0$ y de la altura del triángulo que, partiendo de A, va a pasar a la base BC.

Veamos la ecuación de la altura: pasa por el punto medio de BC: $P_m(2,-1)$ y es perpendicular a la base.

$$\vec{V}_{BC}=(2,4) \Rightarrow \vec{V}_{altura}=(-4,2)$$

$$\frac{x-2}{-4}=\frac{y+1}{2} \Rightarrow x+2y=0 \quad \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+2y=0 \\ x+y+3=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{A(-6,3)}$$

- El área del triángulo es:

$$\text{Área}=\frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{matrix} \text{base}=d(B,C)=2\sqrt{5} \\ \text{altura}=d(A,P_m)=4\sqrt{5} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{Área}=\frac{2\sqrt{5}\cdot 4\sqrt{5}}{2}=20 \text{ u}^2$$

31. El vértice C por pertenecer a la recta es $C(a,-3-a)$

$$\text{Área} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \text{base} = d(A,B) = \sqrt{17} \\ \text{altura} = d(C, r_{AB}) = \left| \dfrac{5a-4}{\sqrt{17}} \right| \end{cases}$$

Quedando:

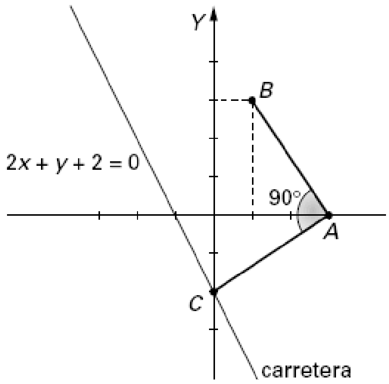
$$6 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{17} \cdot \left| \frac{5a-4}{\sqrt{17}} \right| \Rightarrow |5a-4| = 12 \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{16}{5} \Rightarrow C\left(\dfrac{16}{5}, \dfrac{-31}{5}\right) \\ a = -\dfrac{8}{5} \Rightarrow C\left(\dfrac{-8}{5}, \dfrac{-7}{5}\right) \end{cases}$$

32. La solución queda:

El punto C, por pertenecer a la recta, será de la forma: $C(a,-2a-2)$.

A la vista del dibujo se debe cumplir:

$$\vec{V}_{AB} \cdot \vec{V}_{AC} = 0 \Rightarrow (a-3,-2a-2) \cdot (-2,3) = 0$$
$$\Rightarrow a = 0 \Rightarrow C(0,-2)$$

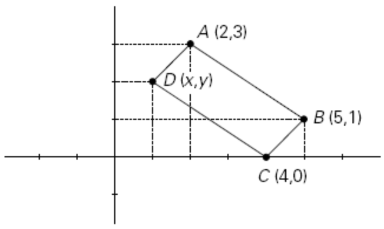


33. Hay tres soluciones:

Denotemos a los vértices dados por $A(2,3), B(5,1), C(4,0)$ y al que hemos de hallar por D. Las soluciones son:

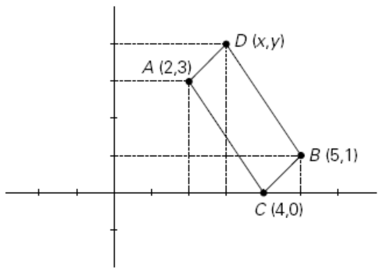
1. Una solución es el paralelogramo del dibujo $ABCD$, en el cual:

$$\vec{V}_{AB} \equiv \vec{V}_{DC} \Rightarrow (3,-2) = (4-x, 0-y)$$
$$\Rightarrow x = 1;\ y = 2 \Rightarrow \text{vértice } \boxed{D(1,2)}$$



2. Otra solución es el paralelogramo del dibujo $ACBD$, en el cual:

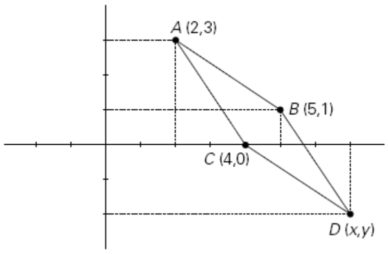
$$\vec{V}_{AC} \equiv \vec{V}_{DB} \Rightarrow (4-2, 0-3) = (5-x, 1-y)$$
$$\Rightarrow x = 3;\ y = 4 \Rightarrow \text{vértice } \boxed{D(3,4)}$$



3. La tercera solución es el paralelogramo del dibujo *ACDB*, en el cual:

$\vec{V}_{AC} \equiv \vec{V}_{BD} \;\Rightarrow\; (2,-3)=(x-5, y-1)$

$\Rightarrow\; x=7;\; y=-2 \;\Rightarrow$ vértice $\boxed{D(7,-2)}$



34. El vértice *C* está en la intersección de la recta perpendicular a *AB* por *B* y la bisectriz del 4º cuadrante.

$\vec{V}_{AB}=(4,-4) \Rightarrow$ la recta perpendicular tiene por vector

$\vec{w}=(4,4)$ y pasa por $B(7,1) \Rightarrow \dfrac{x-7}{4}=\dfrac{y-1}{4} \Rightarrow x-y-6=0$

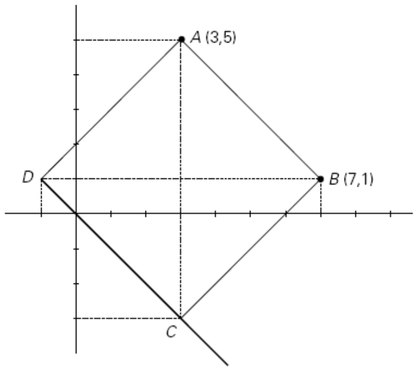
$$\left.\begin{array}{r} x+y=0 \\ x-y-6=0 \end{array}\right\} \Rightarrow C(3,-3)$$

El vector $\vec{V}_{BC}=(-4,-4)$ es paralelo e igual a $\vec{V}_{AD}$,

luego $\boxed{D(-1,1)}$

Área del rectángulo $=$ base$\cdot$altura $= d(B,C)\cdot d(A,B)=$

$\sqrt{4^2+4^2}\cdot\sqrt{4^2+(-4)^2}=32\,\text{u}^2$



35. Calculamos el área del cuadrilátero descomponiendo éste en dos triángulos y sumando las áreas de éstos.

- <u>Área *ABD*</u>. Calculamos la longitud de los lados:

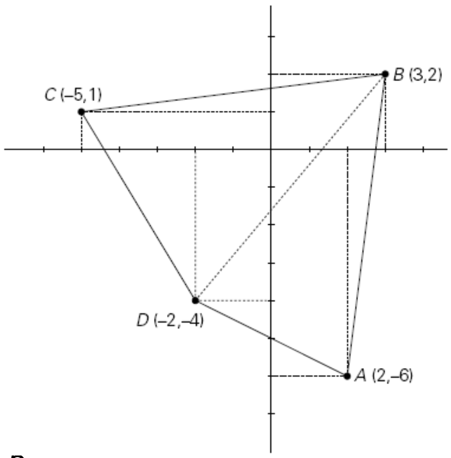
$d(A,B)=8{,}06;\quad d(B,D)=7{,}81;\quad d(A,D)=4{,}47;$

Área $=\sqrt{10{,}17\cdot(10{,}17-8{,}06)\cdot(10{,}17-7{,}81)\cdot(10{,}17-4{,}47)}=17$

- <u>Área *BCD*</u>. Calculamos la longitud de los lados:

$d(B,D)=7{,}81;\quad d(B,C)=8{,}06;\quad d(D,C)=5{,}83;$

Área $=\sqrt{10{,}85\cdot(10{,}85-8{,}06)\cdot(10{,}85-7{,}81)\cdot(10{,}85-5{,}83)}=21{,}5$

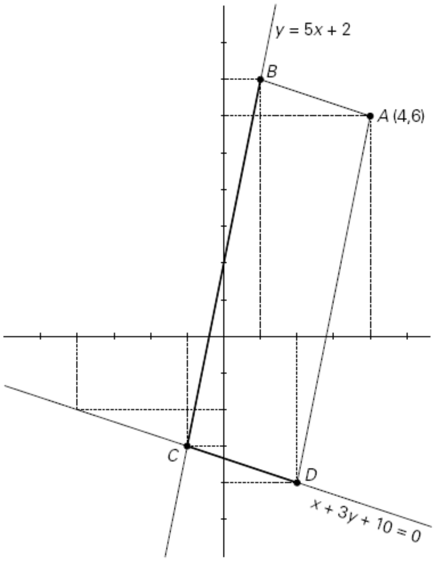


La solución puede expresarse como suma de los valores anteriores:

$\boxed{\text{Área del cuadrilátero}=38{,}5\,\text{u}^2}$

36. Los vértices del paralelogramo buscado son: $A(4,6)$; el punto B es el punto en el cual se corta la recta $y=5x+2$ y la paralela a $x+3y+10=0$, pasando por $A(4,6)$.

Es decir:



$$\left.\begin{array}{l} y=5x+2 \\ x+3y-22=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{B(1,7)}$$

$$\left.\begin{array}{l} y=5x+2 \\ x+3y+10=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{C(-1,-3)}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+3y+10=0 \\ y=5x-14 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{D(2,-4)}$$

$$\boxed{\text{Área} = 32\ \text{u}^2}$$

Unidad 8 – Lugares geométricos. Cónicas

PÁGINA 175

cuestiones iniciales

1. Como seguramente recordarás de cursos anteriores, las cónicas se obtienen al cortar una superficie cónica con diferentes planos. Explica cómo debes hacer los cortes para obtener cada una de ellas.

2. Si cortas un cilindro por un plano paralelo a la base, ¿qué figura obtienes? ¿y si el plano es oblicuo? ¿tiene alguna similitud esta figura con la órbita de la Tierra en torno al Sol?

3. Halla las coordenadas del circuncentro del triángulo de vértices $A(0, 3)$; $B(2, 1)$; $C(-2, 1)$.

4. Encuentra la curva resultante de realizar el siguiente ejercicio: dibujamos dos semirrectas formando un ángulo agudo. Marcamos diez divisiones iguales en cada una de ellas, y unimos el punto 1 de una con el 10 de la otra, el 2 con el 9, el 3 con el 8… y el 10 con el 1.

SOLUCIONES

1. La elipse es una cónica obtenida al cortar una superficie cónica por un plano oblicuo al eje y que corte a todas las generatrices.

   La hipérbola es una cónica obtenida al cortar una superficie cónica por un plano oblicuo al eje, paralelo a dos generatrices y que corte a todas las demás.

   La parábola es una cónica obtenida al cortar una superficie cónica por un plano oblicuo al eje, paralelo a una generatriz y que corte a todas las demás.

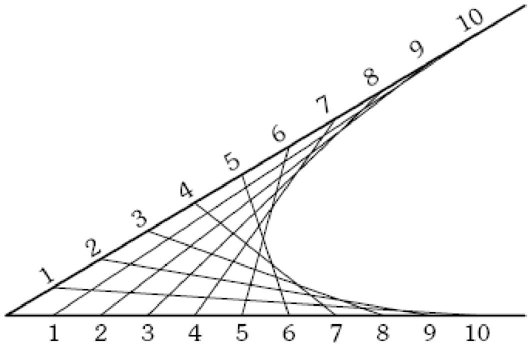
2. Si se corta por un plano paralelo a la base se obtiene una circunferencia. Si el corte es por un plano oblicuo se obtiene una elipse.

3. El circuncentro es el punto de corte de las mediatrices.

   Hallamos dos mediatrices:

$$\left.\begin{array}{l}\text{mediatriz lado } AB \ \Rightarrow \ x-y+1=0 \\ \text{mediatriz lado } AC \ \Rightarrow \ x+y-1=0\end{array}\right\} \text{Circuncentro } (0,1)$$

4. Como puede observarse el dibujo, la curva obtenida es una parábola.



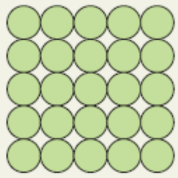
PÁGINA 191

ACTIVIDADES

■ Utiliza esta estrategia en la resolución de los siguientes problemas:

1. **Un paso difícil.** En la subida a un pico de montaña hay que pasar por un sendero muy estrecho en el que resulta imposible que se crucen dos personas, a excepción de un lugar al lado del camino en el que hay una pequeña cueva donde tan sólo cabe una persona. Un fin de semana en el que suben muchos montañeros, coinciden dos grupos. Uno de ellos, compuesto por dos montañeros, está subiendo al pico, mientras el otro, compuesto por tres, está bajando. ¿Cómo puede organizarse el paso de los montañeros para que cada grupo pueda seguir su camino sin que ninguno tenga que retroceder?

2. **Una abeja golosa.** Sobre una mesa hay 25 monedas, cada una de las cuales contiene una gota de miel, colocadas como indica la figura. Viene volando una abeja y se posa sobre una de las monedas para comerse la gota de miel. Como es muy golosa, quiere comerse todas las gotas, pero para ello debe pasar de una moneda a otra y no pisar dos veces una misma moneda. ¿Podrá hacerlo?



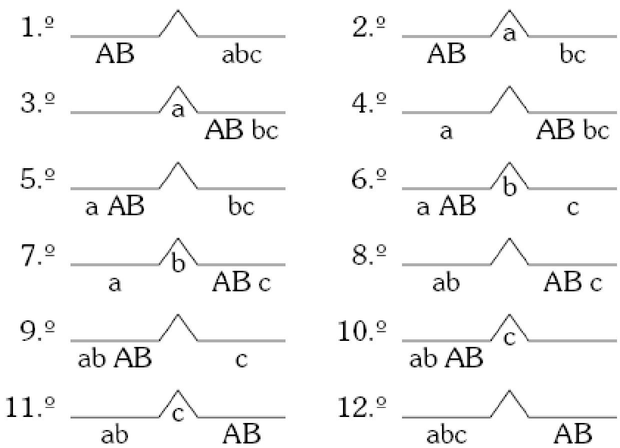
3. **La magia de los números.** Toma un número cualquiera de tres cifras diferentes, por ejemplo, 472. Dale la vuelta: 274. Resta el menor del mayor: 472 – 274 = 198. Invierte este número: 891. Suma los dos últimos y obtienes:

$$198 + 891 = 1\,089$$

¿Ocurre lo mismo con cualquier número de tres cifras distintas?

SOLUCIONES

1. Los pasos a seguir son los siguientes, llamando *AB* a los montañeros que suben y *abc* a los que bajan.

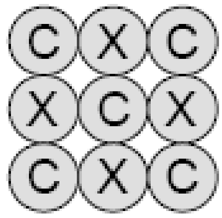


2. Señalamos las monedas con C y X.

- Consideramos el caso de que sólo tengamos 9 monedas.

En este caso hay 5 caras C y 4 cruces X.
Si la abeja parte de una moneda marcada con C, puede hacer el recorrido:

CXCXCXCXC



Pero si parte de una moneda marcada con X, no puede:
XCXCXCXC… falta una C.

- En nuestro caso hay 13 caras C y 12 cruces X.

Si la abeja parte de una moneda marcada con C, es posible el recorrido, pero si la abeja parte de una moneda marcada con X no es posible.

3. La solución queda:

Sea el número inicial $xyz \Rightarrow (100x+10y+z)-(100z+10y+x)=100(x-z)+(z-x)$

Si $x>z \;\Rightarrow\; z-x<0 \;\Rightarrow$ hay que escribir la expresión anterior de la forma:

$$(x-z-1)100+100+(z-x)=(x-z-1)100+9\cdot 10+(10+z-x)$$

La 1.ª cifra de este número es: $x-z-1$.

La 2.ª cifra de este número es: 9.

La 3.ª cifra de este número es: $10+z-x$.

Observamos que $(x-z-1)+(10+z-x)=9$, es decir, la 1ª + 3ª siempre da 9 y la 2ª también da 9. Luego siempre se cumple el resultado del problema.

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano que equidisten de $A(-7, 2)$ y $B(12, 2)$.

2. Determina el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la razón de distancias a los puntos $A(-2, 1)$ y $B(1, -2)$ sea igual a $\frac{3}{2}$.

3. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al punto $A(1, -2)$ es doble de su distancia a la recta $x + y - 2 = 0$.

4. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano que equidisten de las rectas $x + 3y - 3 = 0$, $3x + y + 2 = 0$.

5. Determina las ecuaciones de las circunferencias que cumplan las condiciones siguientes:
   a) Tiene por centro el punto $(2, 0)$ y radio 3.
   b) Tiene por centro el punto $(-1, 2)$ y pasa por el punto $(3, -1)$.
   c) Su diámetro es el segmento de extremos $(3, 4)$ y $(-3, -4)$.
   d) Tiene por centro el punto $(1, 4)$ y es tangente a la recta $2x - y = 5$.
   e) Pasa por los puntos $A(1, 3)$, $B(0, -1)$ y $C(-4, 1)$.
   f) Pasa por los puntos $P(1, 6)$ y $Q(5, 4)$ y tiene su centro en la recta $4x - y - 3 = 0$.

↑ Busto de Arquímedes.

6. Dada la circunferencia C: $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$:
   a) Determina su centro y su radio.
   b) Obtén la ecuación de la recta tangente a esa circunferencia en el punto $P(4, 0)$.
   c) Encuentra la ecuación de la circunferencia concéntrica con C y que es tangente a la recta de ecuación $2x - y + 2 = 0$.

7. Dada la recta $4x - 3y + 20 = 0$, halla la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(2, 1)$, por su simétrico respecto de la recta dada y por el origen de coordenadas.

8. Encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $P(4, -2)$ y es tangente a los ejes coordenados.

9. Dadas las circunferencias $\begin{cases} x^2 + y^2 + 18x - 36 = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x - 36 = 0 \end{cases}$, halla:
   a) La ecuación del eje radical.
   b) La potencia del centro de la segunda respecto de la primera.

10. Sin resolver el sistema, determina si la recta $2x - 3y + 1 = 0$ es exterior, secante o tangente a la circunferencia $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$. Razónalo.

11. Halla los focos, los semiejes y la excentricidad de las siguientes elipses:
    a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ b) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{64} = 1$ c) $2x^2 + 3y^2 = 108$ d) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

12. Halla las ecuaciones de las tangentes y las normales a la elipse $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{25} = 1$ en los puntos de abscisa $x = 4$.

1. Queda del siguiente modo:

- Sea $P(x,y)$ un punto genérico del lugar geométrico buscado. Dicho punto debe cumplir:

$$d(P,A)=d(P,B)$$

De donde:

$$\sqrt{(x+7)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-12)^2+(y-2)^2}$$

Elevando ambos miembros al cuadrado y operando obtenemos:

$$38x-95=0$$

que es el lugar geométrico buscado.

- Podíamos haber hecho el problema viendo que esta definición de lugar geométrico se ajusta a la mediatriz del segmento *AB*.

2. La solución queda:

- Sea $P(x,y)$ un punto genérico del lugar geométrico buscado. Dicho punto debe cumplir:

$$\frac{d(P,A)}{d(P,B)}=\frac{3}{2}$$

Expresando las distancias en coordenadas cartesianas y operando se obtiene la siguiente ecuación del lugar geométrico:

$$5x^2+5y^2-34x-28y+25=0$$

Este lugar geométrico es la circunferencia de centro $\left(\frac{17}{5},\frac{14}{5}\right)$ y radio $\sqrt{\frac{72}{5}}$.

3. Sea $P(x,y)$ un punto genérico del lugar geométrico buscado. El desarrollo de la relación $d(P,A)=2d(P,r)$, nos conduce a la ecuación:

$$x^2+y^2+4xy-6x-12y+3=0$$

La ecuación anterior es una hipérbola.

4. Sea $P(x,y)$ un punto genérico del lugar geométrico buscado. Debe verificar: $d(P,r)=d(P,s)$, es decir:

$$\left|\frac{x+3y-3}{\sqrt{1^2+3^2}}\right|=\left|\frac{3x+y+2}{\sqrt{3^2+1^2}}\right|$$

El lugar geométrico buscado son las rectas de ecuaciones:

$$2x-2y+5=0$$
$$4x+4y-1=0$$

Estas rectas son las bisectrices de los ángulos que forman las rectas dadas.

5. Queda del siguiente modo:

a) La circunferencia tiene de ecuación: $(x-2)^2+(y-0)^2=3^2$ o bien desarrollando obtenemos la forma siguiente : $x^2+y^2-4x-5=0$.

b) La circunferencia tiene por centro el punto $C\left(-1,2\right)$ y por radio $r=\sqrt{4^2+\left(-3\right)^2}=5$. Por tanto su ecuación es: $(x+1)^2+(y-2)^2=25$.

c) La circunferencia tiene por centro el punto medio de los extremos del diámetro $C\left(0,0\right)$ y por radio $r=5$. Su ecuación es: $x^2+y^2=25$.

d) La circunferencia tiene por centro el punto $C\left(1,4\right)$ y por radio $r=d(C,\text{recta tangente})=\frac{7}{\sqrt{5}}$.

Por tanto su ecuación es: $(x-1)^2+(y-4)^2=\left(\frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2$.

La circunferencia buscada tendrá por centro el circuncentro del triángulo de vértices *ABC*. Para hallar el circuncentro hallamos dos mediatrices de este triángulo y el punto en que se cortan:

$$\left.\begin{array}{l}\text{mediatriz } AB \;\Rightarrow\; 2x+8y-9=0\\ \text{mediatriz } BC \;\Rightarrow\; 2x-y+4=0\end{array}\right\}$$

$$\text{Centro}\left(-\frac{23}{18},\frac{13}{9}\right)\quad \text{Radio}=2,76$$

La ecuación de la circunferencia es: $\left(x+\frac{23}{18}\right)^2+\left(y-\frac{13}{9}\right)^2=(2,76)^2$

e) Su centro estará en el punto de intersección de la recta dada con la mediatriz del segmento *PQ*:

$$\left.\begin{array}{r}\text{mediatriz } PQ \;\Rightarrow\; 2x-y-1=0\\ \text{recta dada} \;\Rightarrow\; 4x-y-3=0\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{Centro } (1,1)\\ \text{radio}=d(C,P)=5\end{array}$$

La ecuación de la circunferencia es: $(x-1)^2+(y-1)^2=25$

6. Las soluciones quedan:

a) La ecuación de esta circunferencia se puede escribir en la forma: $(x-2)^2+(y+1)^2=5$. Por tanto su centro es $C(2,-1)$ y su radio es $r=\sqrt{5}$.

b) La recta tangente en el punto $P(4,0)$ pasará por el punto *P* y es perpendicular a la recta que pasa por *C* y *P*, por tanto su ecuación es: $2x+y-8=0$.

c) La circunferencia concéntrica con *C* tendrá el mismo centro que ésta, es decir, el punto $C(2,-1)$ y su radio es la distancia del centro a la recta tangente, $r=\frac{7}{\sqrt{5}}$. Su ecuación será de la forma: $(x-2)^2+(y+1)^2=\frac{49}{5}$.

7. El simétrico de $P(2,1)$ respecto a la recta dada es el punto $Q(-6,7)$. La ecuación de la circunferencia que pasa por $P(2,1)$, $Q(-6,7)$ y el origen $O(0,0)$ tiene por centro el circuncentro del triángulo de vértices *PQO* y por radio la distancia desde el centro a uno de los vértices, es decir:

$$\text{Centro}\left(-\frac{5}{4},5\right) \quad \text{Radio}=\frac{5\sqrt{17}}{4} \quad \text{cuya ecuación es} \quad \left(x+\frac{5}{4}\right)^2+(y-5)^2=\left(\frac{5\sqrt{17}}{4}\right)^2$$

8. La circunferencia tangente a los ejes coordenados tendrá por centro $C(a,-a)$ y su radio valdrá a unidades. Como ha de pasar por el punto *P* dado, podemos escribir:

$$d(C,P)=\text{radio}=\sqrt{(a-4)^2+(-a+2)^2}=a$$

Operando obtenemos dos circunferencias:

$$C_1 \equiv \text{centro}(2,-2) \text{ y radio}=2 \text{ cuya ecuación queda}: (x-2)^2+(y+2)^2=4$$
$$C_2 \equiv \text{centro}(10,-10) \text{ y radio}=10 \text{ cuya ecuación queda}: (x-10)^2+(y+10)^2=100$$

9. La solución es:

a) El eje radical es la recta $x=0$.

b) La potencia pedida es -52.

10. Esta circunferencia tiene por centro el punto $C(1,2)$ y por radio 1 unidad.

Hallamos la distancia del centro a la recta dada y obtenemos: $d(C,\text{recta})=\frac{3}{\sqrt{13}}=0,83<\text{radio}$

Por tanto, como lo distancia del centro a la recta dada es menor que el radio, la recta dada es secante a la circunferencia.

11. En cada uno de los casos queda:

a) Focos: $F(\sqrt{7},0)$ $F'(-\sqrt{7},0)$ Semiejes: $a=4$ $b=3$ Excentricidad: $e=\dfrac{\sqrt{7}}{4}=0,6614$

b) Focos: $F(0;6,25)$ $F'(0;-6,25)$ Semiejes: $a=8$ $b=5$

Esta elipse tiene como eje mayor el OY Excentricidad: $e=\dfrac{6,25}{8}=0,781$

c) Escribimos la ecuación reducida: $\dfrac{x^2}{54}+\dfrac{y^2}{36}=1$

Focos: $F(4,24;0)$ $F'(-4,24;0)$ Semiejes: $a=7,35$ $b=6$ Excentricidad: $e=0,58$

d) Esta elipse tiene como eje mayor el OY

Focos: $F(0,4)$ $F'(0,-4)$ Semiejes: $a=5$ $b=3$ Excentricidad: $e=0,8$

12. Hallamos las rectas pedidas en los puntos $P(4;4,71)$ y $Q(4;-4,71)$.

Las ecuaciones de las rectas tangentes son: $\begin{cases} \text{Recta tangente en } P\text{: } & y-4,71=-0,147(x-4) \\ \text{Recta tangente en } Q\text{: } & y+4,71=-0,147(x-4) \end{cases}$

Las ecuaciones de las rectas normales son: $\begin{cases} \text{Recta normal en } P\text{: } & y-4,71=\dfrac{1}{0,147}(x-4) \\ \text{Recta normal en } Q\text{: } & y+4,71=\dfrac{1}{0,147}(x-4) \end{cases}$

PÁGINA 195

■ 13. Averigua las ecuaciones reducidas de las elipses de eje mayor en OX que cumplan las condiciones siguientes:

a) La distancia focal es 3 cm y el semieje menor 4 cm.

b) Pasa por el punto $(6, 4)$ y el semieje mayor es 10.

c) Pasa por el punto $(3, 4)$ y su excentricidad es $\frac{3}{5}$.

■ 14. Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a los puntos $(12, 0)$ y $(-12, 0)$ es 26 unidades. ¿Qué cónica obtienes? Halla sus elementos.

■ 15. Halla la ecuación reducida de la elipse que pasa por los puntos $(2, 0)$ y $\left(1, \frac{1}{3}\right)$. Encuentra las ecuaciones de las tangentes en esos puntos.

■ 16. Halla los focos, los semiejes, la excentricidad y las asíntotas de las hipérbolas siguientes:

a) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ b) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$ c) $4x^2 - y^2 = 4$ d) $x^2 - 4y^2 = 9$

■ 17. Si la ecuación de una hipérbola es $xy = 32$, ¿cuáles son las ecuaciones de sus asíntotas? ¿y las de los ejes de la cónica? ¿Cuáles son las coordenadas de los focos?

■ 18. ¿Cuánto ha de valer a para que $ax^2 - 9y^2 = 4$ represente una hipérbola equilátera? Halla la ecuación del semieje.

■ 19. Dibuja la hipérbola $2x^2 - y^2 = 9$ previo cálculo de vértices, focos y asíntotas. Halla las ecuaciones de la tangente y la normal en el punto de la hipérbola de abscisa 3 y ordenada positiva.

■ 20. Halla las ecuaciones de las hipérbolas de focos en OX que cumplan las siguientes condiciones:

a) Tiene un vértice en el punto $(6, 0)$ y una de sus asíntotas es la recta $4x - 3y = 0$.

b) Pasa por los puntos $(3, 0)$ y $(5, -3)$.

c) Pasa por el punto $(12\sqrt{2}, 5)$ y su distancia focal es 26 unidades.

d) Pasa por el punto $P(-10, 4)$ y su excentricidad vale $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

■ 21. Halla las ecuaciones de las parábolas sujetas a las siguientes condiciones:

a) Tiene por foco el punto $(0, 2)$ y por directriz la recta $y + 4 = 0$.

b) Tiene por vértice el punto $(3, 4)$ y por directriz la recta $x = 0$.

c) Tiene por vértice el punto $(2, -4)$, por eje la recta $x = 2$ y pasa por el punto $A(8, -7)$.

■ 22. Halla la ecuación de la parábola de eje paralelo a OX y que pasa por los puntos $P(6, 1)$, $Q(-2, 3)$ y $R(16, 6)$.

■ 23. Halla el eje, la directriz, el foco y el vértice de la parábola $y = x^2 + 2x - 15$.

■ 24. Halla las ecuaciones de la tangente a la parábola $y = x^2 - 3x + 3$ en los puntos en que su ordenada es igual a su abscisa.

■ 25. Halla los elementos de cada una de las siguientes parábolas y represéntalas:

a) $y^2 + 6x + 12 = 0$ b) $x^2 - 4x - 4y = 8$ c) $y^2 + 6y - 2x + 9 = 0$

13. La ecuación de la elipse pedida se presenta de la misma forma: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Imponiendo las condiciones dadas obtenemos:

a) $c=\frac{3}{2};\ \ b=4\ \ \Rightarrow\ \ a^2=\frac{73}{4}$ donde la ecuación queda: $\frac{x^2}{\frac{73}{4}}+\frac{y^2}{16}=1$

b) $\left.\begin{array}{r}\frac{36}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1\\ a=10\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \begin{array}{l}a^2=100\\ b^2=25\end{array}$ donde la ecuación queda: $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$

c) $\left.\begin{array}{r}\frac{9}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1\\ \frac{c}{a}=\frac{3}{5}\\ a^2=b^2+c^2\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \begin{array}{l}a^2=34\\ b^2=\frac{544}{25}\end{array}$ donde la ecuación queda: $\frac{x^2}{34}+\frac{y^2}{\frac{544}{25}}=1$

14. El lugar geométrico buscado es una elipse de eje mayor OX y centrada en el origen de coordenadas, de la que conocemos $c=12$; $2a=26$. Por tanto:

$$a^2=b^2+c^2\ \ \Rightarrow\ \ 13^2=b^2+12^2\ \Rightarrow\ b^2=25\ \ \Rightarrow\ \text{La elipse queda: } \frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$$

15. Suponiendo que la elipse tiene como eje mayor OX, su ecuación es de la forma: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Obligándola a pasar por los puntos dados obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r}\frac{4}{a^2}=1\\ \frac{1}{a^2}+\frac{1}{9b^2}=1\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \begin{array}{l}a^2=4\\ b^2=\frac{4}{27}\end{array}\ \Rightarrow\ \text{La elipse queda: } \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{\frac{4}{27}}=1$$

16. Queda del siguiente modo:

a) $a=6;\ b=8;\ c=10$

Focos: $(10,0)\quad(-10,0)$ Semiejes: $a=6;\quad b=8$

Excentricidad: $e=\frac{10}{6}=1{,}7$ Asíntotas: $y=\frac{4}{3}x;\quad y=-\frac{4}{3}x$

b) $a=5;\ b=2;\ c=\sqrt{29}$

Focos: $(\sqrt{29},0)\quad(-\sqrt{29},0)$ Semiejes: $a=5;\quad b=2$

Excentricidad: $e=1{,}08$ Asíntotas: $y=\frac{2}{5}x;\quad y=-\frac{2}{5}x$

c) $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{4}=1\ \Rightarrow\ a=1;\quad b=2;\quad c=\sqrt{5}$

Focos: $(\sqrt{5},0)\quad(-\sqrt{5},0)$ Semiejes: $a=1;\quad b=2$

Excentricidad: $e=\sqrt{5}=2{,}24$ Asíntotas: $y=2x;\quad y=-2x$

d) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{\frac{9}{4}}=1\ \Rightarrow\ a=3;\quad b=\frac{3}{2};\quad c=\sqrt{\frac{45}{4}}=3{,}35$

Focos: $(3{,}35;0)\quad(-3{,}35;0)$ Semiejes: $a=3;\quad b=\frac{3}{2}$

Excentricidad: $e=1{,}12$ Asíntotas: $y=\frac{1}{2}x;\quad y=-\frac{1}{2}x$

17. La ecuación de esta hipérbola corresponde a una hipérbola equilátera referida a sus asíntotas. Sus asíntotas son: $y=0;\ x=0$. Sus ejes $y=x;\ y=-x$.

Todo queda:

$$\frac{a^2}{2}=32\ \Rightarrow\ a^2=64\ \Rightarrow\ c^2=128\ \Rightarrow\ \text{Sus focos son}: (\sqrt{128},0)\ \ (-\sqrt{128},0)$$

18. Para que represente una hipérbola equilátera, $a=9$. El semieje vale $2/3$, puesto que la ecuación es: $\frac{x^2}{\frac{4}{9}}-\frac{y^2}{\frac{4}{9}}=1$.

19. La ecuación reducida de esta hipérbola es: $\dfrac{x^2}{\frac{9}{2}}-\dfrac{y^2}{9}=1$

Vértices: $\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}},0\right)$ $\left(-\dfrac{3}{\sqrt{2}},0\right)$ Focos: $(3,67;0)$ $(-3,67;0)$

Asíntotas son las rectas de ecuaciones: $y=\sqrt{2}x$; $y=-\sqrt{2}x$

Las ecuaciones de la tangente y normal en el punto $(3,3)$ son, respectivamente:

$$y=2x-3 \qquad y=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$$

20. La ecuación de la elipse pedida se presenta de la misma forma: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Imponiendo las condiciones dadas obtenemos:

a) $a=6$; $b=8$ $\Rightarrow$ donde la ecuación queda: $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{64}=1$

b) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{9}{a^2}=1\\ \dfrac{25}{a^2}-\dfrac{9}{b^2}=1\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}a^2=9\\ b^2=\dfrac{81}{16}\end{array}\Rightarrow$ donde la ecuación queda: $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{16y^2}{81}=1$

c) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{288}{a^2}-\dfrac{25}{b^2}=1\\ c=13\Rightarrow a^2+b^2=169\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}a^2=144\\ b^2=25\end{array}\Rightarrow$ donde la ecuación queda: $\dfrac{x^2}{144}-\dfrac{y^2}{25}=1$

d) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{100}{a^2}-\dfrac{16}{b^2}=1\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\\ a^2+b^2=c^2\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}a^2=36\\ b^2=9\end{array}\Rightarrow$ donde la ecuación queda: $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{9}=1$

21. Las parábolas quedan del siguiente modo:

a) Esta parábola tiene por eje el eje OY y por vértice el punto $V(0,-1)$. Además, la distancia $d(V,F)=p/2$ $\Rightarrow$ $p=6$. La ecuación de la parábola puede representarse del siguiente modo: $(x-0)^2=12(y+1)$ $\Rightarrow$ $x^2-12y-12=0$.

b) Esta parábola tiene por eje la recta $y=4$ y el parámetro p vale 6, pues ocurre que: $\frac{p}{2}=d(V,\text{directriz}) \Rightarrow \frac{p}{2}=3 \Rightarrow p=6.$

La ecuación de la parábola queda: $(y-4)^2=12(x-3) \Rightarrow y^2-8y-12x+52=0$.

c) La ecuación de todas las parábolas que tienen por vértice el punto $V(2,-4)$ y por eje la recta $x=2$ es de la forma: $(x-2)^2=2p(y+4)$.

Obligándola a que pase por el punto $A(8,-7)$, dado que obtenemos $p=-6$, la ecuación final quedará: $(x-2)^2=-12(y+4) \Rightarrow x^2-4x+12y+52=0.$

22. Todas las parábolas de eje paralelo a OX tienen por ecuación $(y-b)^2=2p(x-a)$. Obligándola a que pase por los puntos dados obtenemos la ecuación:

$$\left.\begin{array}{l}(1-b)^2=2p(6-a)\\(3-b)^2=2p(-2-a)\\(6-b)^2=2p(16-a)\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}a=-2\\b=3\\p=\frac{1}{4}\end{array} \Rightarrow \text{La parábola queda es}:(y-3)^2=\frac{1}{2}(x+2) \Rightarrow x=2y^2-12y+16$$

23. La ecuación de esta parábola se puede escribir de la forma: $(x+1)^2=y+16$. De esta expresión se pueden deducir los demás elementos:

Eje: $x=-1$ Directriz: $y=-\frac{65}{4}$

Vértice: $V(-1,-16)$ Foco: $F\left(-1,-\frac{63}{4}\right)$

24. Los puntos con igual abscisa que ordenada los hallamos resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l}y=x^2-3x+3\\y=x\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}P(1,1)\\Q(3,3)\end{array}$$

La recta tangente en $P(1,1)$ tiene por ecuación: $y-1=-1(x-1) \Rightarrow y=-x+2$

La recta tangente en $Q(3,3)$ tiene por ecuación: $y-3=3(x-3) \Rightarrow y=3x-6$

25. Transformando cada una de estas ecuaciones en su correspondiente obtenemos los elementos:

a) $y^2+6y+12=0 \quad \Rightarrow \quad y^2=-6(x+2)$

Eje : $y=0$ Vértice : $V(-2,0)$ Foco : $F\left(-\frac{7}{2},0\right)$ Directriz : $x=-\frac{1}{2}$

b) $x^2-4x-4y=8 \quad \Rightarrow \quad (x-2)^2=4(y+3)$

Eje : $x=2$ Vértice : $V(2,-3)$ Foco : $F(2,-2)$ Directriz : $y=-4$

c) $y^2+6y-2x+9=0 \quad \Rightarrow \quad (y+3)^2=2(x-0)$

Eje : $y=-3$ Vértice : $V(0,-3)$ Foco : $F\left(\frac{1}{2},-3\right)$ Directriz : $x=-\frac{1}{2}$

ACTIVIDADES FINALES

26. Halla los puntos de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 = 40$ con los siguientes elementos:
    a) La recta $x - 2y + 2 = 0$
    b) La elipse $9x^2 + 16y^2 = 25$
    c) La hipérbola $x^2 - 25y^2 = 25$
    d) La hipérbola $xy = 20$

27. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan del punto $P(2, -3)$ y de la recta $x - 2 = 0$. ¿Qué cónica obtienes?

28. Determina la ecuación de la circunferencia en cada uno de los siguientes apartados:
    a) Es tangente a las rectas $x + 2 = 0$, $y + 2 = 0$ y pasa por el punto $P(0, 7)$.
    b) Pasa por el punto $A(0, 8)$ y es tangente en el origen de coordenadas a la bisectriz del segundo cuadrante.

29. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a los puntos $(2, 1)$ y $(-2, 1)$ es 8 unidades.

30. Halla todos los elementos de la cónica de ecuación $y^2 - 8y + 4x + 4 = 0$. Indica qué tipo de cónica es y represéntala gráficamente.

31. Encuentra la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo de vértices $P(1, 0)$, $Q(1, 4)$ y $R(4, 1)$. Halla la ecuación de la recta tangente en el punto R.

32. Considérese la hipérbola $xy = 32$. Halla la ecuación de la secante a dicha curva que pasa por los puntos de abscisa $x = 1$, $x = 2$. Halla también las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola que son paralelas a dicha secante.

33. Se desea plantar un seto en un jardín con la forma de alguna cónica y, para ello, se dispone de una cuerda de 10 m de longitud:
    a) Indica qué tipos de cónicas se pueden trazar con la ayuda de la cuerda, utilizando toda su longitud, y de qué manera habría que proceder en cada caso.
    b) Calcula todos los elementos de las curvas que se pudieran obtener.

34. Halla la ecuación de la circunferencia de diámetro $A(1, 1)$, $B(2, -2)$. ¿El punto $T(3, -1)$ pertenece a esta circunferencia? Si es así, halla su punto diametralmente opuesto y las ecuaciones de las tangentes en este punto T y en su punto diametralmente opuesto.

35. Calcula la ecuación reducida de la hipérbola que pasa por los puntos $A(5, 2)$ y $B\left(3\sqrt{2}, \frac{3}{2}\right)$. Represéntala gráficamente.

36. Una parábola de eje paralelo al eje de ordenadas pasa por los puntos $A(2, 0)$, $B(6, 0)$ y $C(0, 6)$. Encuentra su ecuación y sus elementos. Represéntala gráficamente.

37. Halla las ecuaciones de las tangentes trazadas a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 25$ desde el punto $(8, 0)$.

26. Hallamos los puntos dados resolviendo los respectivos sistemas:

a) $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=40 \\ x-2y+2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow P(-6,-2) \quad Q\left(\frac{26}{5},\frac{18}{5}\right)$

b) $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=40 \\ 9x^2+16y^2=25 \end{array}\right\} \Rightarrow$ No tiene solución, luego no hay puntos de corte

c) $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=40 \\ x^2-25y^2=25 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} P(6,28;\,0,76) \;\; Q(6,28;\,-0,76) \\ R(-6,28;\,0,76) \;\; Q(-6,28;\,-0,76) \end{array}$

d) $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=40 \\ xy=20 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} P(4,47;\,4,47) \\ Q(-4,47;\,-4,47) \end{array}$

27. Es una recta de ecuación $y=-3$.

28. En cada uno de los casos quedará:

a)La circunferencia tendrá por centro $C(a,a)$ y su radio valdrá $(a+2)$ unidades. Como ha de pasar por el punto P dado, podemos escribir:

$$d(P,C)=\text{radio}=\sqrt{a^2+(a-7)^2}=a+2$$

Operando obtenemos dos circunferencias:

$C_1 \equiv$ centro $(3,3)$ y radio $=5$ cuya ecuación queda: $(x-3)^2+(y-3)^2=25$

$C_2 \equiv$ centro $(15,15)$ y radio $=17$ cuya ecuación queda: $(x-15)^2+(y-15)^2=289$

b) Al ser tangente en el $O(0,0)$ a la recta $x+y=0$, tendrá el centro C en la recta perpendicular a la tangente en el punto O de tangencia, es decir, en la recta $x-y=0$.

Además, por pasar por A y por O el centro está en la mediatriz del segmento AO, es decir, en la recta $y-4=0$.

Luego el centro es el punto $C(4,4)$ y el radio $r=\sqrt{32}$.

La ecuación final de la circunferencia es: $(x-4)^2+(y-4)^2=32$

29. El lugar geométrico buscado corresponde a una elipse no centrada en el origen de coordenadas. Obtenemos su ecuación imponiendo el enunciado a los puntos $P(x, y)$.

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}=8$$

Operando obtenemos: $3x^2+4y^2-8y-44=0$

30. Es una parábola de ecuación: $(y-4)^2=-4(x-3)$. Se pueden extraer los elementos a partir de la ecuación.

Estos quedan: Eje: $y=4$ Vértice: $V(3,4)$ Foco: $F(2,4)$ Directriz: $x=4$

31. La circunferencia circunscrita al triángulo PQR tendrá el centro en el circuncentro del triángulo, es decir, en el punto $C(2,2)$ y su radio es la distancia del centro a uno de los puntos dados, es decir, $r=\sqrt{5}$.

Su ecuación es: $(x-2)^2+(y-2)^2=5$

32. Hallamos la ecuación de la secante que pasa por los puntos $A(1,32)$ y $B(2,16)$, siendo ésta la recta: $16x+y-48=0$.

Las rectas paralelas a esta secante serán de la forma: $16x+y+K=0$.

Obligando a que esta recta corte en un solo punto a la hipérbola, obtenemos: $K=\pm 32\sqrt{2}$.

Luego las ecuaciones de las rectas tangentes son: $16x+y+32\sqrt{2}=0$; $16x+y-32\sqrt{2}=0$

33. Las soluciones quedan:

Se puede trazar circunferencias de radio menor o igual que 10 m.
Se pueden trazar elipses, con el procedimiento del jardinero, utilizando cuerdas de 10 m.

En la circunferencia hay que dar el centro y el radio.
El semieje mayor de las elipses no puede superar los 10 m.

34. La circunferencia de diámetro *AB* tendrá por centro el punto medio de *AB*, $C\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$ y por radio la mitad de la distancia entre *A* y *B*, $r=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

La ecuación quedaría : $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$.

El punto T pertenece a esta circunferencia puesto que verifica su ecuación.

El punto diametralmente opuesto a *T* es el simétrico de *T* respecto al centro *C*, es decir, el punto $P(0,0)$.

La recta tangente en el punto $T(3,-1)$ tendrá por vector director el vector perpendicular a $\overline{TC}$, es decir, el vector $\vec{v}(1,3)$; por tanto, su ecuación es: $3x-y-10=0$.

La recta tangente en el punto $P(0,0)$ tendrá el mismo vector director por ser paralela a la anterior y por ecuación: $3x-y=0$.

35. La hipérbola es de la forma: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

Obligándola a pasar por los puntos dados obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{25}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1\\ \frac{18}{a^2}-\frac{9}{4b^2}=1\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}a^2=9\\ b^2=\frac{9}{4}\end{array} \Rightarrow \text{La hipérbola queda}: \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9/4}=1$$

36. La ecuación de las parábolas de eje paralelo al eje de ordenadas es $y=ax^2+bx+c$. Imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l}0=4a+2b+c\\ 0=36a+6b+c\\ 6=c\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}a=1/2\\ b=-4\\ c=6\end{array} \Rightarrow \text{La parábola queda}: y=\frac{1}{2}x^2-4x+6$$

Los elementos de esta parabola son :

Eje : $x=4$ Vértice : $V(4,-2)$ Foco : $F\left(4,-\frac{3}{2}\right)$ Directriz : $y=-\frac{5}{2}$

37. Serán rectas de la forma $y-0=m(x-8)$ cuya distancia al centro de la circunferencia debe coincidir con el radio.

$$d(C,\text{tangente})=\text{radio} \Rightarrow \left|\frac{-8m}{\sqrt{m^2+1}}\right|=5 \Rightarrow m=\pm\frac{5}{\sqrt{39}}$$

Las ecuaciones de las tangentes son: $5x-\sqrt{39}y-40=0$ $5x+\sqrt{39}y-40=0$

Unidad 9 – Propiedades globales de las funciones

PÁGINA 199

cuestiones iniciales

1. Dibuja la gráfica de las funciones con las características siguientes:

a) Dom $f = (-6, 6)$, Im $f = [0, 4]$, simétrica respecto del eje OY, máximos en los puntos $(3, 4)$ y $(-3, 4)$ y mínimo en el punto $(0, 0)$.

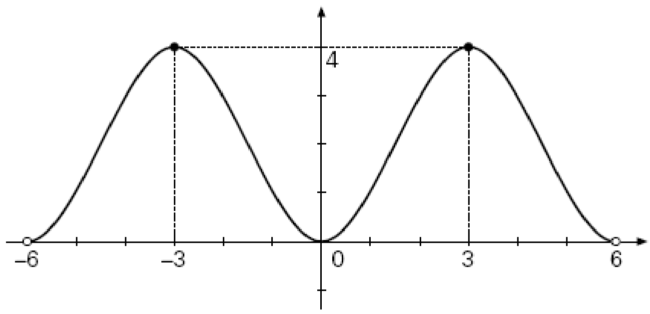
b) Dom $f = (-\infty, 0)$, Im $f = (-\infty, 0)$ y estrictamente decreciente en todo su dominio.

2. Estudia el dominio de las funciones $f(x) = 4 - x^2$, $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 9}$.

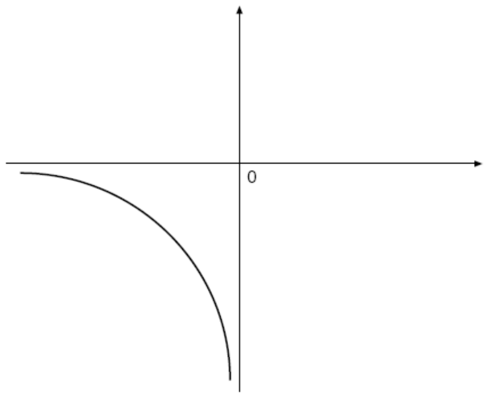
SOLUCIONES

1. Las soluciones pueden quedar así:

a)



b)



2. Los dominios quedan:

$$\text{Dom} f = \mathbb{R} \qquad \text{Dom} g = \mathbb{R} - \{3, -3\}$$

PÁGINA 213

ACTIVIDADES

- Aplica esta estrategia de ensayo y error en la resolución de los siguientes problemas:

1. **Fichas de colores.** Tenemos 16 fichas, de las cuales 4 son rojas, 4 verdes, 4 azules y 4 amarillas. De cada uno de los colores tenemos una ficha cuadrada, una circular, una triangular y otra pentagonal. Coloca estas fichas en una cuadrícula o tablero de 4×4, de manera que, en cada fila, columna o diagonal, haya una ficha de cada color y de cada forma.

2. ***Amanitas muscarias.*** Juan fue con su padre a ver una exposición micológica. Les llamó la atención el colorido de la *Amanita muscaria*. Al día siguiente, su amigo le preguntó por el número total de ejemplares que habían visto de esta variedad en la exposición, a lo que Juan respondió: «Había 8/9 de las Amanita muscaria más 8/9 de *Amanita muscaria*.» ¿Cuántos ejemplares de *amanita* había en la exposición?

3. **Latas de zumo.** Hay un cierto número de latas de zumo en la nevera. Invitas a dos amigos a tu casa a merendar. El primero se bebe la mitad de las latas que hay en la nevera más media lata; el segundo, la mitad de las que quedan más media lata; y tú te bebes la mitad de las que quedan más media lata. Después de esto, no queda ninguna lata de zumo. ¿Cuántas latas había inicialmente?

4. **Múltiplo de doce.** Si multiplicamos el cuadrado de un número natural por el número natural anterior a ese cuadrado, ¿el resultado es múltiplo de 12?

SOLUCIONES

1. Designamos los colores por: rojo (*R*), verde (*V*), azul (*Z*) y amarillo (*A*); y las tres formas por: cuadrada (*C*), circular (*O*), triangular (*T*) y pentagonal (*P*).

   Por ensayo y error las colocamos en un tablero 4 x 4, cumpliendo las condiciones que marca el enunciado.

   Una solución es:

RC	*VO*	*ZT*	*AP*
ZP	*AT*	*RO*	*VC*
AO	*ZC*	*VP*	*RT*
VT	*RP*	*AC*	*ZO*

   Podemos encontrar hasta 72 soluciones distintas.

2. El número total de amanitas ha de ser múltiplo de 9 menos 1, es decir, 8 amanitas. Haciendo el problema mediante ecuaciones:

$$\frac{8}{9}x + \frac{8}{9} = x \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 8 \text{ amanitas}}$$

3. El enunciado del problema nos muestra que el número de latas de zumo debe ser un número impar. Por ensayo y error dirigido obtenemos:

Hay 7 latas de zumo.

El 1.er amigo se bebe $\frac{7}{2}+0,5=4$ latas. Quedan 3 latas.

El 2.º amigo se bebe $\frac{3}{2}+0,5=2$ latas. Queda 1 lata.

El dueño de la casa se bebe $\frac{1}{2}+0,5=1$ lata.

Luego, efectivamente, había inicialmente 7 latas de zumo.

Este problema se puede resolver también por medio de ecuaciones.

4. Sea n un número real.

Veamos si $n^2\cdot\left(n^2-1\right)=\dot{12}$

$n^2\cdot\left(n^2-1\right)=n\cdot n\left(n-1\right)\cdot\left(n+1\right)$

$n\left(n-1\right)\cdot\left(n+1\right)=\dot{3}$, pues es producto de tres números consecutivos.

Si $n=\dot{3}\ \Rightarrow\ n-1=\dot{2}$ y $n+1=\dot{2}$, luego $\left(n-1\right)\cdot n\cdot\left(n+1\right)=\dot{3}\cdot\dot{2}\cdot\dot{2}=\dot{12}$,

Si $n-1=\dot{3}\ \Rightarrow\ n=\dot{2}$, por lo que $n\left(n-1\right)\cdot n\cdot\left(n+1\right)=\dot{2}\cdot\dot{3}\cdot\dot{2}=\dot{12}$,

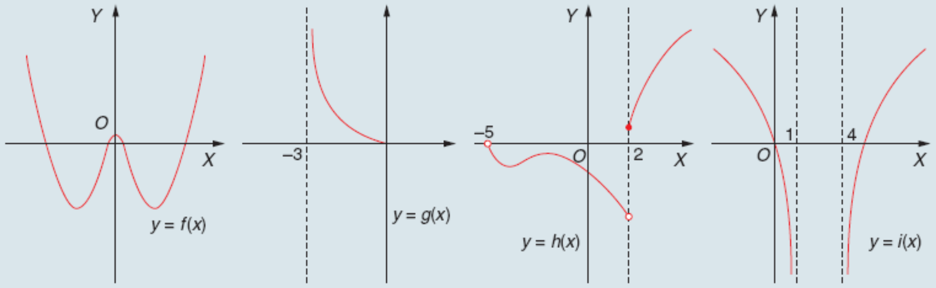
Si $n+1=\dot{3}\ \Rightarrow\ n=\dot{2}$, por lo que $n\left(n-1\right)\cdot n\cdot\left(n+1\right)=\dot{2}\cdot\dot{2}\cdot\dot{3}=\dot{12}$,

En cualquier caso, efectivamente, $n^2\cdot\left(n^2-1\right)=\dot{12}$.

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Estudia el dominio de las siguientes funciones:

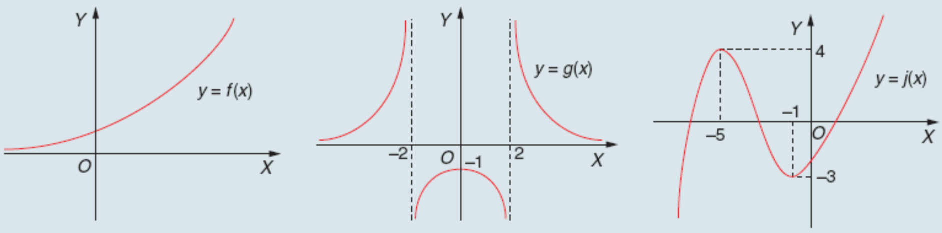


$j(x) = x^4 - 2x^2$ $\quad k(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-5x+6}$ $\quad l(x) = \dfrac{-1}{1-x}$ $\quad m(x) = \sqrt[6]{x+2}$

$n(x) = \ln(x+6)$ $\quad o(x) = 2^{x-1}$ $\quad p(x) = \text{sen}\,(x^2+5)$ $\quad q(x) = \text{tg}\,(x-1)$

$r(x) = \ln(x^2-4x+3)$ $\quad s(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x+1}$ $\quad t(x) = \sqrt[4]{x^3-2x^2-x+2}$ $\quad u(x) = \log_2\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)$

2. Analiza y estudia, en cada una de las siguientes funciones, el dominio, el recorrido o conjunto imagen, la monotonía y los extremos relativos:



3. Dibuja las gráficas correspondientes a la funciones con las características que se citan a continuación:
   a) Dom $f = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$; Im $f = (-\infty, 2]$; máximos relativos en los puntos $(-3, 2)$ y $(3, 2)$.
   b) Dom $g = \mathbb{R}$; Im $g = (-3, 2)$; mínimo relativo en el punto $(-2, -1)$ y máximo relativo en el punto $(0, 1)$.
   c) Dom $h = (-\infty, 0)$; Im $h = (1, +\infty)$ y estrictamente creciente en todo su dominio.
   d) Dom $i = \mathbb{R} - \{0\}$; Im $i = \mathbb{R}$; estrictamente creciente en $(-\infty, 0)$ y estrictamente decreciente en $(0, +\infty)$.

4. Demuestra, usando las definiciones de extremos relativos, que la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ tiene un máximo relativo en el punto $(1, 4)$ y un mínimo relativo en el punto $(3, 0)$.

5. Prueba que las siguientes funciones están acotadas por los valores que se indican. Estudia también la existencia de extremos absolutos:

   a) $f(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$ acotada por 0 y 2 $\qquad$ b) $g(x) = 3\,\text{sen}\,(2x) + 1$ acotada por -2 y 4

SOLUCIONES

1. Los dominios quedan:

$\text{Dom} f = \mathbb{R}$

$\text{Dom} g = (-3, 0]$

$\text{Dom} h = (-5, +\infty)$

$\text{Dom} i = (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$

$\text{Dom} j = \mathbb{R}$

$\text{Dom} k = \mathbb{R} - \{2, 3\}$

$\text{Dom} l = \mathbb{R} - \{1\}$

$\text{Dom} m = [-2, +\infty)$

$\text{Dom} n = (-6, +\infty)$

$\text{Dom} o = \mathbb{R}$

$\text{Dom} p = \mathbb{R}$

$\text{Dom} q = \left\{ x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq 1 + \frac{\pi}{2} + K\pi; K \in \mathbb{Z} \right\}$

$\text{Dom} r = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

$\text{Dom} s = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

$\text{Dom} t = [-1, 1] \cup [2, +\infty)$

$\text{Dom} u = (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

2. Las funciones se caracterizan por:

$y = f(x)$

$\text{Dom} f = \mathbb{R}$; $\text{Im} f = (0, +\infty)$

Estrictamente creciente en todo su dominio.
No tiene extremos relativos.

$y = g(x)$

$\text{Dom} g = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$; $\text{Im} g = (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$

Estrictamente creciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$

Estrictamente decreciente en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$

Máximo relativo $(0, -1)$

$y = j(x)$

$\text{Dom} j = \mathbb{R}$; $\text{Im} j = \mathbb{R}$

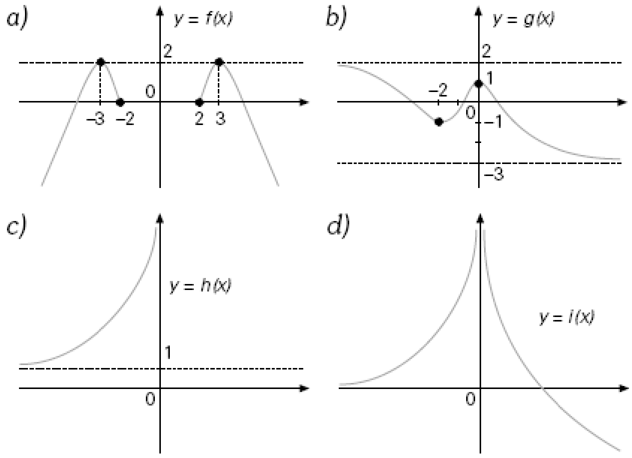
Estrictamente creciente en $(-\infty, -5) \cup (-1, +\infty)$

Estrictamente decreciente en $(-5, -1)$

Máximo relativo $(-5, 4)$

Mínimo relativo $(-1, -3)$

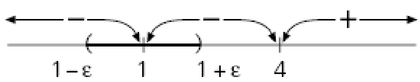
3. Las representaciones quedan:



4. Las demostraciones quedan del siguiente modo:

Para demostrar que existe un máximo relativo en el punto de abscisa 1 hay que probar que $\forall x \in E^*(1;\varepsilon) \Rightarrow f(x) < f(1)$, es decir, que $x^3 - 6x^2 + 9x < 4 \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 9x - 4 < 0$.(Con $\varepsilon > 0$).

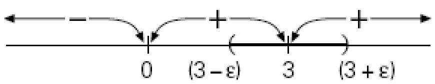
Para ello estudiamos el signo de la función: $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = (x-1)^2(x-4)$



Luego se cumple que $\forall x \in E^*(1;\varepsilon) \Rightarrow f(x) < f(1)$

Para demostrar que existe un mínimo relativo en el punto de abscisa 3 hay que probar que $\forall x \in E^*(3;\varepsilon) \Rightarrow f(x) > f(3)$, es decir, que $x^3 - 6x^2 + 9x > 0$.

Para ello estudiamos el signo de la función: $h(x) = x^3 - 6x^2 + 9x = x(x-3)^2$



Luego se cumple que $\forall x \in E^*(3;\varepsilon) \Rightarrow f(x) > f(3)$

5. Las demostraciones quedan:

a) Hemos de probar que $\boxed{0 \leq \frac{2}{1+x^2} \leq 2}$

- $0 \leq \frac{2}{1+x^2}$, que se cumple $\forall x$.
- $\frac{2}{1+x^2} \leq 2 \Rightarrow 2 \leq 2+2x^2 \Rightarrow 0 \leq 2x^2$; esto es cierto para $\forall x$.
- No alcanza el extremo inferior o ínfimo, luego no tiene mínimo absoluto. Para el valor $x=0 \Rightarrow f(0)=2$, luego alcanza el extremo superior o supremo, es decir, tiene un máximo absoluto en $x=2$.

b) Hemos de probar que $\boxed{-2 \leq 3\,\text{sen}(2x)+1 \leq 4}$

- $-2 \leq 3\,\text{sen}(2x)+1 \leq 4 \Rightarrow -3 \leq 3\,\text{sen}(2x) \leq 3 \Rightarrow -1 \leq \text{sen}(2x) \leq 1$, esto es cierto $\forall x$.

$3\,\text{sen}(2x)+1=-2 \Rightarrow \text{sen}(2x)=-1 \Rightarrow 2x=\frac{3\pi}{2}+2\pi K \Rightarrow x=\frac{3\pi}{4}+\pi K.$

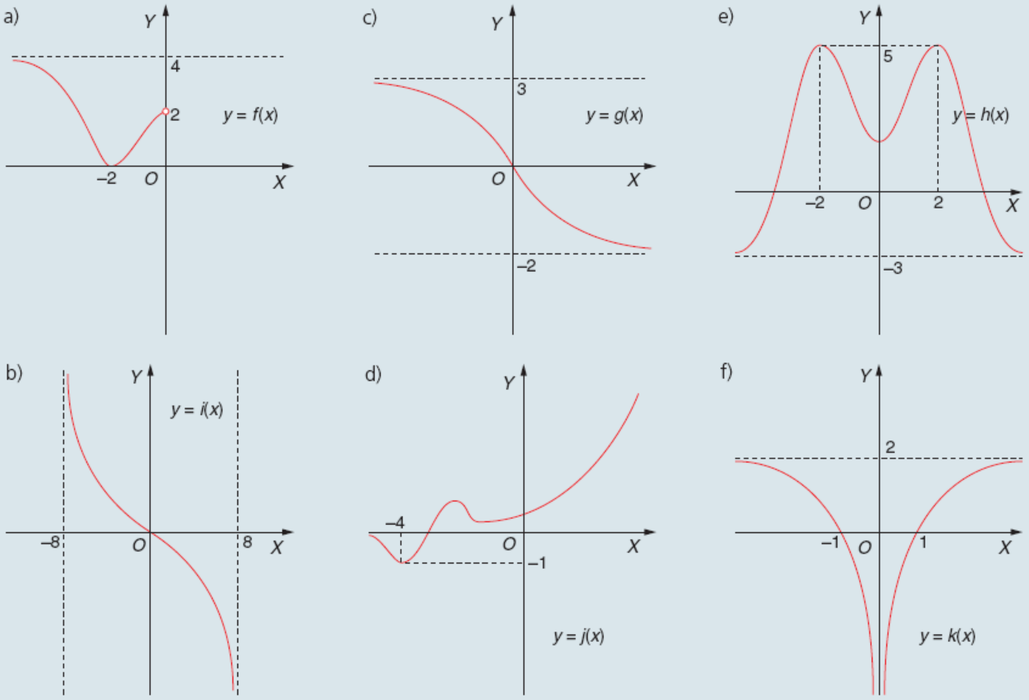
Tiene mínimo absoluto $=\frac{3\pi}{4}+K\pi \ (\forall K \in \mathbb{Z})$.

$3\,\text{sen}(2x)+1=4 \Rightarrow \text{sen}(2x)=1 \Rightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+2\pi K \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+\pi K.$

Tiene máximo absoluto $=\frac{\pi}{4}+K\pi \ (\forall K \in \mathbb{Z})$.

PÁGINA 217

6. Estudia la acotación, la simetría y la posible existencia de supremo, ínfimo y extremos absolutos en cada una de las siguientes funciones:

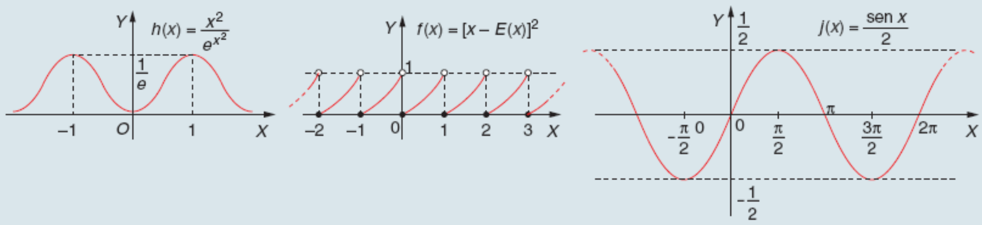


7. Estudia la simetría de las siguientes funciones:

$f(x) = x^6 - x^4$ $\quad g(x) = x - 1$ $\quad h(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad i(x) = \cos(2x)$

$j(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 4}$ $\quad k(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$ $\quad l(x) = |x|$ $\quad m(x) = x \cdot e^{x^2}$

8. Estudia la simetría de cada una de las siguientes funciones así como su periodicidad, hallando el periodo en las que ello sea posible:



9. Dibuja las gráficas correspondientes a las funciones que verifican las siguientes condiciones:

a) Dom $f = \mathbb{R}$; Im $f = [0, +\infty)$; simetría respecto del eje de ordenadas, máximo relativo en el punto $(0, 2)$, y mínimos relativos en $(\sqrt{2}, 0)$ y en $(-\sqrt{2}, 0)$.

b) Dom $f = \mathbb{R}$; simetría respecto del origen de coordenadas; acotada por -1 y 1, alcanzando la función ambos valores; mínimo relativo en $(-2, -1)$, y máximo relativo en $(2, 1)$.

6. El estudio de cada función nos ofrece la siguiente información:

   a) Esta función $y = f(x)$ está acotada por $x = 0$ y $x = 4$.
   El supremo es $x = 4$ y el ínfimo es $x = 0$.
   Esta función tiene un mínimo absoluto en $x = 0$.
   No tiene simetría.

   b) Esta función $y = g(x)$ está acotada por $x = 3$ y $x = -2$.
   El supremo es $x = 3$ y el ínfimo es $x = -2$.
   Esta función no tiene extremos absolutos.
   No tiene simetría.

   c) Esta función $y = h(x)$ está acotada por $x = -3$ y $x = 5$.
   El supremo es $x = 5$ y el ínfimo es $x = -3$.
   Esta función tiene un máximo absoluto en $x = 5$.
   Es simétrica respecto al eje de ordenadas.

   d) Esta función $y = i(x)$ no está acotada.
   Es simétrica respecto al origen de coordenadas.

   e) Esta función $y = j(x)$ está acotada inferiormente por $x = -1$.
   El ínfimo es $x = -1$ y no tiene supremo.
   Esta función tiene un mínimo absoluto en $x = -1$.
   No tiene simetría.

   f) Esta función $y = k(x)$ está acotada superiormente por $x = 2$.
   El supremo es $x = 2$ y no tiene ínfimo.
   Esta función no tiene extremos absolutos.
   Es simétrica respecto al eje de ordenadas.

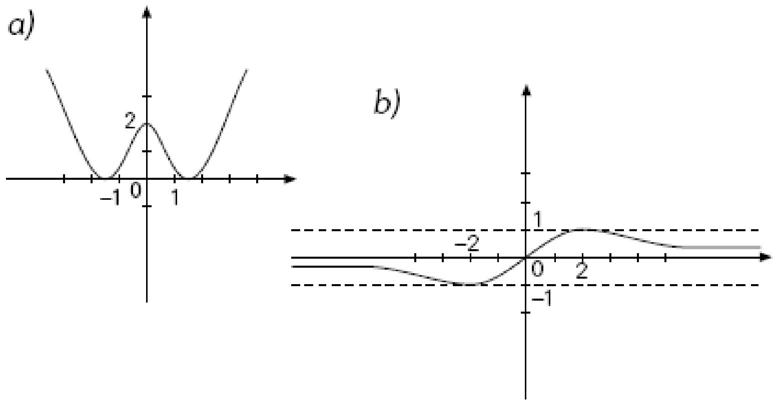
7. Las funciones se dividen en tres grupos:

   - Las funciones *f*; *i*; *k*; *l*; son simétricas respecto al eje de ordenadas.
   - Las funciones *h*; *j*; *m*; *q*; son simétricas respecto al origen de coordenadas.
   - Las demás funciones no tienen simetrías.

8. Las funciones quedan:

   a) Simétrica respecto al eje de ordenadas y no periódica.
   b) No tiene simetría y es periódica de período $T = 1$.
   c) Simétrica respecto al origen de coordenadas y periódica de período $T = 2\pi$.

9. Las gráficas quedan:



ACTIVIDADES FINALES

10. Dadas las funciones $f(x) = \frac{x}{2-x}$, $g(x) = x^2 + 2$, determina las siguientes funciones con sus respectivos dominios:

a) $f + g$ b) $f \cdot g$ c) $\frac{f}{g}$ d) $g \circ f$ e) $g \circ g$

11. Calcula la función inversa de cada una de las siguientes y comprueba, en cada caso, que la función dada compuesta con su inversa, da la función identidad:

$f(x) = x^3 - 2$ $g(x) = 1 - 3x$ $h(x) = 2^{x+2}$

12. Dadas las funciones $f(x) = 1 + 3x^2$, $g(x) = \sqrt{2x-4}$, $h(x) = \frac{3}{x^2+1}$, calcula:

a) $f \circ g$ c) $f \circ h$ e) $(g \circ f)\,(-1)$

b) $h \circ g$ d) $(f \circ f)\,(1)$ f) $(h \circ h)\,(0)$

13. Siendo $f(x) = 5 - x$, $g(x) = 3x - a$, calcula el valor de a para que la composición de ambas sea conmutativa, es decir, $f \circ g = g \circ f$.

14. Sea la función $f(x) = \frac{x-1}{x}$. Comprueba que $f \circ f \circ f = i$.

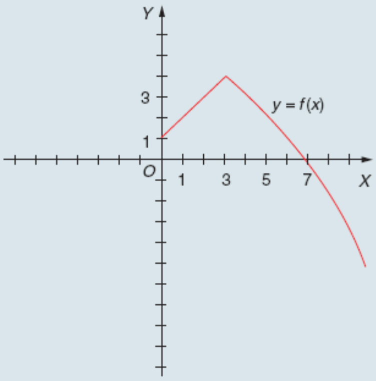
15. En un triángulo rectángulo la suma de sus catetos es de 20 metros. Halla la función $f(x)$ que hace el área de ese triángulo dependiente de la longitud de su cateto base. ¿Cuál es el dominio de esta función? Indica el significado que tiene este dominio en el contexto del problema. ¿Está acotada esta función? Estudia si tiene extremos absolutos e indica el sentido de los mismos.

16. Dadas las siguientes funciones halla, en cada caso, las dos funciones que, compuestas, nos dan la dada:

a) $(f \circ g)\,(x) = (x^3 + 2)^2$ b) $(h \circ l)\,(x) = 3^{2x}$ c) $(t \circ p)\,(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2}$

17. Sean $f(x) = \frac{x-2}{2}$, $g(x) = 2x - 4$. Calcula $(f \circ g)^{-1}\,(4)$.

18. El funicular de una estación turística funciona los sábados desde las 10 de la mañana hasta las cinco y media de la tarde ininterrumpidamente. Comienza la subida a las 10 de la mañana y, al cabo de 22 minutos, llega a la cima, donde durante 8 minutos se detiene y tarda en volver al punto de partida 10 minutos. El vehículo hace una parada de 5 minutos y vuelve a recorrer el mismo trayecto. Dibuja un gráfico que represente esta situación e indica el tipo de función que obtienes.



19. El siguiente dibujo muestra la gráfica de la función $y = f(x)$. Complétala de forma que verifique una de estas condiciones:

a) Que sea simétrica respecto del eje de coordenadas.

b) Que sea simétrica respecto al origen de coordenadas.

20. Usando la gráfica de la función $y = f(x)$ del dibujo adjunto, construye la gráfica de la función $y = |f(x)|$.

10. Los dominios quedan:

a) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\dfrac{x}{2-x}+x^2+2=\dfrac{-x^3+2x^2-x+4}{2-x} \Rightarrow$ Dominio $=\mathbb{R}-\{2\}$

b) $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\dfrac{x}{2-x}\cdot(x^2+2)=\dfrac{x^3+2x}{2-x} \Rightarrow$ Dom $f\cdot g=\mathbb{R}-\{2\}$

c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x}{2-x}:(x^2+2)=\dfrac{x}{(2-x)(x^2+2)} \Rightarrow$ Dom $\dfrac{f}{g}=\mathbb{R}-\{2\}$

d) $(g\circ f)(x)=g\,[f(x)]=g\left[\dfrac{x}{2-x}\right]=\left(\dfrac{x}{2-x}\right)^2+2=\dfrac{3x^2-8x+8}{4-4x+x^2} \Rightarrow$ Dom $g\circ f=\mathbb{R}-\{2\}$

e) $(g\circ g)(x)=g\,[g(x)]=g\,[x^2+2]=(x^2+2)^2+2=x^4+4x^2+6 \Rightarrow$ Dom $g\circ g=\mathbb{R}$

11. Queda en cada caso:

a) $f(x)=x^3-2 \Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+2}$

y se comprueba que: $(f\circ f^{-1})(x)=f\,[f^{-1}(x)]=f\,[\sqrt[3]{x+2}]=x$

b) $g(x)=1-3x \Rightarrow g^{-1}(x)=\dfrac{1-x}{3}$

y se comprueba que: $(g\circ g^{-1})(x)=g\,[g^{-1}(x)]=g\left[\dfrac{1-x}{3}\right]=1-3\left(\dfrac{1-x}{3}\right)=x$

c) $h(x)=2^{x+2} \Rightarrow h^{-1}(x)=\log_2 x-2$

y se comprueba que: $(h\circ h^{-1})(x)=h\,[h^{-1}(x)]=h\,[\log_2 x-2]=2^{\log_2 x-2+2}=x$

12. Las soluciones son:

a) $f\circ g(x)=6x-11$

b) $h\circ g(x)=\dfrac{3}{2x-3}$

c) $f\circ h(x)=\dfrac{x^4+2x^2+28}{x^4+2x^2+1}$

d) $(f\circ f)(1)=13$

e) $(g\circ f)(-1)=2$

f) $(h\circ h)(0)=\dfrac{3}{10}$

13. La solución queda:

$$\left.\begin{array}{r}(f\circ g)(x)=f\,[g\,(x)]=f\,(3x-a)=5+a-3x\\(g\circ f)(x)=g\,[f\,(x)]=g\,(5-x)=3\,(5-x)-a=15-a-3x\end{array}\right\}\Rightarrow\ a=5$$

14. Queda:

Veamos que $(f\circ f\circ f)(x)=i\,(x)=x\ \ \Rightarrow\ \ (f\circ f\circ f)(x)=f\circ f\,[f\,(x)]=f\left[f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)\right]=f\left(\dfrac{-1}{x-1}\right)=x$

15. Llamando x a la base, el cateto altura será $(20-x)$, por tanto el área viene dada por:

$$f\,(x)=-\frac{1}{2}x^2+10x$$

El dominio de esta función es $\mathbb{R}^+$, es decir, todos los valores reales positivos pueden tomar como valor el cateto base, excluido el cero.

Es una función acotada superiormente por 50 y este valor es su máximo absoluto, y acotada inferiormente por 0 que es su mínimo absoluto, aunque estos valores carecen de sentido como catetos del triángulo.

16. Por ejemplo, las funciones pueden ser:

a) $f\,(x)=x^2$ $\qquad g(x)=x^3+2$

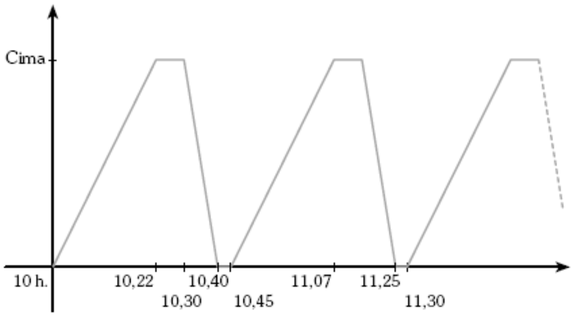
b) $h(x)=3^x$ $\qquad l(x)=2x$

c) $t(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$ $\qquad p(x)=x^2$

17. Queda:

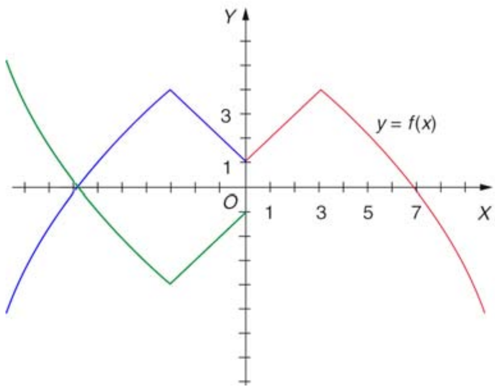
$$(f\circ g)(x)=f\,[g\,(x)]=f\,[2x-4]=x-3$$
$$(f\circ g)^{-1}(x)=x+3$$
$$(f\circ g)^{-1}(4)=7$$

18. La representación quedaría del siguiente modo:

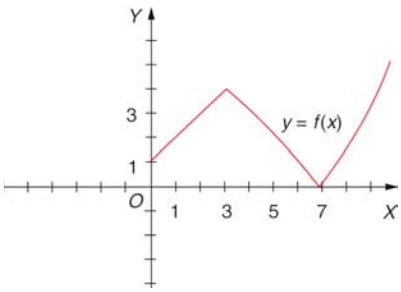


Es una función periódica de período 45 minutos.

19. La gráfica queda del siguiente modo:
   a) Es la gráfica azul
   b) Es la gráfica verde



20. La gráfica queda del siguiente modo:



Unidad 10 – Funciones elementales

PÁGINA 221

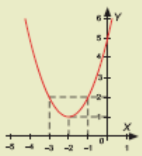
cuestiones iniciales

1. Elige entre las siguientes expresiones algebraicas la que corresponda a cada una de las gráficas:

$y=\frac{1}{2}x$ $\quad y=-x^2-4x-3$ $\quad y=-\frac{3}{2x}$

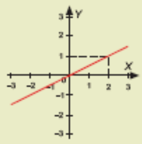
$y=\frac{3x}{2}$ $\quad y=x^2+4x+5$ $\quad y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

a)



c)

b)



d)

2. Dibuja las gráficas de las funciones y estudia sus propiedades:

a) $f(x)=4$ c) $h(x)=3x-1$ e) $j(x)=3^x$ g) $l(x)=\frac{1}{x}$

b) $g(x)=-2x$ d) $i(x)=x^2-4x$ f) $k(x)=\log_3 x$

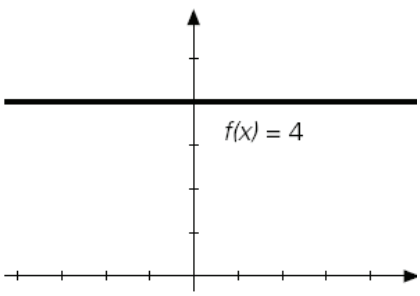
SOLUCIONES

1. Las ecuaciones para estas gráficas son:

a) $y=x^2+4x+5$ c) $y=-\frac{3}{2x}$ b) $y=\frac{1}{2}x$ d) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

2. Las funciones son:

a) $f(x)=4$



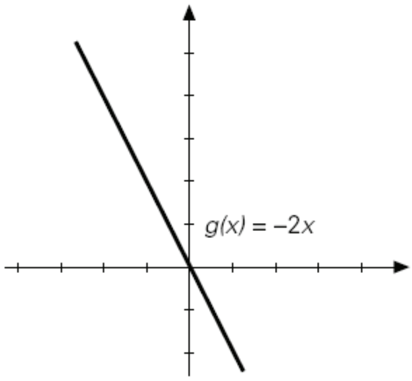
• $f(x)$ es una función constante.

$\text{Dom} f=\mathbb{R}$

$\text{Im} f=\{4\}$

Acotada por 4.

b) $g(x) = -2x$



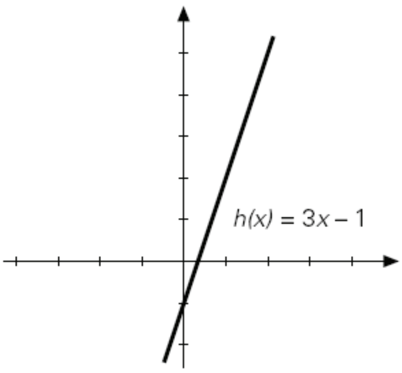
• $g(x)$ es una función lineal.

$\text{Dom}\, g = \mathbb{R}$

$\text{Im}\, g = \mathbb{R}$

Estrictamente decreciente en todo su dominio.

c) $h(x) = 3x - 1$



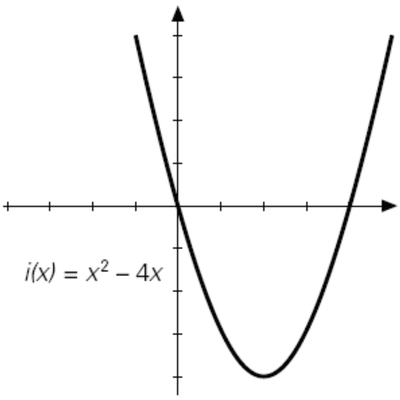
• $h(x)$ es una función afín.

$\text{Dom}\, h = \mathbb{R}$

$\text{Im}\, h = \mathbb{R}$

Estrictamente creciente en todo su dominio.

d) $i(x) = x^2 - 4x$



• $i(x)$ es una función cuadrática.

$\text{Dom}\, i = \mathbb{R}$

$\text{Im}\, i = [-4, +\infty)$

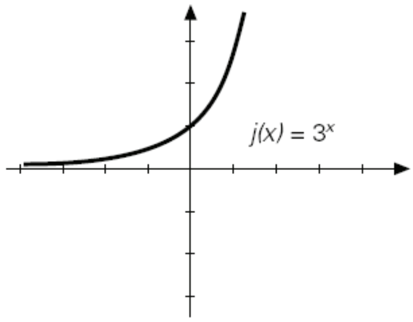
Acotada inferiormente (–4)

Estrictamente decreciente $(-\infty, 2)$

Estrictamente creciente $(2, +\infty)$

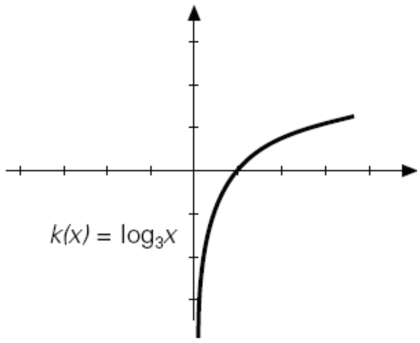
Mínimo relativo en $(2, -4)$

e) $j(x)=3^x$



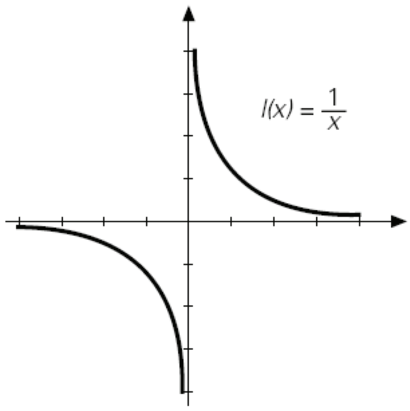
- $j(x)$ es una función exponencial.
  Dom $j=\mathbb{R}$
  Im $j=(0,+\infty)$
  Acotada inferiormente (0)
  Estrictamente creciente en todo su dominio.

f) $k(x)=\log_3 x$



- $k(x)$ es una función logarítmica.
  Dom $k=(0,+\infty)$
  Im $k=\mathbb{R}$
  Estrictamente creciente en todo su dominio.

g) $l(x)=\dfrac{1}{x}$



- $l(x)$ es una función proporcional inversa.
  Dom $l=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
  Im $l=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
  Estrictamente decreciente en todo su dominio.
  Simétrica respecto del origen de coordenadas.

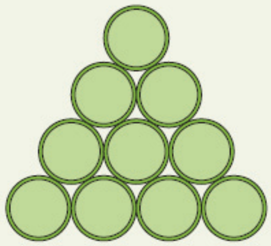
PÁGINA 237

ACTIVIDADES

■ Utilizando esta estrategia de marcha atrás, intenta resolver los siguientes problemas:

1. **El caracol.** Un caracol se encuentra en el fondo de un pozo. Cada día asciende 30 m, y por la noche se resbala 20 m hacia abajo. ¿Cuánto tiempo tardará el caracol en salir del pozo? El pozo mide 300 m de profundidad.

2. **Triángulo de monedas.** El triángulo de la figura está formado por 10 monedas iguales. ¿Cuál es el mínimo número de monedas que hay que cambiar de sitio para que el triángulo quede en posición invertida?



3. **Valor desconocido.** Determina el valor de la siguiente expresión:

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1\ldots}}}$$

4. **Pies grandes y sus aves.** El indio Pies Grandes sale de su tienda con un montón de granos de maíz y, cuando regresa de nuevo, no tiene ninguno. Cuando entra en su tienda, su hija Luz de Luna le pregunta qué ha hecho con el maíz. Él le dice: «A cada ave que me encontré le di la mitad de los granos que llevaba más uno. ¿Con cuántas aves te encontraste?», le vuelve a preguntar Luz de Luna. «Me encontré con ocho», responde Pies Grandes. ¿Cuántos granos de maíz llevaba Pies Grandes al principio?

5. **Las pesas.** ¿Cuál es el juego de 4 pesas que es necesario tener para poder pesar en una balanza de dos platos cualquier cantidad entera desde 1 hasta 40 kg?

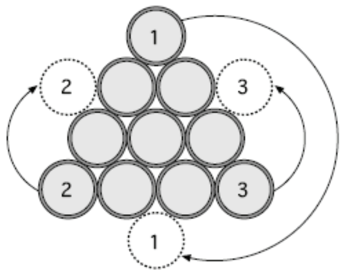
SOLUCIONES

1. Como cada día asciende 30 m y resbala 20 m, en realidad asciende 10 m.

   Luego al cabo de 27 días ha ascendido 270 m, y ya el día 28 asciende a la superficie, pues asciende $30\,\text{m} \Rightarrow 270+30=300\,\text{m}$.

   El caracol tarda 28 días en salir.

2. La solución queda:



Simplemente cambiando tres monedas, las señaladas con los números 1- 2- 3, el triángulo se invierte.

3. La solución queda:

Llamamos $x=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$ y elevamos al cuadrado $x^2=1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$

$$\Rightarrow x^2=1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}} \Rightarrow x^2=1+x \Rightarrow x^2-x-1=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \boxed{x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi} = \text{nº áureo.}$$

4. Comenzando el problema desde el final.

Ave 8ª le da $1+1=2$.

Ave 7ª (tiene 6) —le da $3+1=4$ — le quedan 2.

Ave 6ª (tiene 14) —le da $7+1=8$ — le quedan 6.

Ave 5ª (tiene 30) —le da $15+1=16$ — le quedan 14.

Ave 4ª (tiene 62) —le da $31+1=32$ — le quedan 30.

Ave 3ª (tiene 126) —le da $63+1=64$ — le quedan 62.

Ave 2ª (tiene 254) —le da $127+1=128$ — le quedan 126.

Ave 1ª (tiene 510) —le da $255+1=256$ — le quedan 254.

Al principio tenía 510 gramos de maíz.

5. Las pesas que necesitamos han de ser de: 1, 3, 9 y 27 kg.

Así:

1 kg $=1$

2 kg $=3-1$

3 kg $=3$

4 kg $=3+1$

5 kg $=9-3-1$

6 kg $=9-3$

7 kg $=9-3+1$

8 kg $=9-1$

9 kg $=9$

10 kg $=9+1$

Y así sucesivamente.

La suma de los números significa que las pesas se colocan en el mismo plato de la balanza, y la diferencia, que se colocan en platos diferentes.

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(1, -3)$ y $B(-2, 6)$.

2. Halla la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(2, 1)$ y $(-5, 3)$.

3. La recta que pasa por los puntos $(1, 2)$ y $(-1, -2)$, ¿es una función constante, lineal o afín?

4. Demuestra que la función $f(x) = 2x + 3$ es estrictamente creciente en todo su dominio, y que la función $g(x) = 5 - 3x$ es estrictamente decreciente en todo su dominio.

5. Averigua si los puntos $(0, -7)$, $(3, -6)$ y $(-3, -8)$ están o no alineados.

6. Halla la función lineal cuya gráfica pasa por el punto $(5, -3)$.

7. Representa gráficamente las siguientes funciones definidas a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -1 \\ 1 - 2x & \text{si } -1 \le x < 1 \\ 3x - 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 5x - 2 & \text{si } x \le 1 \\ -2 & \text{si } x = 2 \\ \frac{1}{2}x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Estudia en cada una de ellas: dominio, recorrido, monotonía, extremos relativos, acotación y simetría.

8. Una determinada empresa nos formula la siguiente oferta por conectarnos a Internet:
   - Cuota mensual de abono: 6 euros.
   - Cada hora de conexión: 1,8 euros.

   a) Encuentra la función que nos indique el precio a pagar mensualmente, según las horas que se haya establecido a conexión.

   b) Representa gráficamente esta función.

   c) La empresa carga un 16% de IVA. ¿Cómo afecta esto a la función anterior y a su gráfica?

9. Encargamos cierta encuadernación de libros, y nos cobran 7 euros cada uno si el número de páginas no supera las 200. A partir de las 200 páginas, por cada página de más se incrementa el precio anterior en 0,02 euros. Responde a las siguientes cuestiones:

   a) Encuentra la función que nos da el precio a pagar por la encuadernación de un libro dependiendo del número de páginas de este.

   b) Representa gráficamente esta función.

1. La recta que pasa por $A(1,-3)$ y $B(-2,6)$ es: $3x+y=0$

2. La pendiente de la recta es: $m=-\dfrac{2}{7}$

3. Es la función lineal $y=2x$

4. Las demostraciones quedan:

   - Sea la relación $x_1<x_2 \Rightarrow 2x_1<2x_2 \Rightarrow 2x_1+3<2x_2+3 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$, luego la función $f(x)$ es estrictamente creciente en todo su dominio.

   - Sea la relación $x_1<x_2 \Rightarrow -3x_1>-3x_2 \Rightarrow -3x_1+5>-3x_2+5 \Rightarrow g(x_1)>g(x_2)$, luego la función $g(x)$ es estrictamente decreciente en todo su dominio.

5. La ecuación de la recta que pasa por $(0,-7)$ y $(3,-6)$ es:

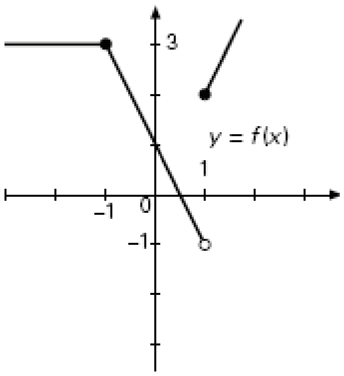
$$y=\frac{1}{3}x-7$$

   El punto $(-3,-8)$ verifica la ecuación, por tanto este punto está en la misma recta que los anteriores, es decir, los puntos están alineados.

6. Una de las posibles ecuaciones es: $y=-\dfrac{3}{5}x$

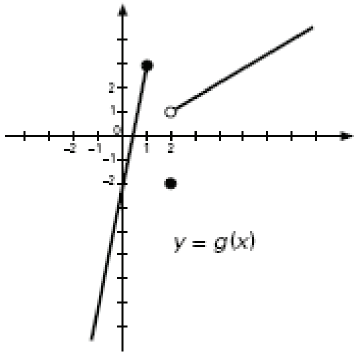
7. Las representaciones quedan:

   a) $y=f(x)$



Dom $f=\mathbb{R}$
Im $f=(-1,+\infty)$
Estrictamente decreciente $(-1,1)$
Estrictamente creciente $(1,+\infty)$
No tiene extremos relativos.
Está acotada inferiormente por (-1).
No es simétrica ni respecto al eje de ordenadas ni respecto al origen.

b) $y = g(x)$



$\text{Dom}\, g = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$

$\text{Im}\, g = \mathbb{R}$

Estrictamente creciente $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

No tiene extremos relativos.

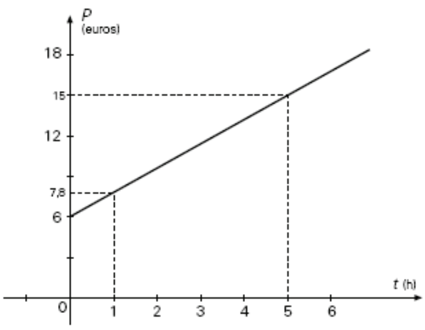
No está acotada.

No es simétrica ni respecto al eje de ordenadas ni respecto al origen.

8. La solución queda:

a) La función es: $P = 6 + 1{,}8 \cdot t$, donde P es el precio a pagar en euros y t el tiempo en horas.

b) Queda:



c) La función será: $f(x) = \dfrac{116}{100} P = \dfrac{116}{100}(6 + 1{,}8t)$.

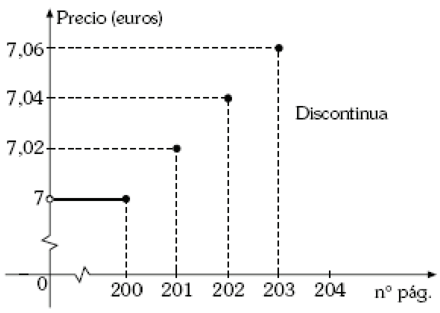
Todas las ordenadas de esta función quedan multiplicadas por 1,16.

9. Queda del siguiente modo:

a) La función que nos da el precio a pagar por encuadernar un libro es:

$$f(x) = \begin{cases} 7 & \text{si } x \leq 200 \\ 7 + 0{,}02x & \text{si } x > 200 \end{cases}$$

b) La gráfica queda:



PÁGINA 241

10. Dibuja, para cada una de las siguientes funciones cuadráticas, sus respectivas gráficas:

a) $f(x) = x^2 - 8x + 12$

b) $g(x) = x^2 - 6x + 9$

c) $h(x) = x^2 - 2x + 3$

d) $i(x) = -x^2 + 4x - 6$

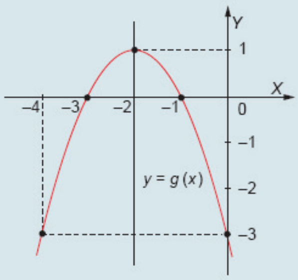
e) $j(x) = -x^2 + 6x - 5$

f) $k(x) = -x^2 - 4x - 4$

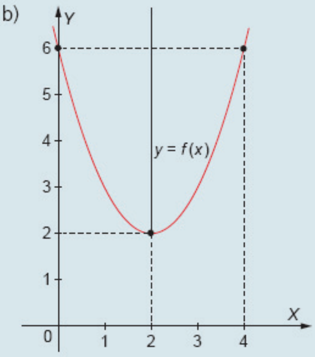
Estudia en cada una de estas funciones: dominio, recorrido, monotonía, extremos relativos, acotación y simetría.

11. Encuentra las ecuaciones o expresiones algebraicas de las funciones cuyas gráficas son las adjuntas.

a)



b)



12. Halla una función cuadrática que se anule, para $x = 1$ y para $x = -1$. ¿Cuántas soluciones hay?

13. Estudia los intervalos en los cuales la función cuadrática $f(x) = x^2 - 6x + 5$ es positiva y los intervalos en los que es negativa. ¿Se anula para algún valor?

14. Halla los intervalos en los cuales las ordenadas de la función $f(x) = x^2 - 5x + 6$ sean iguales o superiores a 2.

15. Un vendimiador ha de recoger 10 000 kg de uva que hoy vendería a 0,30 euros el kilo. Cada día que pasa se estropean 500 kg y el precio aumenta en 0,02 euros el kg. ¿Cuándo ha de vendimiar para obtener el máximo beneficio y cuál será éste?

16. De todos los pares de números que suman 18, ¿cuál es el par cuyo producto es máximo?

17. Para la función cuadrática $f(x) = ax^2$, estudia si son o no ciertas las siguientes igualdades:

a) $f(x + z) = f(x) + f(z)$ b) $f(x \cdot z) = f(x) \cdot f(z)$ c) $f(tx) = tf(x)$

18. Representa, con ayuda de la calculadora, las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x^3$ b) $g(x) = -2x^3$ c) $h(x) = \frac{1}{2}x^3$ d) $k(x) = -\frac{1}{2}x^3$

19. Representa, con ayuda de la calculadora, las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x^4$ b) $g(x) = -3x^4$ c) $h(x) = \frac{1}{3}x^4$ d) $k(x) = -\frac{1}{3}x^4$

20. Halla los puntos de corte de cada uno de los siguientes pares de funciones:

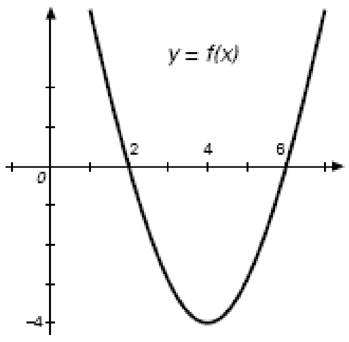
a) $y = x^2$, $y = x^6$

b) $y = x^5$, $y = x^7$

c) $y = x^2$, $y = x^3$

10. Las gráficas quedan:

a) $f(x)=x^2-8x+12$



$\text{Dom} f=\mathbb{R}$

$\text{Im} f=[-4,+\infty)$

Estrictamente decreciente $(-\infty,4)$.

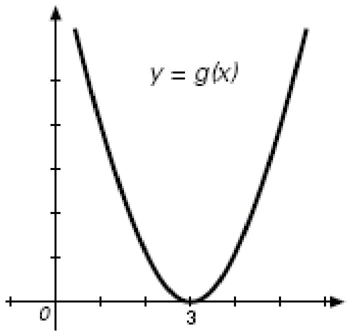
Estrictamente creciente $(4,+\infty)$.

Mínimo relativo en $(4,-4)$.

Está acotada inferiormente por (-4). Mínimo absoluto -4.

Es simétrica respecto a su eje $x=4$.

b) $g(x)=x^2-6x+9$



$\text{Dom} g=\mathbb{R}$

$\text{Im} g=[0,+\infty)$

Estrictamente decreciente $(-\infty,3)$.

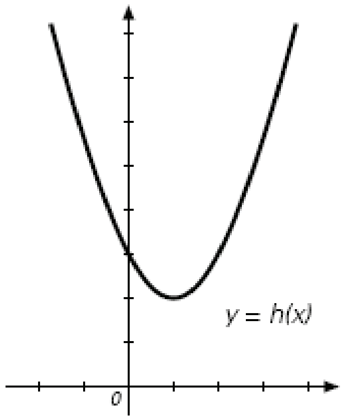
Estrictamente creciente $(3,+\infty)$.

Mínimo relativo en $(3,0)$.

Está acotada inferiormente por (0). Mínimo absoluto en 0.

Es simétrica respecto a su eje $x=3$.

c) $h(x)=x^2-2x+3$



$\text{Dom} h=\mathbb{R}$

$\text{Im} h=[2,+\infty)$

Estrictamente decreciente $(-\infty,1)$.

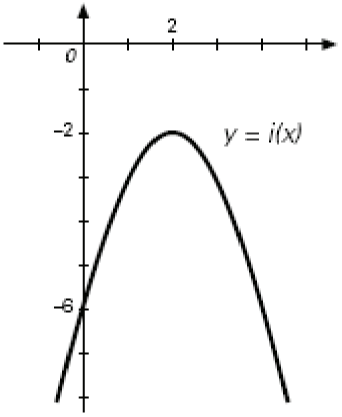
Estrictamente creciente $(1,+\infty)$.

Mínimo relativo en $(1,2)$.

Está acotada inferiormente por (2). Mínimo absoluto en 2.

Es simétrica respecto a su eje $x=1$.

d) $i(x) = -x^2 + 4x - 6$



Dom $i = \mathbb{R}$

Im $i = (-\infty, -2]$

Estrictamente creciente $(-\infty, 2)$.

Estrictamente decreciente $(2, +\infty)$.

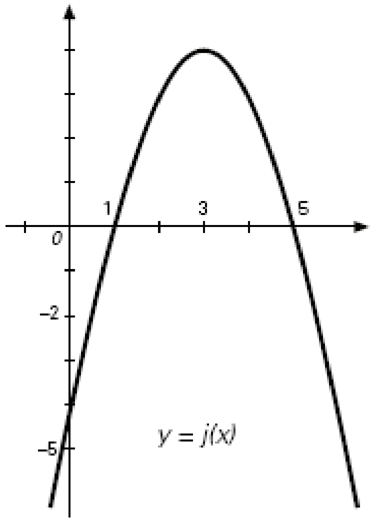
Máximo relativo en $(2, -2)$.

Está acotada superiormente por (-2).

Máximo absoluto en -2.

Es simétrica respecto a su eje $x = 2$.

e) $j(x) = -x^2 + 6x - 5$



Dom $j = \mathbb{R}$

Im $j = (-\infty, 4]$

Estrictamente creciente $(-\infty, 3)$.

Estrictamente decreciente $(3, +\infty)$.

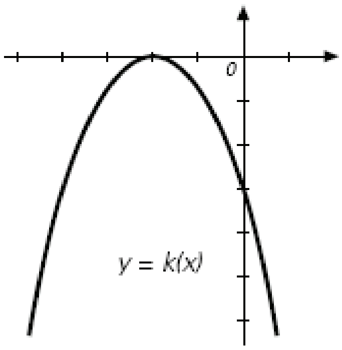
Máximo relativo en $(3, 4)$.

Está acotada superiormente por (4).

Máximo absoluto en 4.

Es simétrica respecto a su eje $x = 3$.

f) $k(x) = -x^2 - 4x - 4$



Dom $k = \mathbb{R}$

Im $k = (-\infty, 0]$

Estrictamente creciente $(-\infty, -2)$.

Estrictamente decreciente $(-2, +\infty)$.

Máximo relativo en $(-2, 0)$.

Está acotada superiormente por (0).

Máximo absoluto en 0.

Es simétrica respecto a su eje $x = -2$.

11. Las soluciones son:

a) $f(x)=ax^2+bx+c$

Imponiendo que pase por el punto (0,6), por el punto (2,2) y tiene en este último su vértice, obtenemos:

$$f(x)=x^2-4x+6$$

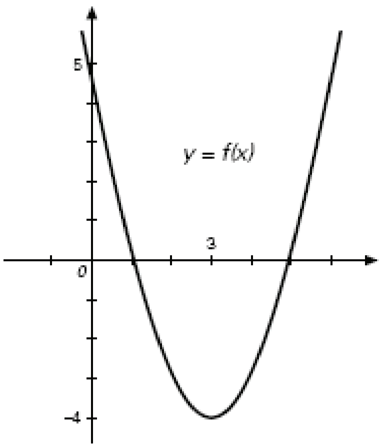
b) $g(x)=ax^2+bx+c$

Imponiendo que pase por el punto $(-1,0)$, $(-3,0)$ y tiene su vértice en $(-2,1)$, obtenemos:

$$g(x)=-x^2-2x-1$$

12. Hay infinitas soluciones. Todas las funciones cuadráticas de la forma: $y=K\left(x^2-1\right)$ con $K\in\mathbb{R}$.

13. La representación queda:



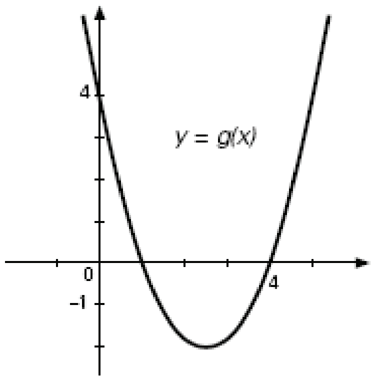
A la vista de la gráfica tenemos que:

$f(x)>0$ en $(-\infty,1)\cup(5,+\infty)$.

$f(x)<0$ en $(1,5)$.

$f(x)=0$ en $x=1$ y $x=5$.

14. Buscamos $f(x)=x^2-5x+6\geq 2 \Rightarrow x^2-5x+4\geq 0$. Para calcular los intervalos observamos la representación de dicha función:



Veamos los intervalos para los cuales la función $g(x)=x^2-5x+4\geq 0$.

En la gráfica se observa que:

$g(x)>0$ en $(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$.

$g(x)=0$ en $x=1$ y $x=4$.

Luego $f(x)\geq 2$ en $(-\infty,1]\cup[4,+\infty)$

15. La función que da el beneficio P en función del tiempo t en días es:

$$P = (10\,000 - 500t) \cdot (0{,}3 + 0{,}02t) = 3\,000 + 50t - 10t^2$$

Es una función cuadrática, y el beneficio será máximo en el vértice de la parábola, es decir, en $t = 2{,}5$ días, y el beneficio será: $P = 3\,062{,}5$ euros.

16. Los números que suman 18 son x y $(18 - x)$. Su producto es $P = x(18 - x) \Rightarrow P = -x^2 + 18x$.
Este producto será máximo en el vértice de la función, es decir, para $x = 9; y = 9$ y $P = 81$.

17. Se demuestra del siguiente modo:

• $f(x+z) = f(x) + f(z)$

$$\left.\begin{array}{l} f(x+z) = a(x+z)^2 = a(x^2 + 2xz + z^2) \\ f(x) + f(z) = ax^2 + az^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Luego } f(x+z) \neq f(x) + f(z)$$

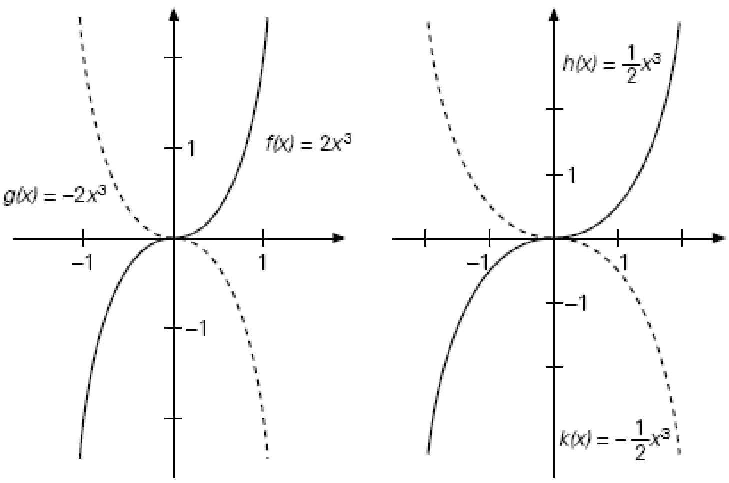
• $f(x \cdot z) = f(x) \cdot f(z)$

$$\left.\begin{array}{l} f(x \cdot z) = a(x \cdot z)^2 = a \cdot x^2 \cdot z^2 \\ f(x) \cdot f(z) = a^2 \cdot x^2 \cdot z^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Luego } f(x \cdot z) \neq f(x) \cdot f(z)$$

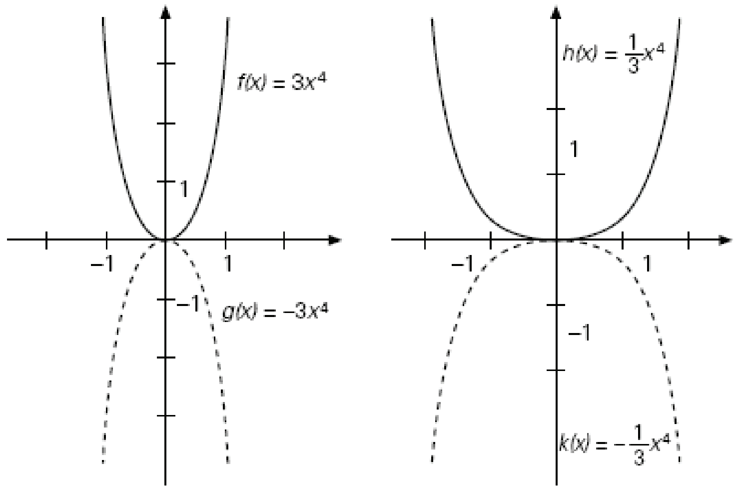
• $f(tx) = t \cdot f(x)$

$$\left.\begin{array}{l} f(tx) = a(tx)^2 = a \cdot t^2 \cdot x^2 \\ t \cdot f(x) = t\,ax^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Luego } f(tx) \neq t \cdot f(x)$$

18. Las representaciones quedan:



19. Las representaciones quedan:



20. La solución queda:

a) $\left.\begin{array}{l} y=x^2 \\ y=x^6 \end{array}\right\} \Rightarrow x^6 - x^2 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Los puntos de corte son: (0,0), (1,1) y (–1,1)

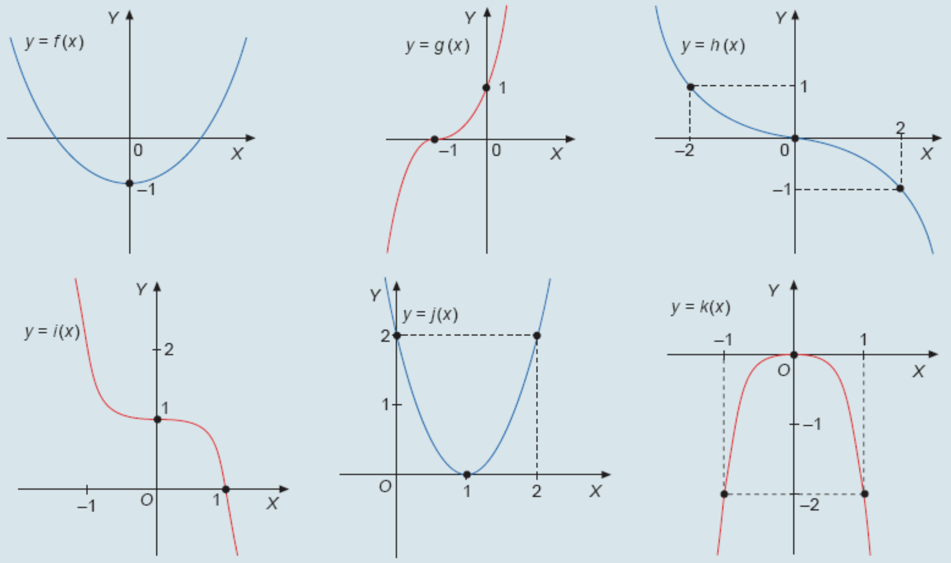
b) $\left.\begin{array}{l} y=x^5 \\ y=x^7 \end{array}\right\} \Rightarrow x^7 - x^5 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Los puntos de corte son: (0,0), (1,1) y (–1, – 1)

c) $\left.\begin{array}{l} y=x^2 \\ y=x^3 \end{array}\right\} \Rightarrow x^3 - x^2 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Los puntos de corte son: (0,0), (1,1)

PÁGINA 242

ACTIVIDADES FINALES

21. Asocia cada gráfica con su correspondiente expresión algebraica:



a) $y = -\dfrac{1}{8}x^3$

b) $y = -2x^4$

c) $y = 2\,(x-1)^2$

d) $y = x^4 - 1$

e) $y = (x+1)^7$

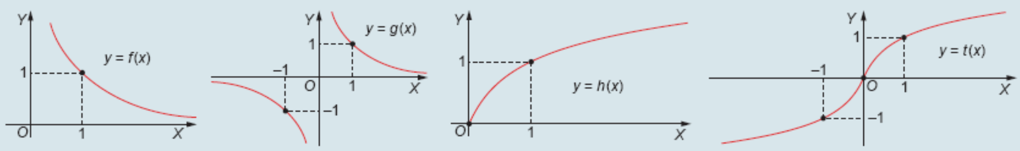
f) $y = -x^5 + 1$

22. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{4}{x^2}$ b) $y = \dfrac{-4}{x^3}$ c) $y = \dfrac{-1}{2x^2}$ d) $y = \dfrac{1}{2x^3}$

23. Asocia cada una de las siguientes gráficas con su expresión algebraica correspondiente:

a) $y = \sqrt[n]{x}$; n impar b) $y = \dfrac{1}{\sqrt[n]{x}}$; n par c) $y = \sqrt[n]{x}$; n par d) $y = \dfrac{1}{\sqrt[n]{x}}$; n impar



Puede serte útil recordar que las gráficas de una función y de su inversa son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

24. Apoyándote en las funciones, potenciales di cuántas soluciones reales tienen las ecuaciones siguientes, sin resolverlas:

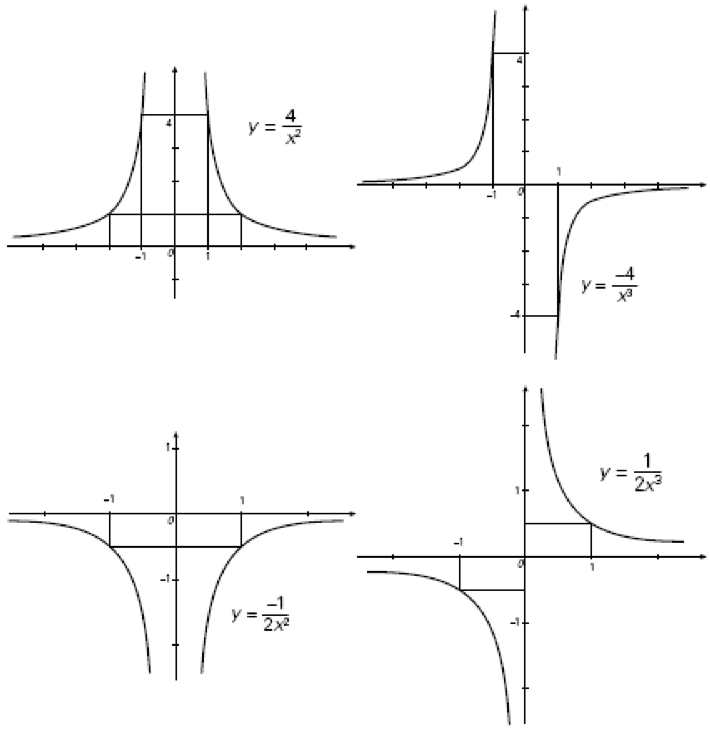
a) $\dfrac{1}{x^3} = x^3$ b) $\dfrac{1}{x^4} = x^2$ c) $\dfrac{1}{x^5} = x^2$

SOLUCIONES

21. La correspondencia queda:

$$y = f(x) = x^4 - 1 \quad \Rightarrow \quad (d)$$
$$y = g(x) = (x+1)^7 \quad \Rightarrow \quad (e)$$
$$y = h(x) = -\frac{1}{8}x^3 \quad \Rightarrow \quad (a)$$
$$y = i(x) = -x^5 + 1 \quad \Rightarrow \quad (f)$$
$$y = j(x) = 2(x-1)^2 \quad \Rightarrow \quad (c)$$
$$y = m(x) = -2x^4 \quad \Rightarrow \quad (b)$$

22. Las representaciones quedan:



23. La correspondencia queda:

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[n]{x}}$; con n par $\qquad g(x) = \dfrac{1}{\sqrt[n]{x}}$; con n impar

$h(x) = \sqrt[n]{x}$; con n par $\qquad k(x) = \sqrt[n]{x}$; con n impar

24. La solución queda:

a) $x = +1 \quad x = -1$ Dos soluciones
b) $x = +1 \quad x = -1$ Dos soluciones
c) $x = +1$ Una solución

PÁGINA 243

■ 25. Estudia los intervalos en los que se verifican las siguientes desigualdades:

a) $x^4 \leq 1$ b) $x^5 \leq 32$ c) $\frac{1}{x^2} \geq 4$

■ 26. Representa gráficamente, con ayuda de la calculadora, las siguientes funciones:

a) $f(x) = 4^x$ c) $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ e) $h(x) = \log_4 x$

b) $i(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$ d) $j(x) = 4^x + 2$ f) $k(x) = \log_4 x + 4$

■ 27. Usando las propiedades de las funciones exponencial y logarítmica, coloca el signo de desigualdad correspondiente en cada uno de los siguientes casos:

a) $\log_4 2{,}5 \square \log_4 3$ c) $\log_{\frac{1}{5}} 6 \square \log_{\frac{1}{5}} 4$ e) $0{,}5^3 \square 0{,}5^{-3}$

b) $2^3 \square 2^{-2}$ d) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \square \left(\frac{1}{5}\right)^2$ f) $\log_2 \frac{1}{4} \square \log_2 \frac{1}{8}$

■ 28. Los controles de calidad de una cadena de montaje de ordenadores han obtenido que el porcentaje de ordenadores que siguen funcionando al cabo de t años viene dado por:

$$p(t) = 100 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^t$$

a) Representa gráficamente esta función.

b) ¿Tiene sentido real toda la gráfica obtenida?

c) ¿Qué porcentaje de ordenadores siguen funcionando al cabo de dos años? ¿Y al cabo de cinco años?

d) ¿Qué significado tiene el punto de corte con el eje de ordenadas?

e) ¿Cuánto tiempo ha de pasar para que el porcentaje de ordenadores que sigan funcionando sea del 80%?

■ 29. La cantidad de madera de un bosque aumenta en un 50% cada 100 años. Tomando como punto de partida y como unidad de medida la cantidad de madera que había en este bosque en el año 1600 y como unidad de tiempo el siglo:

a) Determina la cantidad de madera que había o habrá en los años 1800, 2005 y 1900.

b) Encuentra la función correspondiente.

c) ¿Cuánta madera había en los años 1500, 1400, 1450 y 1000?

d) Averigua cuándo habrá una masa de madera doble que en 1600 y cuándo la mitad.

e) Averigua cada cuánto tiempo se triplica la cantidad de madera.

■ 30. Algunas flores como los tulipanes se reproducen por medio de bulbos. Supongamos que un bulbo de tulipán origina otros 5 nuevos que se plantan al año siguiente. Calcula el número de tulipanes que habrá al cabo de 5 años. ¿Cuántos años han de pasar para que haya 15 625 tulipanes? Encuentra la fórmula que describe la multiplicación de los tulipanes.

■ 31. Demuestra que si el punto (m, p) está en la gráfica de la función $y = a^x$, el punto $\left(-m, \frac{1}{p}\right)$ está también en su gráfica.

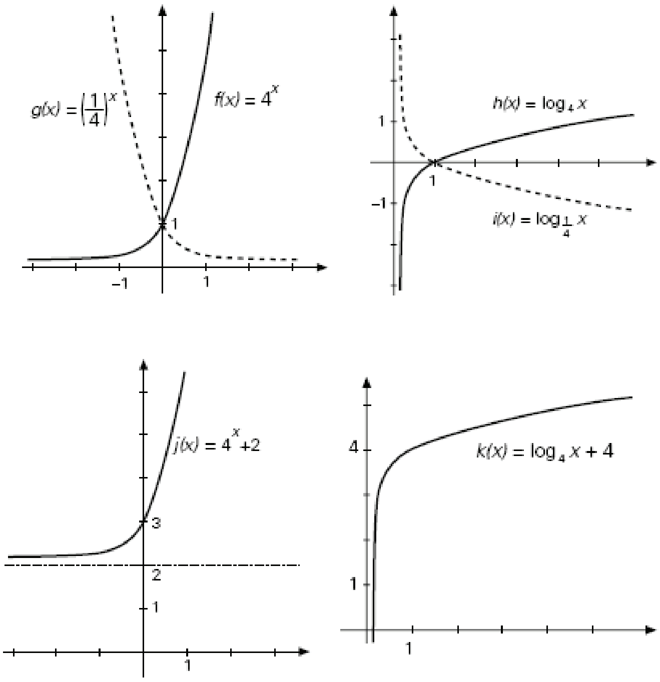
25. La verificación queda:

a) $x^4 \leq 1 \quad \Rightarrow$ Se verifica en $[-1,1]$

b) $x^5 \leq 32 \quad \Rightarrow$ Se verifica en $(-\infty, 2]$

c) $\dfrac{1}{x^2} \geq 4 \quad \Rightarrow$ Se verifica en $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right] - \{0\}$

26. La representación queda:



27. En cada uno de los casos queda:

a) $\log_4 2{,}5 < \log_4 3$

b) $2^3 > 2^{-2}$

c) $\log_{\frac{1}{5}} 6 < \log_{\frac{1}{5}} 4$

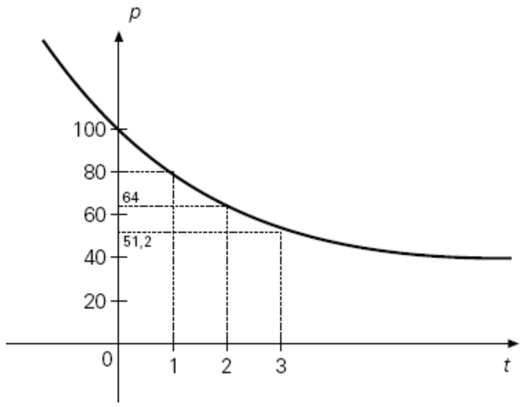
d) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2} > \left(\dfrac{1}{5}\right)^2$

e) $0{,}5^3 < 0{,}5^{-3}$

f) $\log_2 \dfrac{1}{4} > \log_2 \dfrac{1}{8}$

28. La solución queda:

a) La gráfica queda:



b) La parte negativa de a gráfica no tiene sentido.

En cada caso:

$t=2 \quad \Rightarrow \quad p=64\%$ siguen funcionando al cabo de 2 años.

$t=5 \quad \Rightarrow \quad p=32,768\%$ siguen funcionando al cabo de 5 años.

c) El punto de corte con el eje de ordenadas significa el 100% de ordenadores que funcionan en el momento de salir de la cadena de montaje.

29. La solución queda:

En el año 1 600 hay una unidad de madera.

En el año 1 800 había $(1+50\% \text{ de } 1)^2 = 1,5^2$ unidades de madera.

En el año 1 900 había $1,5^3$ unidades de madera.

En el año 2 005 había $1,5^{4,05}$ unidades de madera.

a) La función es $y=1,5^t$, con $t=$ siglos a partir de 1 600.

En el año 1 500 había $1,5^{-1}=0,667$ unidades de madera (u m).

En el año 1 400 había $1,5^{-2}=0,444$ u m.

En el año 1 450 había $1,5^{-1.5}=0,544$ u m.

En el año 1 000 había $1,5^{-6}=0,087$ u m.

b) Para que haya el doble de madera que en 1 600 se ha de verificar:

$$2 = 1{,}5^t \;\Rightarrow\; t = \frac{\log 2}{\log 1{,}5} = 1{,}710 \text{ siglos} \;\Rightarrow\; \text{Es decir, en el año } 1600 + 171 = 1771.$$

Para que haya la mitad de madera que en 1 600 se ha de verificar:

$$\frac{1}{2} = 1{,}5^t \;\Rightarrow\; t = \frac{\log 0{,}5}{\log 1{,}5} = -1{,}710 \text{ siglos} \;\Rightarrow\; \text{Es decir, en el año } 1600 - 171 = 1429.$$

c) Si consideramos la madera en un tiempo *t* como $1{,}5^t$ y queremos saber cuánto tiempo *t´* ha de pasar para que la madera se triplique, $3 \cdot 1{,}5^t$, obtenemos:

$$1{,}5^{t´+t} = 3 \cdot 1{,}5^t \;\Rightarrow\; 1{,}5^{t´} = 3 \;\Rightarrow\; t´ = 2{,}710 \text{ siglos}$$

Es decir, cada 2,710 siglos o 271 años, la madera se triplica.

30. La solución queda:

- La función que da el número de tulipanes al cabo de *t* años es: $N = 5^t$.
- Al cabo de 5 años habrá 3 125 tulipanes.
- Para que haya 15 625 tulipanes han de pasar: $15\,625 = 5^t \;\Rightarrow\; t = 6$ años.

31. La demostración queda:

Si (*m*, *p*) está en la gráfica de la función $y = a^x$ entonces:

$$y = a^x \;\Rightarrow\; p = a^m \;\Rightarrow\; \frac{1}{p} = \frac{1}{a^m} \;\Rightarrow\; \frac{1}{p} = a^{-m} \;\Rightarrow\; \left(-m, \frac{1}{p}\right) \text{ pertenece a la misma función } y = a^x$$

ACTIVIDADES FINALES

■ 32. A partir de las gráficas de las funciones circulares halla los valores de x en el intervalo $[0, 2\pi]$ que hagan ciertas las siguientes desigualdades:

a) $\cos x \leq -\frac{1}{2}$ b) $\text{tg}\, x > 1$ c) $2 > \text{sen}\, x$ d) $\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \geq 0$

■ 33. Utilizando las funciones multiformes adjuntas, calcula:

a) $\text{arcsen} -\frac{\sqrt{3}}{2}$

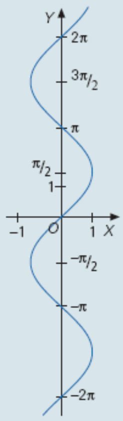
b) $\text{arctg}\, 1$

c) $\text{arccos}\, \frac{1}{2}$

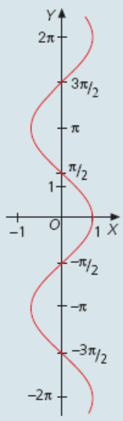
d) $\text{arctg}\, \sqrt{3}$

e) $\text{arcsen}\, \frac{1}{2}$

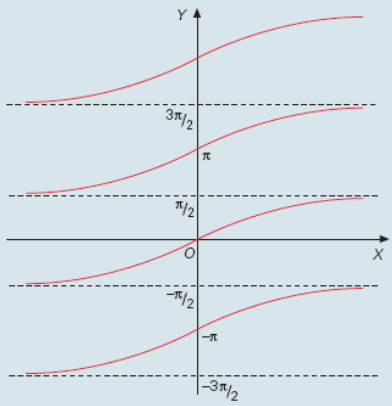
f) $\text{arccos}\, 0$



$y = \text{arcsen}\, x$



$y = \text{arccos}\, x$



$y = \text{arctg}\, x$

■ 34. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $y = \text{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)$ b) $y = \text{arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ c) $y = \text{arctg}\,(-1)$

■ 35. A partir de las gráficas de las funciones básicas, explica las gráficas de las siguientes funciones:

a) $y = x^4 - 2$ d) $y = (x-2)^3$ g) $y = \text{sen}\, x - 3$ j) $y = -2\cos x$

b) $y = \frac{1}{x^3} + 3$ e) $y = \frac{1}{(x+1)^4}$ h) $y = e^{x-1}$ k) $y = \text{sen}\, \frac{x}{2}$

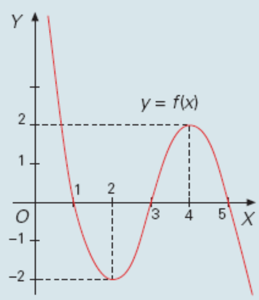
c) $y = \log_2 x + 2$ f) $y = \cos(x - \pi)$ i) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 2$ l) $y = \text{sen}\, 3x$

■ 36. ¿A partir de qué gráficas dibujarías las siguientes funciones? Explica cómo lo harías:

a) $y = (x-1)^2 + 4$ b) $y = \text{sen}\,(x + \pi) - 3$ c) $y = e^{x+2} - 2$

■ 37. A partir de la gráfica $y = f(x)$ adjunta, dibuja las gráficas de las funciones:

a) $y = f(x+2)$ b) $y = f(x) - 5$ c) $y = -f(x)$ d) $y = |f(x)|$



32. Queda en cada caso:

a) $\cos x \le -\dfrac{1}{2}$ en $\left[\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right]$

b) $\text{tg}\, x > 1$ en $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$

c) $2 > \text{sen}\, x$ en todo el intervalo $[0, 2\pi]$

d) $\cos x - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \ge 0$ en $\left[0, \dfrac{\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$

33. Queda:

a) $\text{arc sen}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \begin{cases} 240º + 360º\,K \\ 300º + 360º\,K \end{cases}$

b) $\text{arc tg}\, 1 = 45º + 180º\,K$

c) $\text{arc cos}\, \dfrac{1}{2} = \begin{cases} 60º + 360º\,K \\ 300º + 360º\,K \end{cases}$

d) $\text{arc tg}\, \sqrt{3} = 60º + 180º\,K$

e) $\text{arc sen}\, \dfrac{1}{2} = \begin{cases} 30º + 360º\,K \\ 150º + 360º\,K \end{cases}$

f) $\text{arc cos}\, 0 = 90º + 180º\,K$

34. Queda:

a) $y = \text{arc sen}\left(-\dfrac{1}{2}\right) \iff \text{sen}\, y = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} y = 210º + 360º\,K \\ y = 330º + 360º\,K \end{cases}$

b) $y = \text{arc cos}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \iff \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} y = 30º + 360º\,K \\ y = 330º + 360º\,K \end{cases}$

c) $y = \text{arc tg}\,(-1) \iff \text{tg}\, y = -1 \Rightarrow y = 135º + 180º\,K$

35. En cada caso queda:

a) Se obtiene de trasladar la gráfica $y = x^4$, 2 unidades hacia abajo.

b) Se obtiene de trasladar la gráfica $y = \frac{1}{x^3}$, 3 unidades hacia arriba.

c) Se obtiene de trasladar la gráfica $y = \log_2 x$, 2 unidades hacia arriba.

d) Se obtiene de trasladar la gráfica $y = x^3$, 2 unidades hacia la derecha.

e) Se obtiene de trasladar la gráfica $y = \frac{1}{x^4}$, 1 unidad hacia la izquierda.

f) Se obtiene de trasladar la gráfica $y = \cos x$, π unidades hacia la derecha.

g) Se obtiene de trasladar la gráfica $y = \operatorname{sen} x$, 3 unidades hacia abajo.

h) Se obtiene de trasladar la gráfica $y = e^x$, 1 unidad hacia la derecha.

i) Se obtiene de trasladar la gráfica $y = \cos x$, $\pi/2$ unidades hacia la izquierda y ésta 2 unidades hacia abajo.

j) Se obtiene a partir de la gráfica $y = \cos x$, multiplicando por -2 sus ordenadas.

k) Se obtiene a partir de la gráfica $y = \operatorname{sen} x$, con período $T = 4\pi$.

l) Se obtiene a partir de la gráfica $y = \operatorname{sen} x$, con período $T = \frac{2\pi}{3}$.

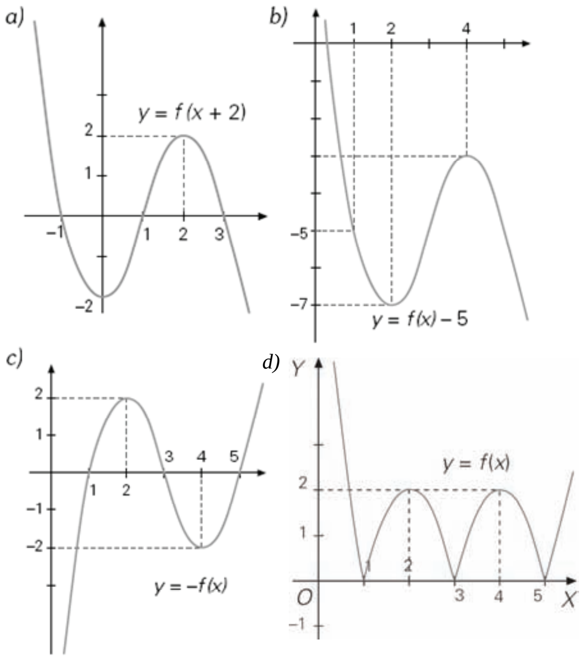
36. Decimos:

a) Se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = x^2$, 1 unidad hacia la derecha y ésta 4 unidades hacia arriba.

b) Se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = \operatorname{sen} x$, π unidades hacia la izquierda y ésta 3 unidades hacia abajo.

c) Se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = e^x$, 2 unidades hacia la izquierda y ésta 2 unidades hacia abajo.

37. Las resultantes quedan:

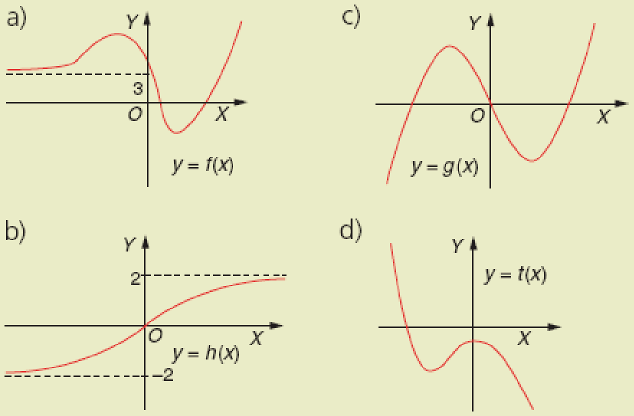


Unidad 11 – Límites de funciones. Continuidad

PÁGINA 247

cuestiones iniciales

1. Comenta la tendencia de las siguientes funciones:



SOLUCIONES

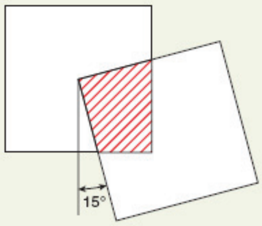
1. Podemos decir lo siguiente:

- $f(x)$ tiende a (3) cuando x tiende a $(-\infty)$ y tiende a $(+\infty)$ cuando x tiende a $(+\infty)$.
- $g(x)$ tiende a $(-\infty)$ cuando x tiende a $(-\infty)$ y tiende a $(+\infty)$ cuando x tiende a $(+\infty)$.
- $h(x)$ tiende a (-2) cuando x tiende a $(-\infty)$ y tiende a (2) cuando x tiende a $(+\infty)$.
- $t(x)$ tiende a $(+\infty)$ cuando x tiende a $(-\infty)$ y tiende a $(-\infty)$ cuando x tiende a $(+\infty)$.

PÁGINA 263

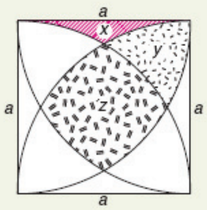
ACTIVIDADES

■ Practica esta estrategia en la resolución de los siguientes problemas:



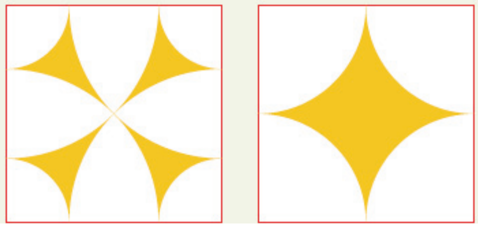
1. Cuadrados. Un cuadrado tiene uno de sus vértices en el centro de otro cuadrado del mismo lado que el anterior, como se muestra en la figura. ¿Cuánto vale el área de la región limitada por ambos?

2. Rosa de cuatro pétalos. La figura adjunta muestra una rosa de 4 pétalos, y corresponde al símbolo de una asociación. Esta asociación ha convocado un concurso que consiste en calcular el área de la rosa tomando una sola medida sobre ella. ¿Ganarías tú el concurso?



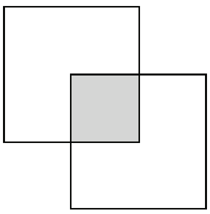
3. Cuadrado. En el cuadrado de la figura de lado, *a*, se han trazado arcos de circunferencia con centro en cada uno de los vértices del cuadrado y radio *a*. Halla el área de cada una de las regiones *x*, *y*, *z*.

4. Dos cuadrados separados. Los cuadrados de la figura tienen 10 m de lado. Calcula el área de las zonas sombreadas.



SOLUCIONES

1. La solución queda:

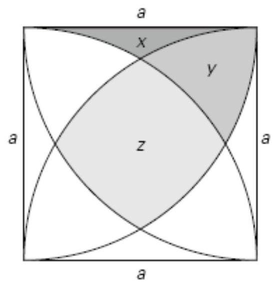


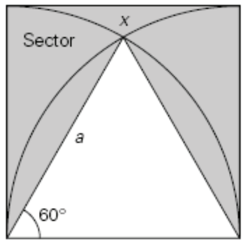
Basta con mover el cuadrado para ver que el área de la región limitada es la cuarta parte del cuadrado.

2. Basta conocer el lado del cuadrado que se forma dentro de la figura. La resolución nos recuerda al problema de los *perros guardianes*.

   El área de esta rosa de 4 pétalos es igual al área del cuadrado rayado más 4 veces el área de un pétalo. El área de un pétalo lo puedes encontrar en el problema de los *perros guardianes*.

3. La representación geométrica del problema así como su resolución quedan:

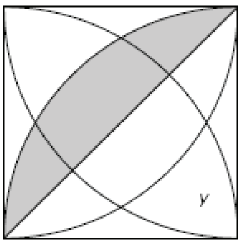




Los cálculos quedan:

$$\text{Área}(x) = \text{Área cuadrado} - \text{Área triángulo} - 2 \cdot \text{Área sector} =$$

$$= a^2 - \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} - 2 \cdot \frac{\pi \cdot a^2}{12} = \boxed{a^2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}\right)}$$



$$\text{Área}(\text{rayada}) = \frac{1}{4}\text{Área círculo} - \text{Área triángulo rectángulo} =$$

$$= \frac{\pi \cdot a^2}{4} - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

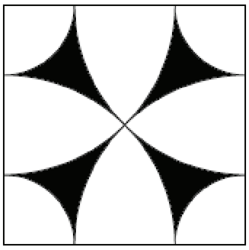
$$\text{Área}(\text{y}) = \text{Área triángulo rectángulo} - \text{Área}(\text{rayada}) - 2 \cdot \text{Área}(\text{x}) =$$

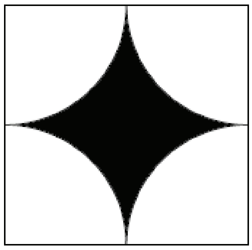
$$= \frac{a^2}{2} - \left(\frac{\pi \cdot a^2}{4} - \frac{a^2}{2}\right) - 2 \cdot a^2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \boxed{-a^2 + \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi \cdot a^2}{12}}$$

$$\text{Área}(\text{z}) = 2 \cdot \text{Área}(\text{rayada}) - 2 \cdot \text{Área}(\text{y}) = 2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot a^2}{4} - \frac{a^2}{2}\right) - 2 \cdot \left(-a^2 + \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi \cdot a^2}{12}\right) =$$

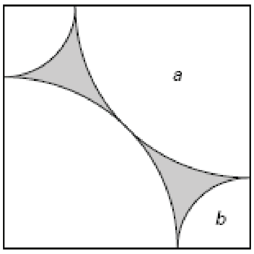
$$= \frac{\pi \cdot a^2}{2} - a^2 + 2a^2 - a^2\sqrt{3} - \frac{\pi \cdot a^2}{6} = \boxed{a^2 - a^2\sqrt{3} + \frac{\pi \cdot a^2}{3}}$$

4. Sean las figuras:

1) 

2) 

• En la figura (1) el área pedida es 2 veces el área de una de las aspas rayada en el dibujo adjunto.



$$\text{Área aspa} = \text{Área cuadrado} - 2 \cdot \text{Área}(a) - 2 \cdot \text{Área}(b)$$

Vamos a hallar el área de la zona (a).
El radio de esta zona es la mitad de la diagonal del cuadrado.

$$D = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2} \;\Rightarrow\; r = 5\sqrt{2} \quad \text{y} \quad \text{Área(a)} = \frac{1}{4}\pi \cdot r^2 = \frac{1}{4}\pi \cdot \left(5\sqrt{2}\right)^2 = \frac{50\pi}{4} = \frac{25\pi}{2}\,\text{m}^2$$

Ahora hallamos el área de la zona (b). El radio de esta zona es el lado del cuadrado menos el radio de la zona (a) $\Rightarrow r = 10 - 5\sqrt{2}.$

$$\text{Área(b)} = \frac{1}{4}\pi(10 - 5\sqrt{2})^2 = \frac{(75 - 50\sqrt{2})\,\pi}{4}\,\text{m}^2$$

El área del aspa queda:

$$\text{Área aspa} = 10^2 - 25\pi - (75 - 50\sqrt{2})\,\pi = 100 - 100\pi + 50\sqrt{2}\pi$$

El área pedida queda:

$$\text{Área pedida} = 2 \cdot \text{Área aspa} = 2 \cdot (100 - 100\pi + 50\sqrt{2}\pi) = 15{,}97\,\text{m}^2$$

$$\boxed{\text{Área pedida} = 15{,}97\,\text{m}^2}$$

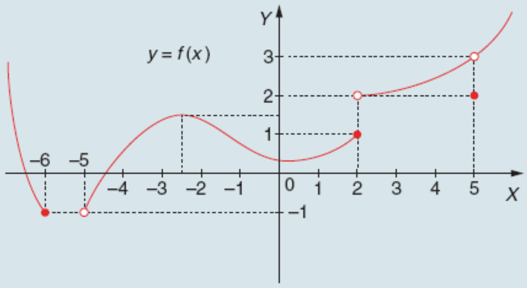
• En la figura (2) el área pedida es igual al área del cuadrado de lado 10 m menos el área del círculo de radio 5 m.

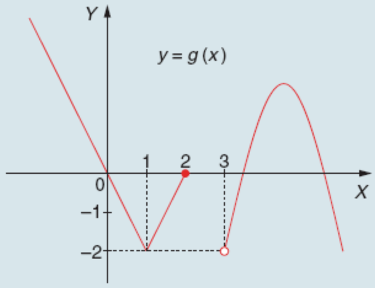
$$\text{Área figura(2)} = 10^2 - \pi \cdot 5^2 = 100 - 25\pi \;\Rightarrow\; \boxed{\text{Área figura(2)} = 21{,}46\,\text{m}^2}$$

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. En las siguientes funciones, cuyas gráficas se dan, calcula los valores pedidos:





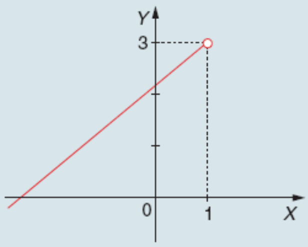
a) $f(2)$
b) $\lim\limits_{x\to -5^-} f(x)$
c) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$
d) $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$
e) $f(5)$
f) $\lim\limits_{x\to -5^+} f(x)$
g) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$
h) $\lim\limits_{x\to -2,5^+} f(x)$
i) $f(-5)$
j) $\lim\limits_{x\to -6^-} f(x)$
k) $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)$
l) $\lim\limits_{x\to -2,5} f(x)$
m) $g(1)$
n) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$
o) $\lim\limits_{x\to 3^+} g(x)$
p) $g(2)$
q) $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$
r) $\lim\limits_{x\to 3^-} g(x)$
s) $g(2,5)$
t) $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$
u) $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$

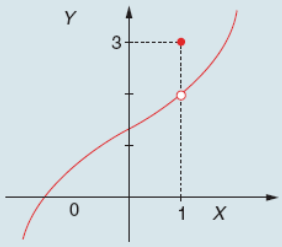
2. Identifica cada una de las tres expresiones siguientes con su gráfica correspondiente:

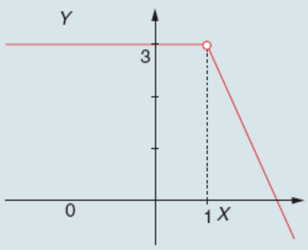
a) $\nexists \lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = 3$

b) $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 3$

c) $g(1) = 3$







3. Representa gráficamente funciones que satisfagan las siguientes condiciones:

a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -2$; $f(2) = 5$; Dom $f = \mathbb{R}$; Im $f = (-2, +\infty)$

b) $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 4$; $g(x)$ estrictamente creciente en $(-\infty, 1)$; Im $g = (-\infty, 4]$

c) $\lim\limits_{x\to 2^-} h(x) = 3$; $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x) = 5$; $h(2) = 3$; Dom $h = [0, 3]$

d) $\lim\limits_{x\to -1} t(x) = \lim\limits_{x\to 0} t(x) = \lim\limits_{x\to 1} t(x)$

e) $l(x) > 0 \quad \forall x > 2$; $l(x) \le 0 \quad \forall x < 2$; $\nexists \lim\limits_{x\to 2} l(x)$

f) Dom $j = \mathbb{R} - (2, 3]$; Im $j = \mathbb{R}$; $\lim\limits_{x\to 2^-} j(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to 3^+} j(x) = -2$; $j(0) = 0$

SOLUCIONES

1. Las soluciones quedan:

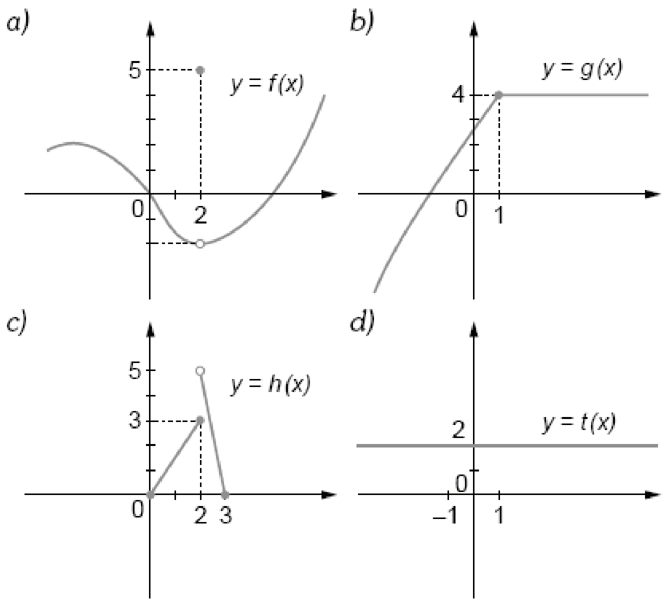
- $f(2)=1;\quad f(5)=2;$ $\quad f(-5)$ no definida;
  $f(-6)=-1;$ $\quad \lim\limits_{x\to -5^-} f(x)$ no existe;
  $\lim\limits_{x\to -5^+} f(x)=-1;$ $\quad \lim\limits_{x\to -6^-} f(x)=-1;$
  $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=2;$ $\quad \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=1;$
  $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=3;$ $\quad \lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=3;$
  $\lim\limits_{x\to -2,5^+} f(x)=1,5;$ $\quad \lim\limits_{x\to -2,5} f(x)=1,5$

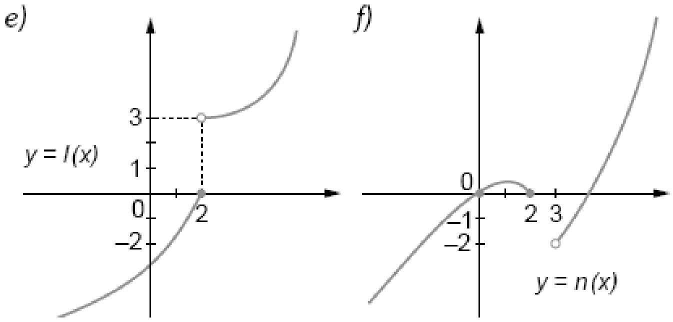
- $g(1)=-2;\quad g(2)=0;$ $\quad g(2,5)$ no existe;
  $g(3)$ no existe; $\quad \lim\limits_{x\to 1} g(x)=-2;$
  $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=0;$ $\quad \lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$ no existe;
  $\lim\limits_{x\to 3^+} g(x)=-2;$ $\quad \lim\limits_{x\to 3^-} g(x)$ no existe;
  $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$ no existe

2. Las correspondencias quedan:

   a) $\nexists \lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=3$ b) $g(1)=3$ c) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=3$

3. Las gráficas quedan:

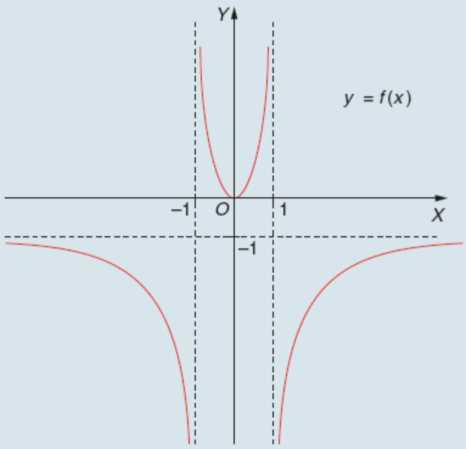


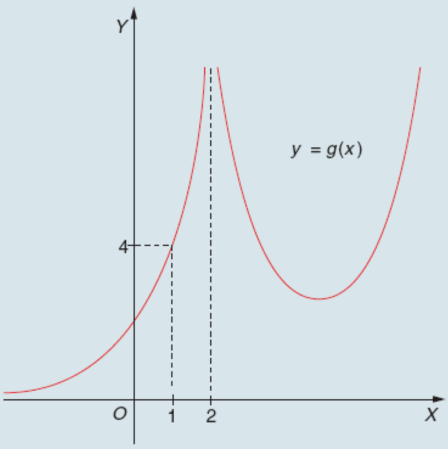


e)
3
y = l(x)
1
0
2
–2
f)
0
–1
2
3
–2
y = n(x)

PÁGINA 267

4. En las siguientes funciones, cuyas gráficas se dan, calcula los valores pedidos:





a) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

d) Ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales, si es que existen

e) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$

f) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

h) $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x)$

i) $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$

j) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

k) Ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales, si es que existen

l) $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x)$

m) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$

n) $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$

5. Representa gráficamente funciones que satisfagan las siguientes condiciones:

a) Asíntota vertical en $x = -2$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

b) $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to 3^+} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 3^-} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

c) $h(-4) = 2$; $\lim\limits_{x \to -2^-} h(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^+} h(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^-} h(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to 2^+} h(x) = -1$

d) $t(0) = 1$; $\lim\limits_{x \to 0^+} t(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2} t(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to 3^-} t(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} t(x) = +\infty$

6. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to 0} 2$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-5}$

c) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{1}{x^2}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^5$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-7)$

f) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^{10}}$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^{10}}$

h) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^{13}}$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^{13}}$

j) $\lim\limits_{x \to -1} x^6$

k) $\lim\limits_{x \to 0^-} x^3$

l) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^6}$

m) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^7}$

n) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^7}$

o) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^6$

p) $\lim\limits_{x \to 1} x$

4. Las respuestas quedan:

a) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$

d) Asíntota horizontal: $y = -1$.
Asíntotas verticales: $x = -1$; $x = 1$.

e) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

f) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

h) $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = +\infty$

i) $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = +\infty$

j) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

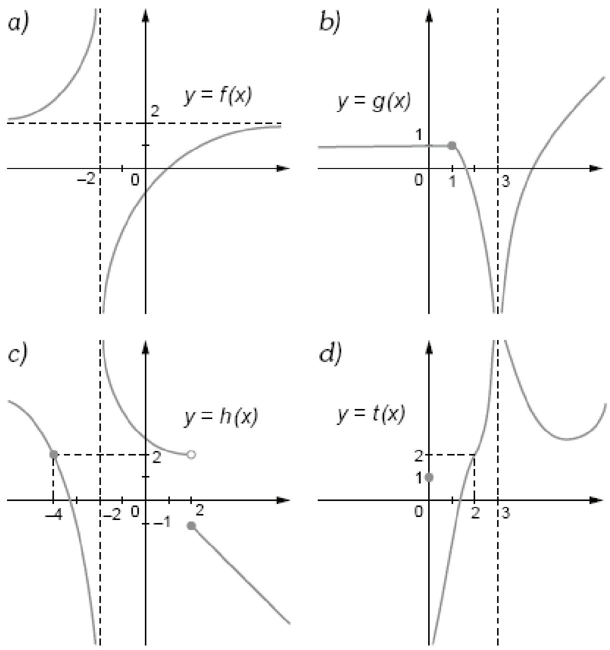
k) Asíntota horizontal: $y = 0$.
Asíntota vertical: $x = 2$.

l) $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = +\infty$

m) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$

n) $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 4$

5. Las representaciones quedan:



6. Los resultados son:

a) $\lim\limits_{x \to 0} 2 = 2$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-5} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{9}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^5 = -\infty$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-7) = -7$

f) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^{10}} = +\infty$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^{10}} = 0$

h) $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^{13}} = -\infty$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{13}} = 0$

j) $\lim\limits_{x \to -1} x^6 = +1$

k) $\lim\limits_{x \to 0^-} x^3 = 0$

l) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^6} = +\infty$

m) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^7} = +\infty$

n) $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^7} = -\infty$

o) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^6 = +\infty$

p) $\lim\limits_{x \to 1} x = 1$

PÁGINA 268

ACTIVIDADES FINALES

7. Se da la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si} \quad x < -1 \\ -3 & \text{si} \quad -1 \le x < 2 \\ x + 1 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

Calcula:

a) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ d) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ e) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ f) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ g) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ h) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Comprueba los resultados obtenidos por medio de la gráfica.

8. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x^3 - 7x + 2)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{3x^2 - 5x + 2}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} (4x^4 - 7x + 5)$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} (-3x^5 + 2x - 4)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x^2 + 3x - 2)$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2 - 7x + 5}{-2x^2 + 4x - 3}$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 7}}{2x}$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^4 - 3x^2 + 2}}{\sqrt[3]{4x^2 + 5}}$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{2x} - 5}$

j) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^5 - 2x + 1}{7x^4 - 2x^2}$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x^2 - 5x + 1}{2x^3 - 3}$

l) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2}{1 - x^3}$

9. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3 - 1}{x^3 + 2x^2 - 3x}$

b) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2 + x}{x^3 - 2x^2 + x}$

c) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^2 - 9}{5x^2 - 13x - 6}$

d) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^4 - 1}{x^3 + 1}$

e) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^4 - 3x^2}{x^2 + x}$

f) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 4}$

g) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1 - x} - 1}{2x}$

h) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}$

i) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x^2 - 9}$

j) $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{3 - \sqrt{5 + x}}{2 - \sqrt{8 - x}}$

k) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{2 - x} - \sqrt{2 + x}}{x^2 + x}$

l) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt{x + 2} - 2}{\sqrt{2x} - 2}$

10. Calcula el siguiente límite $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$, siendo $f(x) = 2x^2 + 1$.

11. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$

b) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{2 + x}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x + 5}{|x - 3|}$

d) $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{2}{x^3} \cdot \dfrac{x^2 + 2x}{3}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2}{x + 1} \cdot \sqrt{x^2 + 1}\right)$

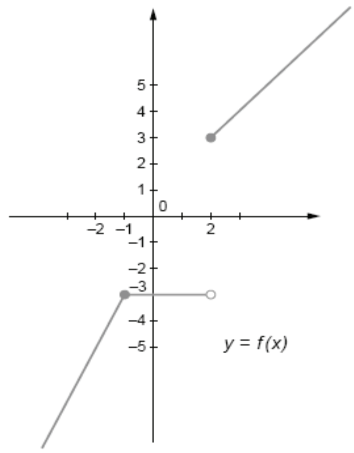
f) $\lim\limits_{x\to0} \left[\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{1}{x + 2} - \dfrac{1}{x^2 + 2}\right)\right]$

7. Los límites y la gráfica quedan:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(2x-1)=-3\\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(-3)=-3\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to -1} f(x)=-3$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(-3)=-3\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x+1)=3\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)\text{ no existe}$$

$$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty; \qquad \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$$



8. Los límites quedan:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}[2x^3-7x+2]=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2}{3x^2-5x+2}=0$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty}[4x^4-7x+5]=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty}[-3x^5+2x-4]=+\infty$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}[-x^2+3x-2]=-\infty$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2-7x+5}{-2x^2+4x-3}=-1$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+7}}{2x}=\dfrac{1}{2}$

h) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^4-3x^2+2}}{\sqrt[3]{4x^2+5}}=+\infty$

i) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{2x}-5}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

j) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^5-2x+1}{7x^4-2x^2}=-\infty$

k) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-x^2-5x+1}{2x^3-3}=0$

l) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-2}{1-x^3}=0$

9. Los límites quedan:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^3+2x^2-3x}\boxed{\tfrac{0}{0}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x(x-1)(x+3)}=\dfrac{3}{4}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{x^3-2x^2+x}\boxed{\tfrac{0}{0}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+1)}{x(x^2-2x+1)}=1$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{5x^2-13x-6}\boxed{\tfrac{0}{0}}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(5x+2)}=\dfrac{6}{17}$

d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-1}{x^3+1}\boxed{\tfrac{0}{0}}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x-1)(x^2+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\dfrac{-4}{3}$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{x^4-3x^2}{x^2+x} \boxed{\frac{0}{0}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(x^2-3)}{x(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x^2-3)}{x+1} = 0$

f) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4} \boxed{\frac{0}{0}} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)^2} = -\infty$

g) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{2x} \boxed{\frac{0}{0}} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1-x}+1)}{2x(\sqrt{1-x}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-x-1}{2x(\sqrt{1-x}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{2(\sqrt{1-x}+1)} = \frac{-1}{4}$

h) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} \boxed{\frac{0}{0}} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} \boxed{\frac{0}{0}} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = 4$

i) $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-9} \boxed{\frac{0}{0}} = \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(x^2-9)(\sqrt{x}+\sqrt{3})} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{(x^2-9)(\sqrt{x}+\sqrt{3})} \boxed{\frac{0}{0}}$

$= \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})} = \frac{1}{12\sqrt{3}}$

j) $\lim_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{2-\sqrt{8-x}} \boxed{\frac{0}{0}} = \lim_{x\to 4} \frac{(3-\sqrt{5+x})(3+\sqrt{5+x})(2+\sqrt{8-x})}{(2-\sqrt{8-x})(2+\sqrt{8-x})(3+\sqrt{5+x})} = \lim_{x\to 4} \frac{(4-x)(2+\sqrt{8-x})}{(x-4)(3+\sqrt{5+x})} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$

k) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{x^2+x} \boxed{\frac{0}{0}} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x})(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x})}{(x^2+x)(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x})}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{-2x}{(x^2+x)(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x})} \boxed{\frac{0}{0}} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x}{x(x+1)(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x})} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

l) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x}-2} \boxed{\frac{0}{0}} = \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)(\sqrt{2x}+2)}{(\sqrt{2x}-2)(\sqrt{2x}+2)(\sqrt{x+2}+2)} =$

$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(\sqrt{2x}+2)}{(2x-4)(\sqrt{x+2}+2)} \boxed{\frac{0}{0}} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(\sqrt{2x}+2)}{2(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

10. El límite queda:

Si $f(x)=2x^2+1 \Rightarrow f(2)=2\cdot 2^2+1=9 \Rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(2x^2+1)-9}{x-2} =$

$= \lim_{x\to 2} \frac{2x^2-8}{x-2} \boxed{\frac{0}{0}} = \lim_{x\to 2} \frac{2(x-2)(x+2)}{x-2} = 8$

11. Los límites quedan:

a) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2+1}{x-1} = -\infty;\ \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2+1}{x-1} = +\infty \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+1}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{2+x}{x^2} = +\infty;\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2+x}{x^2} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2+x}{x^2} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x+5}{|x-3|} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{2}{x^3} \cdot \dfrac{x^2+2x}{3} \right] \boxed{\infty \cdot 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\,(x^2+2x)}{3x^3} \boxed{\tfrac{0}{0}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 \cdot x\,(x+2)}{3x^3} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{2}{x+1} \cdot \sqrt{x^2+1} \right] \boxed{\infty \cdot 0} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\sqrt{x^2+1}}{x+1} \boxed{\tfrac{\infty}{\infty}} = 2$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{1}{x^2} \left(\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x^2+2} \right) \right] \boxed{\infty \cdot 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2-x}{x^2\,(x+2)\,(x^2+2)} \boxed{\tfrac{0}{0}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\,(x-1)}{x^2\,(x+2)\,(x^2+2)} \to$ no existe

PÁGINA 269

■ 12. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2+2x-3}-3x\right)$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\sqrt{x}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\right]$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+2}{x+1}-\dfrac{x^2+1}{x}\right)$

■ 13. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{5x-2}{5x+3}\right)^{3x}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{5}{2x}\right)^{x^2}$ g) $\lim\limits_{x\to 0} (1+3x)^{\frac{2}{x}}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x-7}{2x}\right)^{\frac{3x^2+1}{2x}}$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x^2-6x}{2x^2-x-5}\right)^{\frac{x^2}{2}}$ h) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)^{\frac{x^2+3}{x-1}}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{3x}{x+5}\right)^{4x}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{4-3x}{5-3x}\right)^{x-3}$ i) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{4x^2-2}{2x^2+1}\right)^{x+3}$

■ 14. Halla los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4-(x+2)^2}{x^3}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{\dfrac{x-2}{x+5}}\right)^{x}$ g) $\lim\limits_{x\to 3} (x-2)^{\frac{5}{x^2-9}}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1}\right)$ e) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$ h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^4-x^3}-\sqrt{x^4-1}}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x^2+5}{3x^2-5}\right)^{x+2}$ f) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x-2|}{x-2}$

■ 15. Calcula a y b, para que $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(ax+b-\dfrac{x^2+2}{x+2}\right)=0.$

■ 16. Dada la funciúon $f(x)=\sqrt{2x+3}$, calcula:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

■ 17. Calcula el valor de a que haga cierta la siguiente igualdad:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3+5x^2}{3x+5x^2}\right)^{ax}=e^6$$

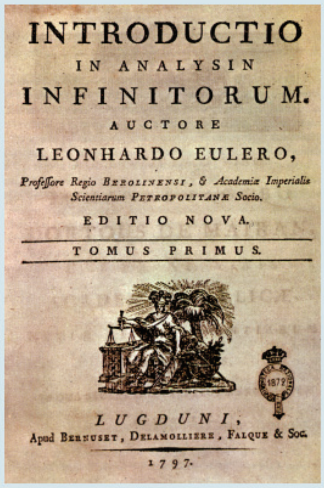
■ 18. Se da la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x<0 \\ 3-3x & \text{si} \quad 0\le x<3 \\ -2x & \text{si} \quad x\ge 3 \end{cases}$$

Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ e) $f(0)$ f) $f(1)$ g) $f(3)$

A la vista de los resultados obtenidos estudia la continuidad de la función.



↑ Portada de la obra de Leonhard Euler (1707-1783), significativa para la evolución del análisis matemático.

12. Los límites quedan:

a) $$\lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{9x^2+2x-3} - 3x \right] \boxed{\infty-\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{9x^2+2x-3} - 3x\right)\left(\sqrt{9x^2+2x-3} + 3x\right)}{\left(\sqrt{9x^2+2x-3} + 3x\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x-3}{\sqrt{9x^2+2x-3} + 3x} \boxed{\frac{\infty}{\infty}} = \frac{2}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{3}$$

b) $$\lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x} \left[\sqrt{x+3} - \sqrt{x} \right] \right] = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+3x} - x \boxed{\infty-\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+3x} - x\right)\left(\sqrt{x^2+3x} + x\right)}{\sqrt{x^2+3x} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+3x} + x} \boxed{\frac{\infty}{\infty}} = \frac{3}{2}$$

c) $$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2+2}{x+1} - \frac{x^2+1}{x} \right] \boxed{\infty-\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\,(x^2+2) - (x+1)\,(x^2+1)}{x\,(x+1)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2+x-1}{x^2+x} \boxed{\frac{\infty}{\infty}} = -1$$

13. Los límites quedan:

a) $$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{5x-2}{5x+3} \right]^{3x} \boxed{1^{\infty}} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} 3x \left(\frac{5x-2}{5x+3} - 1 \right)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-15x}{5x+3}} = e^{-3}$$

b) $$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{2x-7}{2x} \right]^{\frac{3x^2+1}{2x}} \boxed{1^{\infty}} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2+1}{2x} \left(\frac{2x-7}{2x} - 1 \right)} = e^{-\frac{21}{4}}$$

c) $$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{3x}{x+5} \right]^{4x} = +\infty$$

d) $$\lim_{x \to +\infty} \left[1 + \frac{5}{2x} \right]^{x^2} \boxed{1^{\infty}} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \left(1 + \frac{5}{2x} - 1 \right)} = e^{+\infty} = +\infty$$

e) $$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{2x^2-6x}{2x^2-x-5} \right]^{\frac{x^2}{2}} \boxed{1^{\infty}} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{2} \left(\frac{2x^2-6x}{2x^2-x-5} - 1 \right)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-5x^3+5x^2}{4x^2-2x-10}} = e^{-\infty} = 0$$

f) $$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{4-3x}{5-3x} \right]^{x-3} \boxed{1^{\infty}} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} (x-3) \left(\frac{4-3x}{5-3x} - 1 \right)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-x+3}{5-3x}} = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$$

g) $\lim\limits_{x \to 0} [1+3x]^{\frac{2}{x}} \boxed{1^{\infty}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{2}{x}(1+3x-1)} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{6x}{x}} = e^{6}$

h) $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{x^2+1}{x+1}\right]^{\frac{x^2+3}{x-1}} \boxed{1^{\infty}} = e^{\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+3}{x-1}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x \to 1} \frac{(x^2+3)(x^2-x)}{(x-1)(x+1)}} = e^{\lim\limits_{x \to 1} \frac{(x^2+3)\cdot x \cdot (x-1)}{(x-1)(x+1)}} = e^{2}$

i) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\dfrac{4x^2-2}{2x^2+1}\right]^{x+3} = 2^{-\infty} = 0$

14. Los límites quedan:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4-(x+2)^2}{x^3} \boxed{\tfrac{0}{0}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x^2-4x}{x^3} \boxed{\tfrac{0}{0}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x-4}{x^2} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{3}{x^3-1}\right) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+x+1-3}{x^3-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^3-1} \boxed{\tfrac{0}{0}} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+2}{x^2+x+1} = 1$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x^2+5}{3x^2-5}\right)^{x+2} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\dfrac{x-2}{x+5}}\right)^{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x-2}{x+5}\right)^{\frac{x}{2}} \boxed{1^{\infty}} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x-2}{x+5}-1\right)\cdot\frac{x}{2}} = e^{-7/2}$

e) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}} \boxed{\tfrac{0}{0}} = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\left(3^2-\left(\sqrt{5+x}\right)^2\right)\left(1+\sqrt{5-x}\right)}{\left(1^2-\left(\sqrt{5-x}\right)^2\right)\left(3+\sqrt{5+x}\right)} = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(4-x)\left(1+\sqrt{5-x}\right)}{(x-4)\left(3+\sqrt{5+x}\right)} = -\dfrac{1}{3}$

f) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{|x-2|}{x-2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x-2}{x-2} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{-x+2}{x-2} = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{|x-2|}{x-2}$

g) $\lim\limits_{x \to 3} (x-2)^{\frac{5}{x^2-9}} \boxed{1^{\infty}} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} (x-2-1)\cdot\frac{5}{x^2-9}} = e^{5/6}$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^4-x^3}-\sqrt{x^4-1}} \boxed{\infty - \infty} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\left(\sqrt{x^4-x^3}+\sqrt{x^4-1}\right)}{1-x^3} \boxed{\tfrac{\infty}{\infty}} = -2$

15. Queda:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[ax+b-\frac{x^2+2}{x+2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(ax+b)\,(x+2)-(x^2+2)}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a-1)\,x^2+(2a+b)\,x+2b-2}{x+2}=0$$

Debe ocurrir $\Rightarrow \begin{cases} a-1=0 \\ 2a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=1 \\ b=-2 \end{matrix}$

16. Queda:

$$f(x)=\sqrt{2x+3} \;\Rightarrow\; f(x+h)=\sqrt{2\,(x+h)+3}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2\,(x+h)+3}-\sqrt{2x+3}}{h}\boxed{\frac{0}{0}}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{2x+2h+3}-\sqrt{2x+3}\right)\left(\sqrt{2x+2h+3}+\sqrt{2x+3}\right)}{h\left(\sqrt{2x+2h+3}+\sqrt{2x+3}\right)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h\left(\sqrt{2x+2h+3}+\sqrt{2x+3}\right)}=\frac{2}{2\sqrt{2x+3}}=\frac{1}{\sqrt{2x+3}}$$

17. Queda:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3+5x^2}{3x+5x^2}\right)^{ax}\boxed{1^{\infty}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty} ax\left(\frac{3+5x^2}{3x+5x^2}-1\right)}=e^{\frac{-3a}{5}} \;\Rightarrow\; a=-10$$

18. Se calcula del siguiente modo:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(x^2+1\right)=1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(3-3x\right)=3$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\left(3-3x\right)=0$$

$$\lim_{x\to 3} f(x)\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-6\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=-6\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to 3} f(x)=-6$$

$f(0)=3;\quad f(1)=0;\quad f(3)=-6$

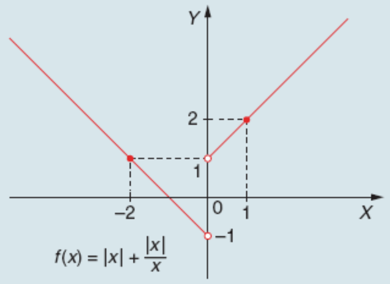
La función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$

PÁGINA 270

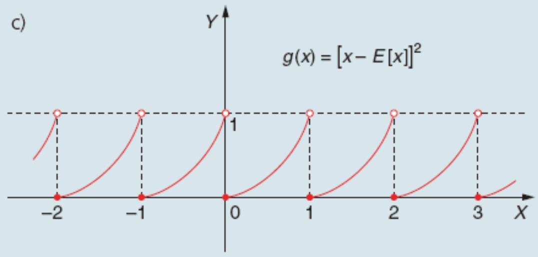
ACTIVIDADES FINALES

■ 19. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

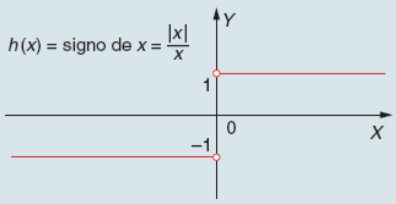
a)



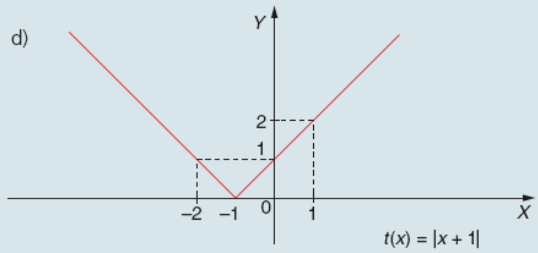
c)



b)



d)



■ 20. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 9}$

b) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

c) $f(x) = e^{2x} - 3$

d) $f(x) = x \cdot \ln(2x + 6)$

e) $f(x) = 3 \operatorname{sen}(x + \pi)$

f) $f(x) = \operatorname{tg} 2x$

■ 21. Estudia la continuidad de las siguientes funciones definidas a trozos:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si} \quad x < 2 \\ x - 2 & \text{si} \quad 2 \leq x \leq 4 \\ 5 & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{x - 5} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \sqrt{x + 1} & \text{si} \quad 0 < x \leq 3 \\ x - 1 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$

■ 22. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{2x - 6}$ en $x = 3$. En caso de presentar discontinuidad evitable, redefínela para que sea continua en $x = 3$.

■ 23. Determina el parámetro a para el cual cada una de las siguientes funciones es continua en su dominio de definición:

a) $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{4}{x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} e^{x-2} & \text{si} \quad x < 2 \\ a + \ln(x - 1) & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$

19. El estudio queda:

a) $f(x)=|x|+\frac{|x|}{x}$ no es continua en $x=0$, pues no está definida en dicho punto.

b) $g(x)=\left[x-E[x]\right]^2$ es discontinua en todos los puntos de la abscisa entera.

c) $h(x)$ no es continua en $x=0$, pues no está definida en dicho punto.

d) $t(x)$ es continua en toda la recta real.

20. La solución queda:

a) $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{-3,3\}$

b) $f(x)$ es continua en $[-2,2]$

c) $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$

d) $f(x)$ es continua en $(-3,+\infty)$

e) $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$

f) $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{4}+K\cdot\frac{\pi}{2}\right\}$

21. En cada caso queda:

Veamos la continuidad de $f(x)$ en $x=2$ y $x=4$.

$f(2)=0$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x^2-4\right)=0\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(x-2\right)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=0=f(2)=0 \Rightarrow \text{Luego } f(x) \text{ es continua en } x=2.$$

$f(4)=2$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}\left(x-2\right)=2\\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+} 5=5\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 4} f(x) \Rightarrow \text{Luego } f(x) \text{ no es continua en } x=4.$$

Veamos la continuidad de $g(x)$ en $x=0$ y $x=3$.

$g(0)=-1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{5}{x-5}=-1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x+1}=1\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} g(x) \Rightarrow \text{Luego } g(x) \text{ no es continua en } x=0.$$

$g(3)=2$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\sqrt{x+1}=2\\ \lim\limits_{x\to 3^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{10}{x+2}=2\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 3} g(x)=g(3)=2 \Rightarrow \text{Luego } g(x) \text{ es continua en } x=3.$$

22. La solución es:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{2x-6} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{2(x-3)} = \frac{6}{2} = 3. \Rightarrow$$ En $x=3$ tiene una discontinuidad evitable.

La redefinimos: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{2x-6} & \text{si } x \neq 3 \\ 3 & \text{si } x = 3 \end{cases}$

23. La solución es:

Estudiamos la continuidad en $x=1$.

$f(1) = a-2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} \left(ax^2-2\right) = a-2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{4}{x} = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow a-2=4 \Rightarrow a=6$$

Estudiamos la continuidad en $x=2$.

$f(2) = a$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^+} \left(a+\ln(x-1)\right) = a \\ \lim\limits_{x\to 2^-} e^{x-2} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a=1$$

Unidad 12 – Introducción a las derivadas.

PÁGINA 273

cuestiones iniciales

1. Calcula los siguientes límites:

a) $f(x) = 3x^2 + 5;\ \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$

b) $g(x) = \sqrt{3x+1};\ \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}$

2. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2, -3)$ y su pendiente vale $-\dfrac{1}{5}$. Halla la perpendicular a esta recta en el punto A.

3. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x^2 - 4x + 6$ en el punto $P(0, 6)$.

4. Calcula la tasa de variación media en los intervalos $[0, 2]$ y $[2, 4]$ para cada una de las siguientes funciones:

a) $f_1(x) = 3x$ b) $f_2(x) = 3x + 2$ c) $f_3(x) = x^3$ d) $f_4(x) = 3^x$

SOLUCIONES

1. Los límites quedan:

a) $$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(2+h)^2+5-17}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{12h+3h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(12+3h)}{h} = 12$$

b) $$\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{3(x+h)+1}-\sqrt{3x+1}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left(\sqrt{3x+3h+1}\right)^2-\left(\sqrt{3x+1}\right)^2}{h \cdot \left(\sqrt{3x+3h+1}+\sqrt{3x+1}\right)} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{3h}{h\left(\sqrt{3x+3h+1}+\sqrt{3x+1}\right)} = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$$

2. Las ecuaciones de cada una de las rectan quedan:

- La primera ecuación es: $y+3 = -\dfrac{1}{5}(x-2) \ \Rightarrow\ x+5y+13=0$
- La recta perpendicular tendrá pendiente 5. Su ecuación es: $y+3=5(x-2) \ \Rightarrow\ 5x-y-13=0$

3. La ecuación pedida es: $y = 6-4x$.

4. En cada uno de los intervalos queda:

a) $t_{vm}[0,2]=\dfrac{f_1(2)-f_1(0)}{2-0}=\dfrac{6}{2}=3$ $\qquad$ $t_{vm}[2,4]=\dfrac{f_1(4)-f_1(2)}{4-2}=\dfrac{12-6}{2}=3$

b) $t_{vm}[0,2]=\dfrac{f_2(2)-f_2(0)}{2-0}=\dfrac{8-2}{2}=3$ $\qquad$ $t_{vm}[2,4]=\dfrac{f_2(4)-f_2(2)}{4-2}=\dfrac{14-8}{2}=3$

c) $t_{vm}[0,2]=\dfrac{f_3(2)-f_3(0)}{2-0}=\dfrac{8}{2}=4$ $\qquad$ $t_{vm}[2,4]=\dfrac{f_3(4)-f_3(2)}{4-2}=\dfrac{64-8}{2}=28$

d) $t_{vm}[0,2]=\dfrac{f_4(2)-f_4(0)}{2-0}=\dfrac{9-1}{2}=4$ $\qquad$ $t_{vm}[2,4]=\dfrac{f_4(4)-f_4(2)}{4-2}=\dfrac{81-9}{2}=36$

PÁGINA 289

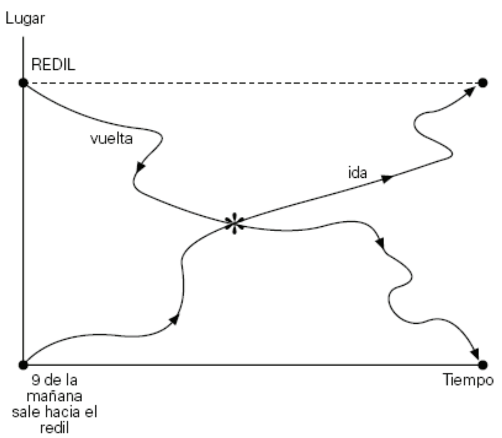
ACTIVIDADES

■ Ten muy en cuenta el lenguaje y la notación adecuados en la resolución de los siguientes problemas:

1. **El pastor y el rebaño.** Un pastor tiene un redil, donde guarda su rebaño, en lo alto de una montaña. Un determinado día sale de su casa a las 9 de la mañana y, después de caminar toda la jornada, llega al lugar donde está el redil. Allí permanece durante 10 días, al término de los cuales y a las 9 de la mañana, regresa a su casa. Al ir bajando, se pregunta: «¿Habrá algún punto del camino por el que pase a la misma hora que pasé el día que subí a la montaña?».
2. **Dos deportistas.** Luis y Ana hacen deporte todos los días. Ayer fueron desde la plaza Mayor hasta el Pinarcillo. Luis corrió la mitad de la distancia y anduvo la otra mitad. Ana corrió la mitad del tiempo y anduvo la otra mitad. Los dos corren a la misma velocidad y andan a la misma velocidad. ¿Quién llegó antes al Pinarcillo?
3. **Triple operación.** Un montañero ha sufrido una grave caída y, al llegar al hospital, ha de ser operado por tres cirujanos distintos. En ese momento hay una epidemia que pueden padecer los cirujanos y el montañero. Esta enfermedad puede contagiarse a través de cualquier útil o por la piel. Las tres intervenciones se debían realizar consecutivamente. Cada cirujano debe operar con ambas manos, pero en el hospital sólo había dos pares de guantes esterilizados. ¿Cómo consiguieron operar al montañero, utilizando los guantes disponibles y evitando toda posibilidad de contagio?

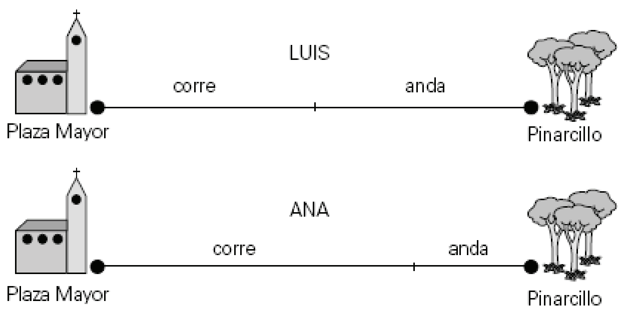
SOLUCIONES

1. El problema se representa del siguiente modo:



En el gráfico está muy clara la situación del problema y la solución del mismo. Efectivamente, hay un punto por el que pasa a la misma hora, y es el punto (*) en el que se encuentran los dos trayectos: de ida y de vuelta.

2. La figura queda:



Cuando Luis está a la mitad del camino, comienza a andar, luego la otra mitad va a velocidad más lenta.
En cambio, Ana, al correr la mitad del tiempo, corre más de la mitad del camino, por lo que menos de la mitad lo hace andando, así que llega antes Ana.

3. El primer cirujano se pone el guante (A) dentro del otro (B), es decir, se pone (A) y encima se pone al (B).

   El segundo cirujano se pone el guante (B) por la cara que no ha tocado al herido.

   El tercer cirujano se pone el guante (A) dándole la vuelta y encima de éste (B), operando al herido por el lado del guante (B) con que ya han operado los otros dos cirujanos.

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Completa en tu cuaderno la tabla que sigue con la determinación de las tasas de variación media correspondientes.

t_{vm}	$f_1(x) = 3x$	$f_2(x) = 3x - 2$	$f_3(x) = 3x + 2$	$f_4(x) = x^2$	$f_5(x) = x^3$	$f_6(x) = 3^x$
[–2, 0]						
[–1, 1]						
[0, 2]						
[1, 2]						
[a, a + 1]						

2. Dado un depósito de agua tiene forma cilíndrica, con unas medidas de 1 m de radio y 3 m de altura:
   a) Realiza la gráfica de la función que proporciona el volumen de agua en función de la altura del líquido.
   b) Calcula la tasa de aumento medio del volumen en litros de agua por centímetro de altura cuando el nivel sube de 0,5 a 1 m; de 1,5 a 2 m y de 2 a 2,5 m.
   c) ¿Cuánto vale la tasa de aumento medio entre dos niveles de agua?

3. Calcula la tasa de variación media en el intervalo [1, 4] para las siguientes funciones:

   a) $f(x) = 3x + 2$ b) $g(x) = 4 - x^2$ c) $h(x) = \sqrt{x+5}$ d) $t(x) = \dfrac{8}{x^2+4}$

4. La ecuación de movimiento que sigue un cuerpo que cae libremente viene dada por $e(t) = 4{,}9 \cdot t^2$, siendo e el espacio recorrido en metros, desde el punto que inicia la caída y t el tiempo en segundos, desde ese mismo instante. Calcula la velocidad media entre los instantes 2 s y 5 s. Calcula las velocidades instantáneas en esos dos instantes.

5. Un país desea enviar un satélite artificial al espacio. El cohete que lo transportará llevará una ecuación de movimiento $e(t) = 3t^2 + 8t$, siendo e el espacio recorrido en kilómetros, desde la superficie terrestre y t el tiempo en minutos, desde que la lanzadera espacial pone en movimiento el cohete. Calcula la velocidad media del cohete en los intervalos [0, 3]; [2, 5]; [1, 8] y [8, 12]. Al alejarse de la Tierra el cohete, ¿cómo varía su velocidad? ¿aumenta o disminuye?

6. Calcula, usando la definición de derivada de una función en un punto, las derivadas siguientes en los puntos que se indican:

   a) $f(x) = 2x^2 + 3$; $f'(1)$ c) $h(x) = \sqrt{3x^2+4}$; $h'(2)$ e) $l(x) = \dfrac{3}{x^2}$; $l'(3)$

   b) $g(x) = \dfrac{-2}{x+1}$; $D[g(1)]$ d) $k(x) = 6$; $D[k(0)]$ f) $t(x) = \sqrt{x-3}$; $D[t(6)]$

7. Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ en el punto de abscisa $x_0 = -1$.

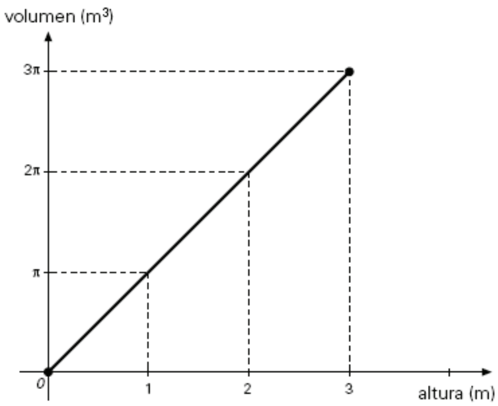
8. Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la parábola $y = 2x^2 - 12x + 10$ en los puntos donde esta corta al eje de abscisas.

1. La tabla queda del siguiente modo:

t_{vm}	$f_1(x)=3x$	$f_2(x)=3x-2$	$f_3(x)=3x+2$	$f_4(x)=x^2$	$f_5(x)=x^3$	$f_6(x)=3^x$
$[-2,0]$	3	3	3	-2	4	$4/9$
$[-1,1]$	3	3	3	0	1	$5/3$
$[0,2]$	3	3	3	2	4	4
$[1,2]$	3	3	3	3	7	6
$[a,a+1]$	3	3	3	$2a+1$	$3a^2+3a+1$	$2\cdot 3^a$

2. En cada apartado queda:

   a) Llamando *x* a la altura del líquido obtenemos:



La ecuación es:

$V=\pi\cdot x$ con $0\leq x\leq 3$

   b) Queda:

$$t_{vm}[0,5;1]=\frac{\pi-0,5\pi}{0,5}=\pi \qquad t_{vm}[1,5;2]=\frac{2\pi-1,5\pi}{0,5}=\pi \qquad t_{vm}[2;2,5]=\frac{2,5\pi-2\pi}{0,5}=\pi$$

   c) Queda:

$$t_{vm}[a;b]=\frac{b\pi-a\pi}{b-a}=\pi$$

3. En cada uno de los casos queda del siguiente modo:

$$t_{vm}[1,4]=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{14-5}{3}=3 \qquad t_{vm}[1,4]=\frac{g(4)-g(1)}{4-1}=\frac{-12-3}{3}=-5$$

$$t_{vm}[1,4]=\frac{h(4)-h(1)}{4-1}=\frac{\sqrt{9}-\sqrt{6}}{3}=\frac{3-\sqrt{6}}{3} \qquad t_{vm}[1,4]=\frac{t(4)-t(1)}{4-1}=\frac{\frac{8}{20}-\frac{8}{5}}{3}=\frac{-2}{5}$$

4. Queda:

$$V_m=t_{vm}[2,5]=\frac{e(5)-e(2)}{5-2}=\frac{4,9\cdot 5^2-4,9\cdot 2^2}{5-2}=34,3\text{ m/s}$$

$$v_i=t_{vi}[2]=\lim_{h\to 0}\frac{e(2+h)-e(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4,9\,(2+h)^2+4,9\cdot 2^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4,9\,(4h+h^2)}{h}\ \boxed{\frac{0}{0}}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h\,(19,6+4,9h)}{h}=19,6\text{ m/s}$$

$$v_i=t_{vi}[5]=\lim_{h\to 0}\frac{e(5+h)-e(5)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4,9\,(5+h)^2+4,9\cdot 5^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4,9\,(10h+h^2)}{h}\ \boxed{\frac{0}{0}}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h\,(49+4,9h)}{h}=49\text{ m/s}$$

5. Queda:

$$V_m[0,3]=t_{vm}[0,3]=\frac{e(3)-e(0)}{3-0}=\frac{3\cdot 3^2+8\cdot 3}{3}=17\text{ km/s}$$

$$V_m[2,5]=t_{vm}[2,5]=\frac{e(5)-e(2)}{5-2}=\frac{115-28}{3}=29\text{ km/s}$$

$$V_m[1,8]=t_{vm}[1,8]=\frac{e(8)-e(1)}{8-1}=\frac{256-11}{7}=35\text{ km/s}$$

$$V_m[8,12]=t_{vm}[8,12]=\frac{e(12)-e(8)}{12-8}=\frac{528-256}{4}=68\text{ km/s}$$

Al alejarse de la Tierra aumenta la velocidad del cohete.

6. Las derivadas quedan:

a) $f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(1+h)^2+3-5}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4h+2h^2}{h} = 4$

b) $D[g(1)] = \lim_{h\to 0} \frac{g(1+h)-g(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-2}{1+h+1} - \frac{-2}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h^2+2h} = \frac{1}{2}$

c) $h'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{h(2+h)-h(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{3(2+h)^2+4}-4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{3h^2+12h+16}-4\right)\left(\sqrt{3h^2+12h+16}+4\right)}{h\left(\sqrt{3h^2+12h+16}+4\right)}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{3h^2+12h}{h\left(\sqrt{3h^2+12h+16}+4\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{h(3h+12)}{h\left(\sqrt{3h^2+12h+16}+4\right)} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

d) $D[k(0)] = \lim_{h\to 0} \frac{k(0+h)-k(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6-6}{h} = 0$

e) $l'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{l(3+h)-l(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3}{(3+h)^2} - \frac{1}{3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h^2-6h}{(3h^2+18h+27)} = -\frac{6}{27} = -\frac{2}{9}$

f) $D[t(6)] = \lim_{h\to 0} \frac{t(6+h)-t(6)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{6+h-3}-\sqrt{3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{3+h}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3+h}+\sqrt{3}\right)}{h\left(\sqrt{3+h}+\sqrt{3}\right)} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{3+h}+\sqrt{3}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

7. La derivada queda: $f'(x) = 3x^2 - 6x$

La pendiente de la recta tangente en $P(-1, -2)$ es: $f'(-1) = 9$

La ecuación de la recta tangente es: $y+2 = 9(x+1) \Rightarrow 9x - y + 7 = 0$

La pendiente de la recta normal es: $-1/9$ y su ecuación es: $y+2 = -\frac{1}{9}(x+1) \Rightarrow x + 9y + 19 = 0$

8. La solución queda:

Los puntos de corte:

$$\left.\begin{array}{l} y=2x^2-12x+10 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow P(1,0) \quad Q(5,0)$$

La derivada queda: $y'=4x-12$

- La pendiente de la recta tangente en *P* es: $y'(1)=4\cdot 1-12=-8$

  La ecuación de la recta tangente queda: $y-0=-8(x-1) \Rightarrow 8x+y-8=0$

  La pendiente de la recta normal en *P* es: $1/8$

  La ecuación de la recta normal queda: $y-0=\dfrac{1}{8}(x-1) \Rightarrow x-8y-1=0$

- De igual forma queda en el punto *Q*.

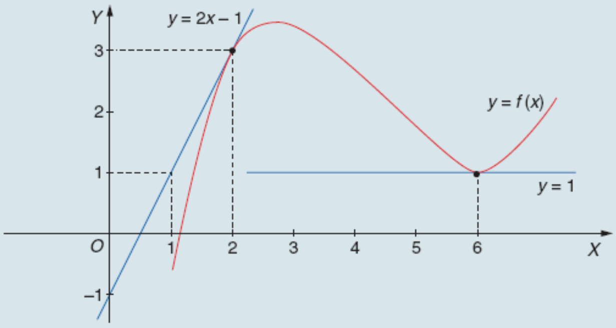
  La ecuación de la recta tangente queda: $y-0=-8(x-5) \Rightarrow 8x+y-40=0$

  La ecuación de la recta normal queda: $y-0=\dfrac{1}{8}(x-5) \Rightarrow x-8y-5=0$

PÁGINA 293

9. ¿En qué punto de la curva $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$ la recta tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante?

10. Sea la función cuya gráfica aparece en el dibujo adjunto. Calcula, de forma razonada, $D[f(2)]$ y $D[f(6)]$.



11. Halla el ángulo que forma la tangente a la curva $y = \frac{2}{x}$ en el punto $x_0 = 4$ con el semieje positivo de abscisas.

12. Dada la función $f(x) = ax + b$, calcula a y b, de manera que $f(1) = 1$ y $f'(1) = 2$.

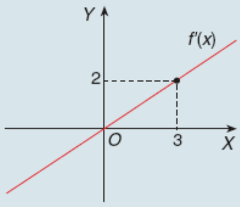
13. Halla la función derivada de cada función y, en cada caso, representa en un diagrama cartesiano ambas funciones:

a) $f_1(x) = 3$
b) $f_2(x) = 3x$
c) $f_3(x) = x^2 - 2x - 3$
d) $f_4(x) = x^3 - 12x + 8$
e) $f_5(x) = \frac{1}{x}$
f) $f_6(x) = -2x + 5$

14. Halla las funciones derivadas de las siguientes, aplicando la definición:

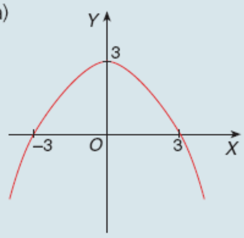
a) $f(x) = -3x + 5$
b) $g(x) = (2x - 3)^2$
c) $h(x) = x^3 - 2x^2 + 5$
d) $k(x) = 2\sqrt{x^2 + 3}$

15. La gráfica adjunta corresponde a la función derivada de una determinada función $f(x)$.

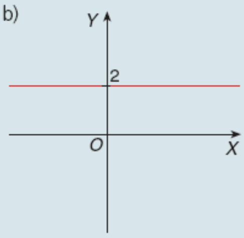


Indica cuál de las gráficas, a), b) ó c) se corresponde a la función $f(x)$, justificando la respuesta.

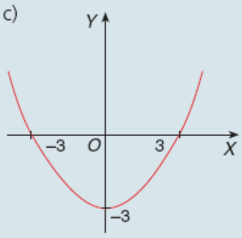
a)



b)



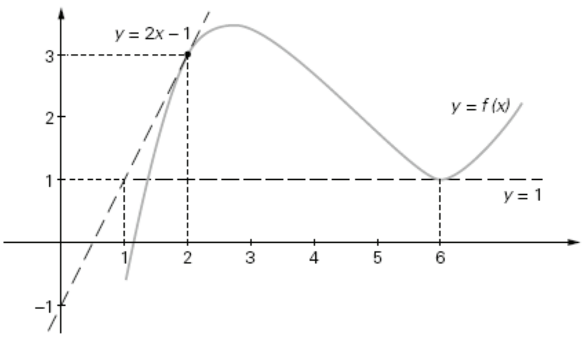
c)



9. La bisectriz del primer cuadrante es la recta de pendiente $m=1$.
Luego hay que hallar el punto en el cual:

$$f'(x)=1 \ \Rightarrow \ \frac{1}{2}\cdot 2x=1 \ \Rightarrow \ x=1 \ \Rightarrow \ \text{el punto es } P\left(1,-\frac{1}{2}\right)$$

10. Realizamos los cálculos a partir de siguiente gráfico:



$D[f(2)]=$ valor de la pendiente de la tangente $y=2x-1$ a la curva $y=f(x)$ en el punto de abscisa 2 $\Rightarrow D[f(2)]=2$.

$D[f(6)]=$ valor de la pendiente de la tangente $y=1$ a la curva $y=f(x)$ en el punto de abscisa 6 $\Rightarrow D[f(6)]=0$.

11. Queda:

Calculamos la pendiente mediante la derivada $y'=\frac{-2}{x^2} \ \Rightarrow \ m=\frac{-2}{16}=\frac{-1}{8}$.

El ángulo queda: $\operatorname{tg} x=\frac{-1}{8} \ \Rightarrow \ x=172^{\circ}\,52'\,30''$

12. Queda el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{lll} f(1)=1 & \Rightarrow & a+b=1 \\ f'(1)=2 & \Rightarrow & a=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a=2 \\ b=-1 \end{array}$$

13. Queda:

a) $f'_1(x)=0$ b) $f'_2(x)=3$

c) $f'_3(x)=2x-2$ d) $f'_4(x)=3x^2-12$

e) $f'_5(x)=-\frac{1}{x^2}$ f) $f'_6(x)=-2$

14. Queda en cada uno de los casos:

a) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-3(x+h)+5-(-3x+5)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-3h}{h} = -3$

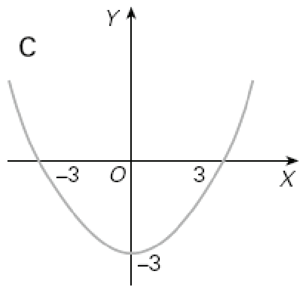
b) $g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left[2(x+h)-3\right]^2-(2x-3)^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4h^2+8xh-12h}{h} = 8x-12$

c) $h'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{h(x+h)-h(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left[(x+h)^3-2(x+h)^2+5\right]-(x^3-2x^2+5)}{h} = 3x^2-4x$

d) $k'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{k(x+h)-k(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sqrt{(x+h)^2+3}-2\sqrt{x^2+3}}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{4h^2+8xh}{h\left(2\sqrt{(x+h)^2+3}+2\sqrt{x^2+3}\right)} = \frac{8x}{4\sqrt{x^2+3}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2+3}}$

15. Queda:



$f'(x)$ tiene por ecuación: $f'(x) = \frac{2}{3}x$

Quedaría $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 3 \Rightarrow$ Gráfica C

PÁGINA 294

ACTIVIDADES FINALES

16. Calcula las derivadas de las siguientes funciones potenciales:

a) $D[x^6]$

b) $D\left[\dfrac{7}{x^5}\right]$

c) $D[8\sqrt[4]{x}]$

d) $D[3x^2 - x + 4]$

e) $D[(x^2 + x)^4]$

f) $D\left[\dfrac{5x}{4 + 5x}\right]$

g) $D\left[\dfrac{1}{(x^5 - x^2 + 3)^5}\right]$

h) $D\left[\dfrac{x^2 - 1}{4}\right]$

i) $D\left[\dfrac{3}{\sqrt{4x^2 + 5}}\right]$

17. Calcula las derivadas de las siguientes funciones exponenciales:

a) $D\left[4^{\frac{3}{x}}\right]$

b) $D[3 \cdot 2^x]$

c) $D[e^{2x^2} - e^x - 2]$

d) $D[2^{x^2} \cdot 3^{x^2}]$

e) $D\left[\dfrac{e^{-2x}}{4}\right]$

f) $D[(e^{2x} + 1)^3]$

18. Calcula las derivadas de las siguientes funciones logarítmicas:

a) $D[\ln(x^2 + 7)]$

b) $D[\ln(e^x + 2)]$

c) $D[\ln(3 - 4x^3)^5]$

d) $D[\ln \sqrt[3]{3x^2 + 1}]$

e) $D[\log_2(x^2 + 1)]$

f) $D\left[\ln\left(\dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}\right)\right]$

g) $D[\ln(\ln x)]$

h) $D[\ln(x \cdot \sqrt{4 - x^2})]$

i) $D\left[\ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)\right]$

19. Calcula las derivadas de las siguientes funciones trigonométricas y de sus inversas:

a) $D[\text{sen } 4x]$

b) $D[4 \text{ sen } x]$

c) $D\left[\text{sen}\left(\dfrac{x}{4}\right)\right]$

d) $D\left[\text{sen}\left(\dfrac{4}{x}\right)\right]$

e) $D[\text{sen } x^4]$

f) $D[\text{sen}^4 x]$

g) $D[\text{arcsen} \sqrt{x - 1}]$

h) $D[\text{sen } x^{-4}]$

i) $D[\sqrt[4]{\text{sen } x}]$

j) $D[\cos(x + 1)]$

k) $D[\cos^3(x^3 + 1)]$

l) $D[\text{arctg}(2x + 1)^2]$

m) $D[\text{tg}(x^2 + 2)]$

n) $D[\text{tg} \sqrt{x}]$

ñ) $D[\text{tg}^3(x + 1)]$

o) $D[\arccos(\ln x)]$

p) $D[\text{tg}(3^x)]$

q) $D[\sqrt{\text{tg } x}]$

20. Calcula las derivadas que se indican:

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 + 2x^4}}{x}$; $Df(1)$

b) $g(x) = \ln[x + \sqrt{4 + x^2}]$; $Dg(0)$

c) $h(x) = \text{sen}^2 3x - \cos^2 3x$; $Dh(\pi)$

d) $j(x) = \dfrac{2^x}{2^x + 1}$; $Dj(-1)$

21. Dada la función $f(x) = 2x^4 + 3x^3 + x^2 - ax + 5$, calcula el valor de a, para que $Df(1) = -3$.

Haz un estudio análogo para la función $g(x) = \dfrac{x^2 - x - a}{x + 1}$, siendo $Dg(1) = 0$.

16. Quedan:

a) $D\left[x^6\right]=6x^5$

b) $D\left[\dfrac{7}{x^5}\right]=D\left[7x^{-5}\right]=-7\cdot 5x^{-6}=\dfrac{-35}{x^6}$

c) $D\left[8\sqrt[4]{x}\right]=D\left[8x^{1/4}\right]=\dfrac{2}{\sqrt[4]{x^3}}$

d) $D\left[3x^2-x+4\right]=6x-1$

e) $D\left[\left(x^2+x\right)^4\right]=(8x+4)\left(x^2+x\right)^3$

f) $D\left[\dfrac{5x}{4+5x}\right]=\dfrac{20}{(4+5x)^2}$

g) $D\left[\dfrac{1}{\left(x^5-x^2+3\right)^5}\right]=D\left[\left(x^5-x^2+3\right)^{-5}\right]=\dfrac{-25x^4+10x}{\left(x^5-x^2+3\right)^6}$

h) $D\left[\dfrac{x^2-1}{4}\right]=\dfrac{x}{2}$

i) $D\left[\dfrac{3}{\sqrt{4x^2+5}}\right]=\dfrac{-12x}{\sqrt{\left(4x^2+5\right)^3}}$

17. Las derivadas quedan:

a) $D\left[4^{\frac{3}{x}}\right]=4^{\frac{3}{x}}\cdot\ln 4\cdot\left(\dfrac{-3}{x^2}\right)$

b) $D\left[3\cdot 2^x\right]=3\cdot 2^x\cdot\ln 2$

c) $D\left[e^{2x^2}-e^x-2\right]=e^{2x^2}\cdot 4x-e^x$

d) $D\left[2^{x^2}\cdot 3^{x^2}\right]=D\left[6^{x^2}\right]=6^{x^2}\cdot 2x\cdot\ \ln 6$

e) $D\left[\dfrac{e^{-2x}}{4}\right]=\dfrac{-e^{-2x}}{2}$

f) $D\left[\left(e^{2x}+1\right)^3\right]=6\cdot e^{2x}\left(e^{2x}+1\right)^2$

18. Las derivadas quedan:

a) $D\left[\ln\left(x^2+7\right)\right]=\dfrac{2x}{x^2+7}$

b) $D\left[\ln\left(e^x+2\right)\right]=\dfrac{e^x}{e^x+2}$

c) $D\left[\ln\left(3-4x^3\right)^5\right]=D\left[5\cdot\ln\left(3-4x^3\right)\right]=5\cdot\dfrac{-12x^2}{3-4x^3}=\dfrac{-60x^2}{3-4x^3}$

d) $D\left[\ln\sqrt[3]{3x^2+1}\right]=D\left[\dfrac{1}{3}\ \ln\left(3x^2+1\right)\right]=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{6x}{3x^2+1}=\dfrac{2x}{3x^2+1}$

e) $D\left[\log_2\left(x^2+1\right)\right]=\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)\ln 2}$

f) $D\left[\ln\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right]=D\left[\ln\left(1-\sqrt{x}\right)-\ln\left(1+\sqrt{x}\right)\right]=\dfrac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}}=\dfrac{-\sqrt{x}}{x-x^2}$

g) $D\left[\ln\left(\ln x\right)\right]=\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\ln x}=\dfrac{1}{x\cdot\ln x}$

h) $D\left[\ln\left(x\cdot\sqrt{4-x^2}\right)\right]=D\left[\ln x+\dfrac{1}{2}\ln\left(4-x^2\right)\right]=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{-2x}{4-x^2}=\dfrac{4-2x^2}{x\left(4-x^2\right)}$

i) $D\left[\ln\dfrac{1+x}{1-x}\right]=D\left[\ln\left(1+x\right)-\ln\left(1-x\right)\right]=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{-1}{1-x}=\dfrac{2}{1-x^2}$

19. Las derivadas quedan:

a) $D\left[\operatorname{sen} 4x\right]=4\cdot\cos 4x$

b) $D\left[4\operatorname{sen} x\right]=4\cdot\cos x$

c) $D\left[\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{4}\right)\right]=\dfrac{1}{4}\ \cos\dfrac{x}{4}$

d) $D\left[\operatorname{sen}\left(\frac{4}{x}\right)\right]=-\frac{4}{x^2}\cdot\cos\left(\frac{4}{x}\right)$

e) $D\left[\operatorname{sen} x^4\right]=4x^3\cdot\cos x^4$

f) $D\left[\operatorname{sen}^4 x\right]=D\left[(\operatorname{sen} x)^4\right]=4\cdot\operatorname{sen}^3 x\cdot\cos x$

g) $D\left[\operatorname{arc\,sen}\sqrt{x-1}\right]=\frac{1}{2\cdot\sqrt{3x-2-x^2}}$

h) $D\left[\operatorname{sen} x^{-4}\right]=\frac{-4\cdot\cos\left(x^{-4}\right)}{x^5}$

i) $D\left[\sqrt[4]{\operatorname{sen} x}\right]=\frac{\cos x}{4\sqrt[4]{\operatorname{sen}^3 x}}$

j) $D\left[\cos(x+1)\right]=-\operatorname{sen}(x+1)$

k) $D\left[\cos^3\left(x^3+1\right)\right]=-9x^2\cdot\cos^2\left(x^3+1\right)\cdot\operatorname{sen}\left(x^3+1\right)$

l) $D\left[\operatorname{arc\,tg}(2x+1)^2\right]=\frac{4x+2}{8x^4+16x^3+12x^2+4x+1}$

m) $D\left[\operatorname{tg}\left(x^2+2\right)\right]=\frac{2x}{\cos^2\left(x^2+2\right)}$

n) $D\left(\operatorname{tg}\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}\cdot\cos^2\sqrt{x}}$

ñ) $D\left[\operatorname{tg}^3(x+1)\right]=\frac{3\operatorname{tg}^2(x+1)}{\cos^2(x+1)}$

o) $D\left[\operatorname{arc\,cos}(\ln x)\right]=\frac{-1}{x\cdot\sqrt{1-\ln^2 x}}$

p) $D\left[\operatorname{tg}(3^x)\right]=\frac{3^x\cdot\ln 3}{\cos^2 3^x}$

q) $D\left[\sqrt{\operatorname{tg} x}\right]=\frac{1}{2\cos^2 x\cdot\sqrt{\operatorname{tg} x}}$

20. Las derivadas quedan:

a) $D\left[f(x)\right]=\dfrac{2x^4-1}{x^2\sqrt{1+2x^2}} \Rightarrow D\left[f(1)\right]=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

b) $D\left[g(x)\right]=\dfrac{1}{\sqrt{4+x^2}} \Rightarrow D\left[g(0)\right]=\dfrac{1}{2}$

c) $D\left[h(x)\right]=12 \operatorname{sen} 3x \cdot \cos 3x \Rightarrow D\left[h(\pi)\right]=0$

d) $D\left[j(x)\right]=\dfrac{2^x \cdot \ln 2}{\left(2^x+1\right)^2} \Rightarrow D\left[j(-1)\right]=\dfrac{2\ln 2}{9}$

21. El estudio en cada caso queda:

- $f(x)=2x^4+3x^3+x^2-ax+5 \Rightarrow D[f(x)]=8x^3+9x^2+2x-a \Rightarrow D[f(1)]=19-a=-3 \Rightarrow a=22$
- $g(x)=\dfrac{x^2-x-a}{x+1} \Rightarrow D[g(x)]=\dfrac{x^2+2x+a-1}{(x+1)^2} \Rightarrow D[g(1)]=\dfrac{2+a}{4}=0 \Rightarrow a=-2$

PÁGINA 295

■ 22. Calcula las derivadas que se indican a continuación:

a) $D[(1-x)\sqrt{1+x}]$

b) $D[(x^2-1)^2 \cdot 5^{2x}]$

c) $D[2^x \cdot \ln 2]$

d) $D\left[\ln\left(\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right)\right]$

e) $D[x^2 \ln x + x \ln x^2]$

f) $D[\operatorname{sen} x \cdot 3^{2x}]$

g) $D\left[\dfrac{2^{3x}}{x^2}\right]$

h) $D\left[\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}\right]$

i) $D\left[\ln\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right)\right]$

j) $D[x^{2a} \cdot a^{2x} \cdot e^{-x}]$

k) $D[\ln\sqrt{x(2-x)}]$

l) $D\left[\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\right]$

m) $D[\operatorname{tg}^2 \sqrt{x}]$

n) $D[\ln(e^x - 5x^4)]$

ñ) $D[(\operatorname{sen} 2x)^{\cos x}]$

o) $D[\ln(\operatorname{tg} x)]$

p) $D[(x^2+1)^{7x}]$

q) $D\left[\dfrac{2x^2+1}{2x^2-1}\right]$

r) $D\left[\sqrt[4]{x^4-2}\right]$

s) $D[\operatorname{arctg}^2 \sqrt{x}]$

t) $D[10^{\sqrt{x}} \cdot \ln\sqrt{x} \cdot (2x)^8]$

u) $D\left[\operatorname{arcsen} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

v) $D[\ln(\ln \cos x)]$

w) $D[\operatorname{sen}^4 x^3 \cdot \cos^3 x^4]$

x) $D\left[\dfrac{1}{1+x} + \ln\left(\dfrac{1}{1+x}\right)\right]$

y) $D[2^x \cdot \sqrt{4+2^x}]$

z) $D\left[\ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)\right]$

■ 23. La trayectoria que sigue una motora viene dada por $e(t) = -t^3 + 9t^2 + 5$, donde e viene dado en kilómetros y t en horas.
Halla la velocidad instantánea a las 4 horas ($t = 4$ h).
¿Al cabo de cuánto tiempo la velocidad se anula?

■ 24. Dada la función $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$, calcula $f^{(10)}(x)$.

■ 25. Calcula los valores de x para los cuales $D[f(x)] > 0$, siendo $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12$.

■ 26. Calcula $f^{(2003)}(x)$ para la función $f(x) = e^{-2x}$.

■ 27. ¿En qué punto la función $f(x) = -3x^2 + 7x - 2$ tiene una tangente que forma un ángulo de 45° con el eje OX?

■ 28. Halla la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $4x^2 - y^2 = 4$ en el punto $(\sqrt{5}, 4)$.

■ 29. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la parábola $x^2 - 8x - 2y + 12 = 0$ en el punto de abscisa 8.

22. Las derivadas quedan:

a) $D\left[(1-x)\sqrt{1+x}\right]=-1\sqrt{1+x}+\dfrac{1-x}{2\sqrt{1+x}}=\dfrac{-1-3x}{2\sqrt{1+x}}$

b) $D\left[(x^2-1)\cdot 5^{2x}\right]=2x\cdot 5^{2x}+5^{2x}\cdot \ln 5\cdot 2\cdot (x^2-1)$

c) $D\left[2^x\cdot \ln 2\right]=2^x\cdot (\ln 2)^2$

d) $D\left[\ln\left(\dfrac{1+\text{sen } x}{1-\text{sen } x}\right)\right]=\dfrac{\cos x}{1+\text{sen } x}-\dfrac{-\cos x}{1-\text{sen } x}=\dfrac{2}{\cos x}$

e) $D\left[x^2\ln x+x\ \ln x^2\right]=2x\cdot \ln x+\dfrac{x^2}{x}+2\ln x+2=2x\cdot \ln x+x+2\ln x+2$

f) $D\left[\text{sen } x\cdot 3^{2x}\right]=\cos x\cdot 3^{2x}+3^{2x}\cdot 2\cdot \ln 3\cdot \text{sen } x$

g) $D\left[\dfrac{2^{3x}}{x^2}\right]=\dfrac{2^{3x}\cdot 3\cdot \ln 2\cdot x^2-2x\cdot 2^{3x}}{x^4}=\dfrac{2^{3x}\,(3x\ln 2-2)}{x^3}$

h) $D\left[\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}\right]=\dfrac{-\text{sen } x\,(1-\cos x)-\text{sen } x\ (1+\cos x)}{2\,(1-\cos x)^2\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}}=\dfrac{-1}{1-\cos x}$

i) $D\left[\ln\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right)\right]=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x}{x^2+9}=\dfrac{9}{x\,(x^2+9)}$

j) $D\left[x^{2a}\cdot a^{2x}\cdot e^{-x}\right]=2ax^{2a-1}\cdot a^{2x}\cdot e^{-x}+a^{2x}\cdot \ln a\cdot 2\cdot x^{2a}\cdot e^{-x}-e^{-x}\cdot x^{2a}\cdot a^{2x}$

$=x^{2a}\cdot a^{2x}\cdot e^{-x}\left(\dfrac{2a}{x}+2\ln a-1\right)$

k) $D\left[\ln\sqrt{x\,(2-x)}\right]=D\left[\dfrac{1}{2}\ln x+\dfrac{1}{2}\ln(2-x)\right]=\dfrac{1-x}{x\,(2-x)}$

l) $D\left[\text{arc tg}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\right]=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2}\cdot\dfrac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{x^2+1}$

m) $D\left[\text{tg}^2\sqrt{x}\right]=2\,(\text{tg}\sqrt{x})\cdot\dfrac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{\text{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\cos^2\sqrt{x}}$

n) $D\left[\ln(e^x-5x^4)\right]=\dfrac{e^x-20x^3}{e^x-5x^4}$

ñ) $D\left[(\text{sen }2x)^{\cos x}\right]=2\cos x\,(\text{sen }2x)^{\cos x-1}\cdot\left[\cos 2x-(\text{sen }x)^2\ln(\text{sen }2x)\right]$

o) $D\left[\ln\text{tg }x\right]=\dfrac{1}{\text{sen }x\cdot\cos x}$

p) $D\left[(x^2-1)^{7x}\right]=7(x^2-1)^{7x-1}\cdot\left[2x^2+(x^2-1)\ln(x^2-1)\right]$

q) $D\left[\dfrac{2x^2+1}{2x^2-1}\right]=\dfrac{4x\,(2x^2-1)-4x\,(2x^2+1)}{(2x^2-1)^2}=\dfrac{-8x}{(2x^2-1)^2}$

r) $D\left[\sqrt[4]{x^4-2}\right]=\dfrac{4x^3}{4\sqrt[4]{(x^4-2)^3}}=\dfrac{x^3}{\sqrt[4]{(x^4-2)^3}}$

s) $D\left[\text{arc tg}^2\sqrt{x}\right]=2\cdot\text{arc tg}\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}\cdot(1+x)}=\dfrac{\text{arc tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot(1+x)}$

t) $D\left[10^{\sqrt{x}}\cdot\ln\sqrt{x}\cdot(2x)^8\right]=\dfrac{10^{\sqrt{x}}\cdot\ln 10}{2\sqrt{x}}\cdot\ln\sqrt{x}\cdot(2x)^8+\dfrac{1}{2x}\cdot 10^{\sqrt{x}}\cdot(2x)^8+16\,(2x)^7\cdot 10^{\sqrt{x}}\cdot\ln\sqrt{x}$

u) $D\left[\text{arc sen}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]=\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}}\cdot\dfrac{\sqrt{1-x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-2x^2}}$

v) $D\left[\ln(\ln\cos x)\right]=\dfrac{-\text{sen}\,x}{\cos x\cdot\ln(\cos x)}$

w) $D\left[\text{sen}^4 x^3\cdot\cos^3 x^4\right]=4\,\text{sen}^3 x^3\cdot\cos x^3\cdot 3x^2\cdot\cos^3 x^4-3\cdot\cos^2 x^4\cdot\text{sen}\,x^4\cdot 4x^3\cdot\text{sen}^4 x^3$

x) $D\left[\dfrac{1}{1+x}+\ln\left(\dfrac{1}{1+x}\right)\right]=\dfrac{-1}{(1+x)^2}-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{-2-x}{(1+x)^2}$

y) $D\left[2^x\cdot\sqrt{4+2^x}\right]=2^x\cdot\ln 2\cdot\sqrt{4+2^x}+\dfrac{2^x\cdot\ln 2\cdot 2^x}{2\sqrt{4+2^x}}=\dfrac{2^x\cdot\ln 2\,(8+3\cdot 2^x)}{2\sqrt{4+2^x}}$

z) $D\left[\ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)\right]=\dfrac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}-1}{\sqrt{x^2+1}-x}-\dfrac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}+1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\dfrac{-2}{\sqrt{x^2+1}}$

23. Queda:

La velocidad viene dada por la expresión: $v(t)=e'(t)=-3t^2+18t$

La velocidad instantánea en $t=4$ es $v(4)=24\,\text{km}/\text{h}$

La velocidad se anula es: $0=-3t^2+18t \;\Rightarrow\; t=0$ y $t=6$.

Al cabo de 6 horas se anula.

24. Queda:

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n\cdot 2\cdot n!}{(x-1)^{n+1}} \quad\Rightarrow\quad f^{(10)}(x)=\frac{2\cdot 10!}{(x-1)^{11}}$$

25. La derivada queda: $D[f(x)]=3x^2-12x>0$ y el intervalo resultante es: $x\in(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$

26. Queda:

$$f^{(n)}(x)=(-2)^n\cdot e^{-2x} \quad\Rightarrow\quad f^{(2\,003)}(x)=-2^{2\,003}\cdot e^{-2x}$$

27. El punto buscado es el punto en el que la pendiente de la recta tangente valga 1.

$$f'(x)=-6x+7=1 \;\Rightarrow\; x=1 \;\Rightarrow\; \text{El punto es } P(1,2).$$

28. La pendiente de la recta tangente es el valor de la derivada en el punto dado.

Derivamos la función en implícitas: $8x-2yy'=0 \;\Rightarrow\; y'=\dfrac{4x}{y} \;\Rightarrow\; m=\sqrt{5}$

Por tanto, la ecuación de la recta queda: $y-4=\sqrt{5}\left(x-\sqrt{5}\right) \;\Rightarrow\; y=\sqrt{5}x-1$

29. El punto es $P(8,6)$.

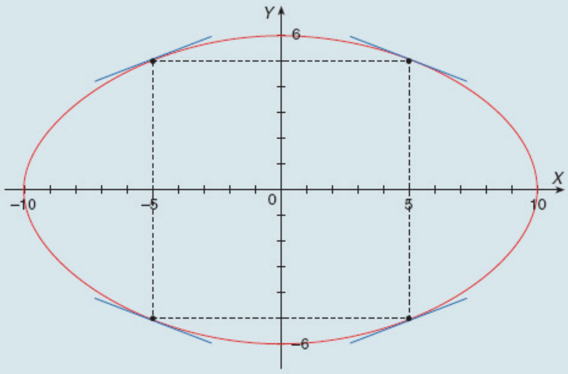
La pendiente de la recta es: $2x-8-2y'=0 \;\Rightarrow\; y'=x-4 \;\Rightarrow\; y'(8)=8-4 \;\Rightarrow\; m=4$

Por tanto, la ecuación de la recta es: $y-6=4(x-8) \;\Rightarrow\; y=4x-26$

ACTIVIDADES FINALES

30. ¿En qué punto de la parábola $y = x^2$ la tangente es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante?

31. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la elipse del dibujo en los puntos indicados.



32. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia de la ecuación $x^2 + y^2 + 6x + 8y - 27 = 0$ en el punto de abscisa 1.

33. Demuestra que la pendiente de la función afín $f(x) = ax + b$ vale a.

34. La cantidad de agua recogida en millones de litros en cierto pantano en el año 2001, en función del tiempo en meses, viene dada por:

$$f(t) = \frac{100}{(t-4)^2 + 2} \quad \text{con } 0 \le t \le 12$$

¿En qué época aumentó la cantidad de agua recogida ($f'(t) > 0$)? ¿En qué momento la velocidad de crecimiento del agua fue nula?

35. Dada la función $y = 2x^2 + ax + b$ halla a y b para que tenga una tangente de pendiente –6 en el punto (1, 4).

36. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la parábola $y^2 - 4y + 4x - 12 = 0$ en los puntos de corte con los ejes coordenados.

37. Halla el ángulo que forman las rectas tangentes a las curvas $4x^2 + y^2 = 8$, $x \cdot y = 2$ en sus puntos comunes.

38. Calcula la derivada n-ésima de la función $f(x) = \ln(x - 2)$.

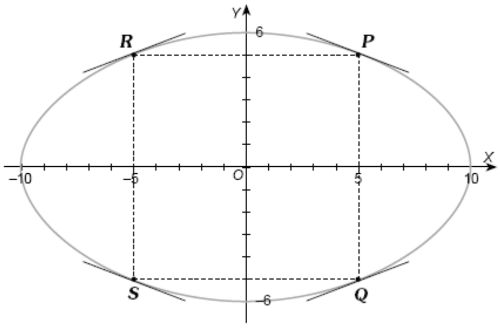
39. Comprueba que la función $y = e^{ax} \cdot \text{sen}\, bx$ verifica la igualdad $2ay' - y'' = (a^2 + b^2) \cdot y$.

40. La curva $y = ax^2 + bx + c$ pasa por el punto $P(1, 7)$ y es tangente en el origen de coordenadas a la bisectriz del segundo cuadrante. Halla la ecuación de la curva.

30. La tangente paralela a la bisectriz del segundo cuadrante tendrá pendiente -1.

Por tanto: $y'=2x=-1 \quad\Rightarrow\quad x=-\dfrac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad$ El punto pedido es: $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$

31. La solución queda:



La ecuación de la elipse es: $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{36}=1.$

Los puntos indicados son:

$$P\left(5, 3\sqrt{3}\right) \qquad Q\left(5, -3\sqrt{3}\right)$$
$$R\left(-5, 3\sqrt{3}\right) \qquad S\left(-5, -3\sqrt{3}\right)$$

Hallamos la pendiente de todas las rectas tangentes a la elipse, que viene dada por la siguiente expresión:

$$y'=-\frac{36x}{100y}$$

En cada uno de estos puntos la recta tangente queda:

- En $P \quad\Rightarrow\quad y-3\sqrt{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{5}(x-5)$
- En $Q \quad\Rightarrow\quad y+3\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{5}(x-5)$
- En $R \quad\Rightarrow\quad y-3\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{5}(x+5)$
- En $S \quad\Rightarrow\quad y+3\sqrt{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{5}(x+5)$

32. El punto es $P(1,2)$ ó $Q(1,-10)$.

Hallemos la pendiente de todas las rectas tangentes a esta circunferencia:

$$2x+2yy'+6+8y'=0 \quad\Rightarrow\quad y'=-\frac{x+3}{y+4}$$

- La recta tangente en P: $\quad y-2=-\dfrac{2}{3}(x-1) \quad\Rightarrow\quad y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{8}{3}$
- La recta tangente en Q: $\quad y+10=\dfrac{2}{3}(x-1) \quad\Rightarrow\quad y=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{32}{3}$

33. Mediante la derivada: $f'(x)=a$ para todo valor de $x \Rightarrow$ pendiente$=a$

34. La expresión queda:

$$f'(t)=\frac{800-200t}{\left(t^2-8t+18\right)^2}>0$$

Resolviendo la inecuación obtenemos la cantidad de agua recogida para $t\in[0,4)$, es decir, durante los primeros meses del año.

La velocidad fue nula para $f'(t)=0$, es decir, para $t=4$.

35. Por pasar por el punto (1,4) obtenemos: $4=2+a+b$.

Por tener en ese punto una tangente de pendiente (-6) obtenemos: $4+a=-6$.

Resolviendo el sistema obtenemos: $a=-10 \quad b=12$.

36. Los puntos de corte con los ejes son: $P(3,0)$; $Q(0,6)$; $R(0,-2)$.

Hallemos la pendiente de todas las rectas tangentes a esta parábola: $y'=\dfrac{2}{2-y}$

- La recta tangente en *P*: $y-0=1(x-3) \quad \Rightarrow \quad y=x-3$
- La recta tangente en *Q*: $y-6=-\dfrac{1}{2}x \quad \Rightarrow \quad y=6-\dfrac{1}{2}x$
- La recta tangente en *R*: $y+2=\dfrac{1}{2}x \quad \Rightarrow \quad y=\dfrac{1}{2}x-2$

37. La solución queda:

Los puntos comunes son: $P(1,2) \quad Q(-1,-2)$.

- Rectas tangentes en *P*, tienen por pendientes $m_1=-2 \quad m_2=-2$; por tanto, el ángulo que forman es de 0º.
- Rectas tangentes en *Q*, tienen por pendientes $m_1=-2 \quad m_2=-2$; por tanto, el ángulo que forman es de 0º.

38. Queda:

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!}{(x-2)^n}$$

39. La demostración queda:

Sea la función $y = e^{ax} \cdot \operatorname{sen} bx$, derivamos e introducimos en la expresión a demostrar.

$y' = a e^{ax} \cdot \operatorname{sen} bx + b e^{ax} \cdot \cos bx \quad \Rightarrow \quad y'' = a^2 e^{ax} \cdot \operatorname{sen} bx + 2ab e^{ax} \cdot \cos bx - b^2 e^{ax} \cdot \operatorname{sen} bx$

Introducimos las derivadas en la expresión a demostrar:

$2ay' - y'' = a^2 e^{ax} \cdot \operatorname{sen} bx + b^2 e^{ax} \cdot \operatorname{sen} bx = (a^2 + b^2) e^{ax} \cdot \operatorname{sen} bx = (a^2 + b^2) \cdot y$

40. La solución queda:

Por pasar por el punto $P(1,7)$ verifica: $7 = a + b + c$.

Por pasar por el punto $O(0,0)$ verifica: $0 = c$.

Por ser tangente a la recta $y = -x \;\Rightarrow\; y'(0) = b = -1$.

Resolviendo el sistema:

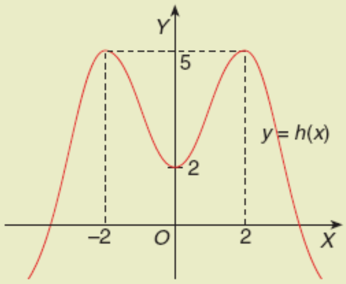
$$\left.\begin{array}{r} a + b + c = 7 \\ c = 0 \\ b = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 8 \\ b = -1 \\ c = 0 \end{array}$$

Unidad 13 – Aplicaciones de las derivadas

PÁGINA 299

cuestiones iniciales

1. Estudia la monotonía y los extremos relativos de la función $y = h(x)$ en la gráfica dada.



2. ¿Qué dos números cuya suma es 20 dan producto máximo? Ayúdate de una tabla de valores.

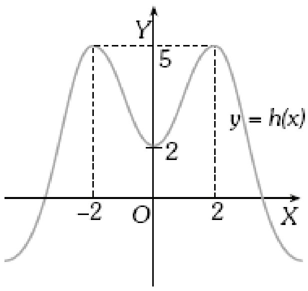
3. Estudia el crecimiento, decrecimiento y los extremos relativos de las funciones:

a) $f(x) = \dfrac{2}{x}$ b) $g(x) = 16x - 2x^2$

4. En una tienda de golosinas han estudiado que si venden el kilo de caramelos a x € los beneficios al día serán $B(x) = -12{,}5x^2 + 150x - 250$. ¿A partir de que precio obtiene ganancias? ¿A qué precio obtiene beneficio máximo? ¿Cuánto vale este?

SOLUCIONES

1. La solución queda:



La función h(x) es estrictamente creciente en el intervalo $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$ y estrictamente decreciente en el intervalo $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$.

Además tiene dos máximos relativos en los puntos $(-2, 5)$ y $(2, 5)$, y un mínimo relativo en el punto $(0, 2)$.

2. Dos números cualquiera que sumen 20 son (x) y $(20 - x)$.

   Su producto es: $P = (20 - x)\,x = 20x - x^2$ es una función cuadrática cuya gráfica es una parábola con un máximo relativo en su vértice (10, 100).

   Es decir, los números pedidos son 10 y 10.

3. El estudio queda del siguiente modo:

a) Es una función de proporcionalidad inversa. Su gráfica es una hipérbola estrictamente decreciente en todo su dominio, es decir, en $\mathbb{R}-\{0\}$ y carece de extremos relativos.

b) Es una función cuadrática. Su gráfica es una parábola con un máximo relativo en su vértice (4, 32); estrictamente creciente en el intervalo $(-\infty, 4)$ y estrictamente decreciente en el intervalo $(4, +\infty)$.

4. La solución queda:

Sea la ecuación: $-12{,}5x^2 + 150x - 250 = 0 \ \Rightarrow \ x = 2 \quad y \quad x = 10$.

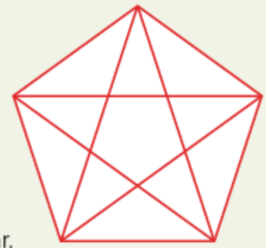
Por tanto obtiene ganancias a partir de 2 euros el kilo de caramelos.

El beneficio máximo lo obtiene en el vértice para $x = 6$ euros el kilo, y este beneficio asciende a 200 euros diarios.

ACTIVIDADES

■ Para que cojas soltura en esta técnica de organización, resuelve los siguientes problemas:

1. **Fonoteca.** La empleada de la fonoteca no ha parado de trabajar en toda la semana. El lunes recibió varios discos y marcó algunos de ellos. El martes recibió tantos discos nuevos como no había marcado el lunes, y marcó 12. El miércoles recibió 14 más que el lunes, y marcó doble número que el lunes. El jueves recibió el doble de los discos que había marcado el miércoles, y marcó 10. El viernes recibió 4 discos y marcó 14 menos de los que había recibido el miércoles. El sábado marcó los 20 discos que le quedaban. ¿Cuántos discos recibió el lunes?
2. **Camión y tractor.** Un camión tarda en adelantar a un tractor, una vez que lo alcanza, el doble de lo que tardan ambos en cruzarse cuando circulan en direcciones opuestas. ¿Qué relación existe entre las velocidades de ambos?
3. **Relojes de arena.** Disponemos de dos relojes de arena: el uno mide cuatro minutos y el otro nueve minutos. Se trata de conseguir medir intervalos de uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve y diez minutos. Describe, razonadamente, los procedimientos a utilizar.
4. **Triángulos.** La figura adjunta muestra la estrella pitagórica inscrita en un pentágono regular. ¿Cuántos triángulos pueden verse en esta figura?



SOLUCIONES

1. Vamos a organizar los datos en una tabla:

	Recibe	Marca
Lunes	X	M
Martes	X − M	12
Miércoles	X + 14	2M
Jueves	4M	10
Viernes	4	X + 14 − 14
Sábado		20

Los discos que recibe menos los que marca son los 20 discos que le quedaron para el sábado:

$$X + X - M + X + 14 + 4M + 4 -$$
$$(M + 12 + 2M + 10 + X) = 20 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3X + 3M + 18 - 3M - X - 22 = 20$$

$2X = 24 \;\Rightarrow\; \boxed{X = 12}$ discos recibió el lunes.

2. Sea v la velocidad del camión y w la velocidad del tractor.

La expresión queda: $v + w = 2(v - w) \;\Rightarrow\; \boxed{v = 3w}$

Es decir, la velocidad del camión es el triple que la velocidad del tractor.

3. Llamamos R_4 al reloj que mide 4 minutos y R_9 al que mide 9 minutos.

- *Para medir 1 minuto*: ponemos ambos relojes. Cuando pasan 4 minutos, damos la vuelta a R_4 y al pasar otros 4 minutos, lo que queda de R_9 es 1 minuto.

- *Para medir 2 minutos*: conseguimos 1 minuto por el procedimiento anterior. A la vez que logramos 1 minuto, el reloj R_4 lo ponemos y quedan en él 3 minutos. En este momento ponemos a funcionar R_9 y al terminar, quedan en éste 6 minutos; ponemos a funcionar R_4 y al terminar éste último, quedan en el anterior 2 minutos.

- *Para medir 3 minutos*: está explicado en el procedimiento anterior.

- *Para medir 4 minutos*: con el reloj R_4.

- *Para medir 5 minutos*: ponemos R_4 y R_9; al terminar R_4, quedan en R_9 5 minutos.

- *Para medir 6 minutos*: esta situación se explica en el procedimiento para medir 2 minutos.

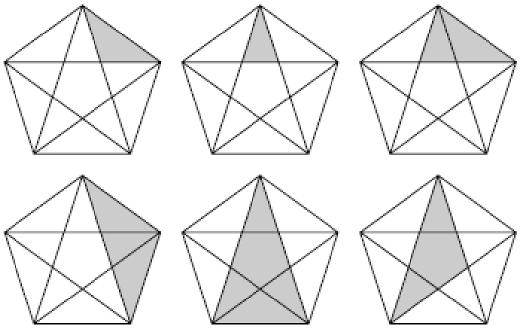
- *Para medir 7 minutos*: conseguimos 2 minutos por el procedimiento dado anteriormente. Los 2 minutos los tenemos en R_9. Ponemos a funcionar R_4 y al pasar 2 minutos en R_9 quedan otros 2 minutos en R_4. Ponemos a funcionar R_9 y, al pasar los dos minutos de R_4 quedarán 7 minutos en R_9.

- *Para medir 8 minutos*: ponemos dos veces R_4.

- *Para medir 9 minutos*: ponemos a funcionar R_9.

- *Para medir 10 minutos*: conseguimos que queden 6 minutos en R_9 por los procedimientos ya vistos anteriormente y, cuando pasan esos 6 minutos, ponemos a funcionar R_4 obteniendo así los 10 minutos.

4. en esta figura podemos encontrar los siguientes tipos de triángulos:



En cada figura podemos encontrar 5 triángulos iguales al rayado en la misma; por tanto, en total hay $5 x 6 = 30$ triángulos.

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Encuentra los valores de x que hacen ciertas las desigualdades en cada uno de los siguientes apartados:

   a) $f(x) = x^3 - 6x^2$; $D[f(x)] > 0$
   b) $g(x) = \dfrac{3}{x^2}$; $g'(x) < 0$
   c) $h(x) = x \cdot e^x$; $h'(x) > 0$

2. Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de cada una de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = x^2 - 5x + 4$
   b) $g(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 5$
   c) $h(x) = \dfrac{2}{x}$
   d) $i(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$
   e) $j(x) = \ln x$
   f) $k(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

3. Una compañía de autobuses observa que sus ingresos dependen del precio del billete según la función:

$$I(p) = 18p - 3p^2$$

   siendo p el precio del billete en euros. ¿Para qué valores de p los ingresos aumentan?

4. En una empresa se ha hecho un estudio sobre el rendimiento, en tanto por ciento, de los trabajadores en función del tiempo a lo largo de un día cualquiera, y se ha obtenido la función:

$$f(t) = 3\,200t - 400t^2, \quad 0 < t < 8$$

   con t en horas. ¿En qué periodo de tiempo el rendimiento aumenta? ¿En qué periodo de tiempo disminuye?

5. La producción de tomates en un invernadero depende de la temperatura que hay en el mismo, mediante la expresión:

$$P(x) = -x^3 + 48x^2 - 720x$$

   con $P(x)$ en kg y x en grados centígrados. ¿Entre qué valores hay que mantener la temperatura del invernadero para que la producción aumente?

6. Determina los máximos y mínimos de cada una de las siguientes funciones:

   a) $y = 2x^2 + 8x - 3$
   b) $y = 4 - 3x$
   c) $y = 3x^3 - 9x^2 + 2$
   d) $y = 1 - 24x + 6x^2 + 8x^3 - 3x^4$
   e) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$
   f) $y = \dfrac{2}{x^2 + 1}$
   g) $y = \ln (x^2 + 1)$
   h) $y = x^2 \cdot e^x$
   i) $y = \dfrac{x^2}{x + 1}$

7. Calcula el valor de K para el cual la función $f(x) = x^3 + Kx^2 - 3x$ tiene un mínimo relativo en $x = 3$.

8. Dada la función $f(x) = ax - x^2 + b$, halla a y b para que esta función tenga un máximo relativo en el punto (2, 7).

9. Halla dos números cuya suma sea 6 unidades y el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo.

SOLUCIONES

1. La solución queda:

a) $D[f(x)] = 3x^2 - 12x \;\Rightarrow\; 3x^2 - 12x > 0 \;\Rightarrow\; (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$.

b) $D[g(x)] = -\dfrac{6}{x^3} \;\Rightarrow\; -\dfrac{6}{x^3} < 0 \;\Rightarrow\; (0, +\infty)$

c) $D[h(x)] = e^x + xe^x \;\Rightarrow\; e^x + xe^x > 0 \;\Rightarrow\; (-1, +\infty)$

2. Los intervalos quedan:

a) $f'(x) = 2x - 5$ es creciente en $\left(\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$ y decreciente en $\left(-\infty, \dfrac{5}{2}\right)$.

b) $g'(x) = -3x^2 + 12x - 9$ es creciente en $(1, 3)$ y decreciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

c) $h'(x) = -\dfrac{2}{x^2}$ es decreciente en $\mathbb{R} - \{0\}$.

d) $i'(x) = \dfrac{1 - x^2}{\left(1 + x^2\right)^2}$ es creciente en $(-1, 1)$ y decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

e) $j'(x) = \dfrac{1}{x}$ es creciente en su dominio $(0, +\infty)$.

f) $k'(x) = \dfrac{-4x}{\left(x^2 - 1\right)^2}$ es creciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ y decreciente en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.

3. Los ingresos aumentan para los valores de p que verifiquen I'(p)>0.
Es decir: $I'(p) = 18 - 6p > 0 \;\Rightarrow\; p \in (0, 3)$.

4. El rendimiento aumenta para los valores de *t* que hacen $f'(t) > 0$ y disminuye para los valores de *t* que hacen $f'(t) < 0$.

La derivada queda: $f'(t) = 3\,200 - 800t \Rightarrow \begin{cases} f'(t) > 0 \;\Rightarrow\; t \in (0, 4) \\ f'(t) < 0 \;\Rightarrow\; t \in (4, 8) \end{cases}$

5. La producción aumenta para todos los valores de *x* que verifiquen $P'(x) > 0$.
Queda: $P'(x) = -3x^2 + 96x - 720 \;\Rightarrow\; P'(x) > 0 \;\; \forall x \in (12, 20)$.

6. Queda en cada caso:

a) Mínimo en el punto $(-2,-11)$.

b) Carece de máximos y mínimos relativos.

c) Máximo en $(0,2)$ y mínimo en $(2,-10)$.

d) Mínimo relativo en $(1,-12)$ y máximos relativos en los puntos $(-1,20)$ y $(2,-7)$.

e) Máximo relativo en $(1,5)$ y mínimo relativo en $(3,1)$.

f) Máximo relativo en $(0,2)$.

g) Mínimo relativo en $(0,0)$.

h) Mínimo relativo en $(0,0)$ y máximo relativo en $\left(-2,\dfrac{4}{e^2}\right)$.

i) Mínimo relativo en $(0,0)$ y máximo relativo en $\left(-2,-4\right)$.

7. La función debe verificar que $f'(3)=0$ y $f''(3)>0$.

Por tanto:

$$f'(x)=3x^2+2Kx-3 \;\Rightarrow\; f'(3)=24+6K=0 \;\Rightarrow\; K=-4$$
$$f''(x)=6x+2K=6x-8 \;\Rightarrow\; f''(3)>0$$

Por tanto, el valor buscado es $K=-4$.

8. La función tiene un máximo relativo en $(2,7)$ si verifica:

$$\left.\begin{aligned} f(2)&=7\\ f'(2)&=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2a-4+b&=7\\ a-4&=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} b&=3\\ a&=4\end{aligned}$$

9. Los números son (x) y $(6-x)$.

El producto queda: $P=(6-x)\cdot x^2=6x^2-x^3$.

Este producto es máximo para $x=4$. Los números buscados son 4 y 2.

■ 10. Una empresa estima que los ingresos y gastos anuales (en euros) que genera la fabricación de x unidades de un producto vienen dados por:

Ingresos: $I(x) = 2x^2 + 360x$ Gastos: $G(x) = 4x^2 + 120x + 70$

a) Encuentra la función que dé el beneficio de la empresa.

b) ¿Cuántas unidades debe fabricar para que el beneficio sea máximo?

c) ¿A cuántos euros asciende este beneficio máximo?

■ 11. Se desea construir el marco para una puerta rectangular que tenga 2,5 m² de luz. Se sabe que el coste del marco es de 3 euros por cada metro de alto y 2 euros por cada metro de ancho. Halla las dimensiones de la puerta de marco lo más económico posible.

■ 12. De todas las fincas rectangulares de 1 600 m² de área, ¿cuál es la más barata de cercar?

■ 13. El ayuntamiento de un pueblo dispone de 1 440 metros de valla para cercar tres pistas rectangulares, unidas por el lado mayor y consecutivas, para dedicarlas a entrenamientos de atletismo. Halla las dimensiones de estas que hacen que su área sea máxima.

■ 14. El valor en millones de euros de una empresa en función del tiempo (en años) que lleva funcionando, viene dado por:

$$f(t) = 9 - (t-2)^2 \quad \text{con } 0 \leq t \leq 6$$

¿En qué momento alcanzó su valor máximo?

■ 15. ¿Qué dimensiones debe tener una botella cilíndrica de 1 litro de capacidad para que se utilice en su construcción la menor cantidad de material posible?

■ 16. Halla el volumen máximo de todos los cilindros inscritos en una esfera de 40 cm de radio.

■ 17. La suma de todas las aristas de un prisma recto de base cuadrada es 48 cm. Halla las dimensiones para que el volumen sea máximo. ¿Qué valor alcanza este volumen máximo?

■ 18. Halla las dimensiones del rectángulo de mayor área que podemos cercar con una cuerda de 24 cm.

■ 19. Una empresa maderera arroja diariamente material según la función:

$$p(t) = 0{,}01t^3 - 0{,}2t^2 + t + 1$$

siendo p la cantidad de material en kilogramos y t la hora del día con $8 \leq t \leq 20$.

¿En qué momento del día aumenta la cantidad de material que arroja? ¿en cuál disminuye? Halla la cantidad máxima de material que arroja y a qué hora se produce eso.

10. La solución queda:

a) Función Beneficio $B(x)=I(x)-G(x)$

$\Rightarrow B(x)=(2x^2+360x)-(4x^2+120x+70)=-2x^2+240x-70$

b) $B'(x)=-4x+240=0 \Rightarrow x=60$

$B''(60)<0 \Rightarrow$ El beneficio es máximo al vender 60 unidades del producto.

c) Para $x=60 \Rightarrow B(60)=7130$ euros.

El beneficio máximo es de 7130 euros.

11. Llamamos x a la anchura de la puerta e y a la altura.

Obtenemos de las condiciones del enunciado que: $x\cdot y=2{,}5 \Rightarrow y=\dfrac{2{,}5}{x}$.

Hemos de minimizar el coste del marco, que viene dado por: $C=6y+4x=\dfrac{15+4x^2}{x}$.

Derivando e igualando a cero: $C'(x)=\dfrac{4x^2-15}{x^2}=0 \Rightarrow x=\pm 1{,}94$

Como: $C''(1{,}94)>0 \Rightarrow$ El coste es mínimo para: $x=1{,}94$ m; $y=1{,}29$ m.

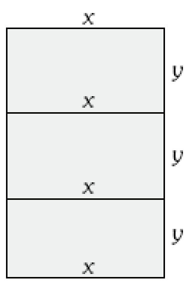
12. Llamando x e y a los lados de la finca rectangular obtenemos:

$$x\cdot y=1600 \Rightarrow y=\frac{1600}{x} \Rightarrow \text{Perímetro}=2x+2y=2x+2\cdot\frac{1600}{x}$$

Y este perímetro es de longitud mínima para $x=40$ m e $y=40$ m.

Por tanto, la más barata de cercar es un cuadrado de 40 m de lado.

13. La solución queda:



Observando el dibujo tenemos:

$$4x+6y=1400 \Rightarrow y=\frac{720-2x}{3}$$

$$\text{Área}=3\cdot x\cdot y=3\cdot x\cdot\left(\frac{720-2x}{3}\right)=720x-2x^2$$

El área es máxima para $x=180$ m e $y=120$ m.

14. La empresa alcanza el valor máximo en $f'(t)=0$ y $f''(t)<0$, es decir, para $t=2$ años.

15. La solución queda:

Llamamos r al radio de la base y h a la altura del cilindro. Ocurre: $\pi r^2 \cdot h = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{\pi r^2}$

Cantidad de material $= 2\pi r\, h + 2\pi r^2 = \frac{2\pi r}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2}{r} + 2\pi r^2$

Esta cantidad es mínima para:

$$r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\,\text{dm};\ h = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}\,\text{dm, es decir, las dimensiones son } r = 0{,}54\,\text{dm y } h = 1{,}08\,\text{dm.}$$

16. La solución queda:

Llamamos r al radio de la base y h a la altura del cilindro. Según las condiciones del enunciado ocurre que:

$$h^2 + (2r)^2 = (80)^2 \Rightarrow r^2 = \frac{6\,400 - h^2}{4}$$

Operando:

$$\text{Vol} = \pi r^2 \cdot h = \pi h \cdot \frac{6\,400 - h^2}{4} = \frac{\pi}{4}\left(6\,400 h - h^3\right) \Rightarrow V'(h) = \frac{\pi}{4}\left(6\,400 - 3h^2\right) = 0 \Rightarrow h = \pm 46{,}2\,\text{cm}$$

$$\text{V}''(46{,}42) < 0 \Rightarrow \text{El volumen es máximo para: } h = 46{,}2\,\text{cm};\ r = 32{,}7\,\text{cm.}$$

17. Llamando x a la arista básica e y a la arista lateral se debe verificar:

$$8x + 4y = 48 \Rightarrow 2x + y = 12 \Rightarrow y = 12 - 2x$$

$\text{Volumen} = x^2 \cdot y = x^2 \cdot (12 - 2x) = 12x^2 - 2x^3$; es máximo para $x = 4\,\text{cm}$ e $y = 4\,\text{cm}$. Es decir, el prisma de volumen máximo es un cubo de 4 cm de lado.

18. Llamando x e y a los lados del rectángulo se debe verificar: $2x + 2y = 24 \Rightarrow x + y = 12$.

$\text{Área} = x \cdot y = x \cdot (12 - x) = 12x - x^2$ debe ser máximo.

El área es máxima para $x = 6\,\text{cm}$ e $y = 6\,\text{cm}$.

Por tanto, el rectángulo es un cuadrado de 6 cm de lado.

19. La cantidad de material aumenta cuando la función es creciente y disminuye cuando es decreciente.

Esta función es creciente $(-\infty; 3{,}3) \cup (10, +\infty)$, y decreciente en $(3{,}3; 10)$; por tanto, la cantidad de material aumenta para $t \in (10, 20)$ y disminuye para $t \in (8, 10)$.

El máximo de esta función está en $(3{,}3; 2{,}48)$, luego la cantidad máxima de material está en $t = 3{,}3$ y arroja 2,48 kg, pero esta hora se sale del intervalo fijado.

ACTIVIDADES FINALES

20. Estudia la concavidad de las siguientes funciones:

a) $y = x^4 - 8x^2 - 2$

b) $y = 4 - x^2$

c) $y = 2 - 3x^2 - x^3$

d) $y = \dfrac{2}{x}$

e) $y = \ln(x - 1)$

f) $y = 2(x - 1)^3$

21. Halla los puntos de inflexión de cada una de las siguientes funciones:

a) $y = 8x^2 - x^4 - 2$

b) $y = 3(x + 2)^3$

c) $y = x^6 - 15x^2 - 1$

22. Halla a, b, c para que la función $y = ax^3 + x^2 + bx + c$ tenga un máximo relativo en $(0, 3)$ y un punto de inflexión en $x = 1$.

23. La función $f(x) = x^3 + px + q$ tiene un mínimo que vale 3 para $x = 2$. Halla sus máximos y mínimos, si es que los tiene, y su punto de inflexión.

24. Halla el valor de m para el cual la función $y = x^4 + mx^2 + 2$ tiene un punto de inflexión en $x = 1$.

25. Representa gráficamente la función que se ajuste a cada una de las siguientes condiciones:

a) Dom $f = \mathbb{R}$; Mínimos relativos $(-1, -4)$, $(1, -4)$; Máximo relativo $(0, -3)$; Cortes con el eje OX en $(-\sqrt{3}, 0)$ y $(\sqrt{3}, 0)$, simétrica respecto a OY.

b) Dom $g = \mathbb{R} - \{+1, -1\}$; Máximo relativo $(0, -1)$; Asíntotas verticales $x = 1$, $x = -1$; asíntota horizontal $y = 0$; $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -1^-} g(x) = \infty$

c) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$; Asíntotas las rectas de ecuaciones $x = 0$; $y = x$; Máximo relativo $(-1, -2)$ y mínimo relativo $(1, 2)$; Simétrica respecto al origen de coordenadas y no posee puntos de corte con los ejes.

26. Representa gráficamente cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3$

b) $g(x) = 3x^2 - 2x^3$

c) $h(x) = -3x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 1$

d) $k(x) = \dfrac{9}{x^2 - 9}$

e) $l(x) = \dfrac{x - 2}{x + 2}$

f) $m(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$

g) $p(x) = \dfrac{8}{x^2 + 4}$

h) $i(x) = \dfrac{4 - x}{x^2 - 1}$

i) $v(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x + 1}$

j) $w(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$

27. Se ha comprobado que la evolución, desde el año 1980 ($t = 0$) del número de ejemplares del lince ibérico sigue la ley:

$$N = \frac{t + 2}{t + 1} \quad \text{con } N = \text{miles de ejemplares y } t = \text{años}$$

¿Cómo va evolucionando el lince ibérico? ¿Se puede considerar especie en peligro de extinción?

20. En cada uno de los casos queda:

Cóncava hacia las y negativas en $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

Cóncava hacia las y positivas en $\left(-\infty,-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\frac{2}{\sqrt{3}},+\infty\right)$.

a)Cóncava hacia las y negativas en todo $\mathbb{R}$.

Cóncava hacia las y negativas en $(-1,+\infty)$.

Cóncava hacia las y positivas en $(-\infty,-1)$.

Cóncava hacia las y negativas en $(-\infty,0)$.

Cóncava hacia las y positivas en $(0,+\infty)$.

b)Cóncava hacia las y negativas en $\mathbb{R}-\{1\}$.

Cóncava hacia las y negativas en $(-\infty,1)$.

Cóncava hacia las y positivas en $(1,+\infty)$.

21. Quedan del siguiente modo:

a) $y'=16x-4x^3 \;\Rightarrow\; y''=16-12x^2 \;\Rightarrow\; x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Esta función tiene los dos siguientes puntos de inflexión: $\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{62}{9}\right)$ y $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{62}{9}\right)$.

b) Esta función tiene un punto de inflexión en: $(-2,0)$.

c) Esta función tiene dos puntos de inflexión en: $(1,-15)$ y $(-1,-15)$.

22. La función debe verificar:

$$\left.\begin{array}{r} 3=c \\ b=0 \\ 6a+2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} c=3 \\ b=0 \\ a=-\dfrac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{La función queda}: y=-\frac{1}{3}x^3+x^2+3.$$

Esta función presenta un máximo relativo en $\left(2,\dfrac{13}{3}\right)$, un mínimo relativo en $(0,3)$ y un punto de inflexión en $\left(1,\dfrac{11}{3}\right)$.

Por tanto, no tiene un máximo en $(0,3)$, sino un mínimo.

No existe ningún valor de *a*, *b*, *c* que verifique las condiciones del enunciado.

23. La función debe verificar:

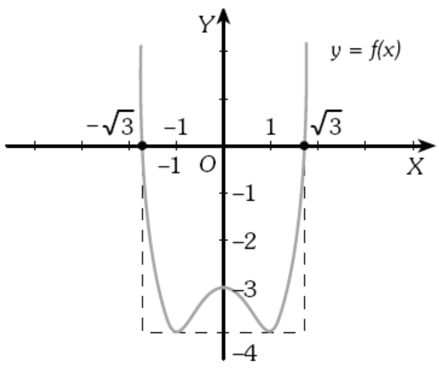
$$\left.\begin{array}{r} 3=8+2p+q \\ 12+p=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} p=-12 \\ q=19 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{La función queda}: f(x)=x^3-12x+19.$$

Esta función presenta un máximo en $(-2,35)$, un mínimo en $(2,3)$. Además tiene un punto de inflexión en $(0,19)$.

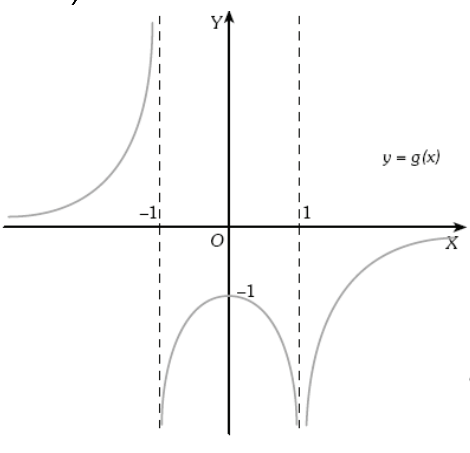
24. La función debe cumplir $y''(x)=0$ e $y'''(x)\neq 0$; por tanto, $12+2m=0 \Rightarrow m=-6$.
La función $y=x^4-6x^2+2$ tiene un punto de inflexión en $(1,-3)$ y otro en $(-1,-3)$.

25. Las representaciones quedan:

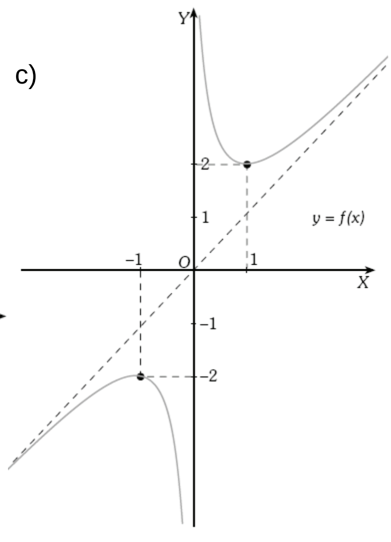
a)



b)

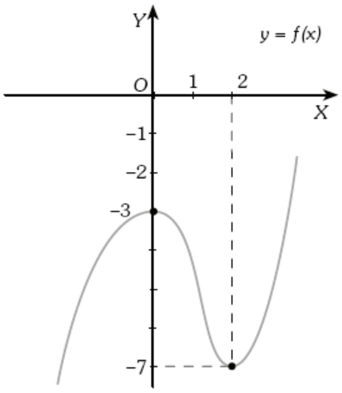


c)



26. Cada una de las gráficas quedan:

a) $f(x)=x^3-3x^2-3$



Dominio $=\mathbb{R}$.

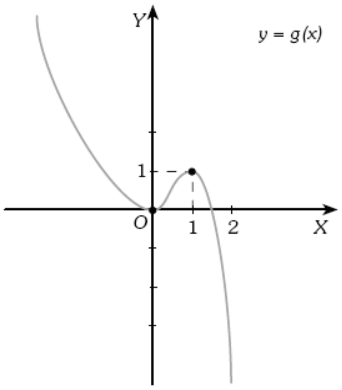
No presenta cortes con OX enteros.

Corte con OY en $(0,-3)$.

No tiene simetrías. No tiene asíntotas.

Tiene máximo en $(0,-3)$ y mínimo en $(2,-7)$.

b) $g(x)=3x^2-2x^3$

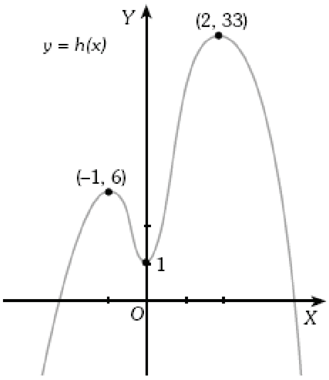


Dominio $=\mathbb{R}$.

Corte en $(0,0)$ $\left(\frac{3}{2},0\right)$.

Tiene máximo en $(1,1)$ y mínimo en $(0,0)$.

c) $h(x)=-3x^4+4x^3+12x^2+1$



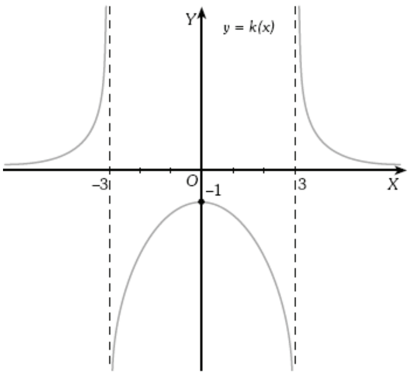
Dominio $=\mathbb{R}$.

Corte con ejes en $(0,1)$.

Máximo en $(2,33)$ y $(-1,6)$.

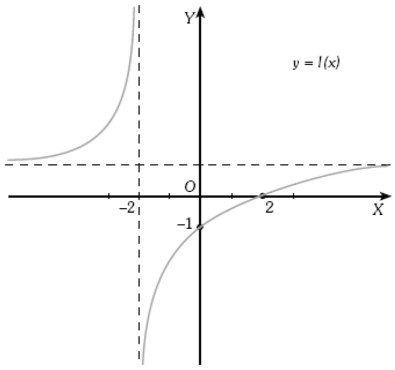
Mínimo en $(0,1)$.

d) $k(x)=\dfrac{9}{x^2-9}$



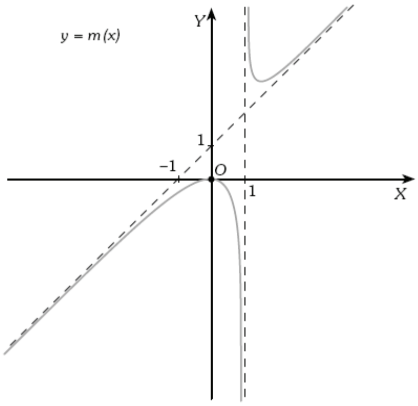
Dominio $=\mathbb{R}-\{-3,3\}$.
Corte con ejes en $(0,-1)$.
Simétrica respecto OY.
Asíntotas verticales: $x=3$; $x=-3$.
Asíntota horizontal: $y=0$.

e) $l(x)=\dfrac{x-2}{x+2}$



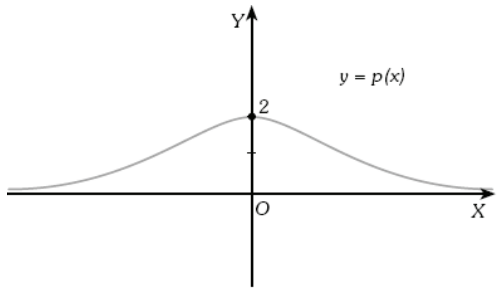
Dominio $=\mathbb{R}-\{-2\}$.
Cortes en $(0,-1)$ $(2,0)$.
Asíntota vertical: $x=-2$.
Asíntota horizontal: $y=1$.

f) $m(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$



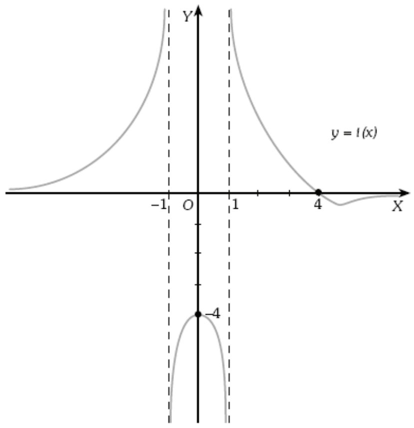
Dominio $=\mathbb{R}-\{1\}$.
Corte con ejes en $(0,0)$.
Asíntota vertical: $x=1$.
Asíntota oblicua: $y=x+1$.

g) $p(x)=\frac{8}{x^2+4}$



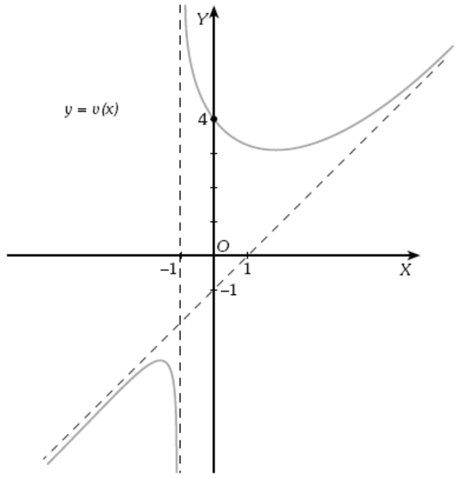
Dominio $=\mathbb{R}$.
Corte con ejes en $(0,2)$.
Simétrica respecto a OY.
Asíntota horizontal: $y=0$.
Máximo relativo en $(0,2)$.

h) $i(x)=\frac{4-x}{x^2-1}$



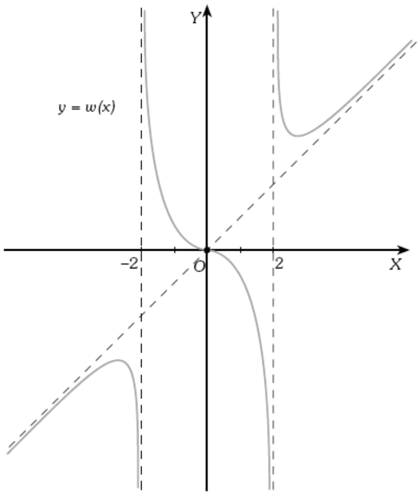
Dominio $=\mathbb{R}-\{-1,1\}$.
Cortes en $(0,-4)$ $(4,0)$.
Asíntotas verticales: $x=1; x=-1$.
Asíntota horizontal: $y=0$.
Máximo en $(0,2;-3,96)$.
Mínimo en $(7,8;-0,06)$.

i) $v(x)=\frac{x^2+4}{x+1}$



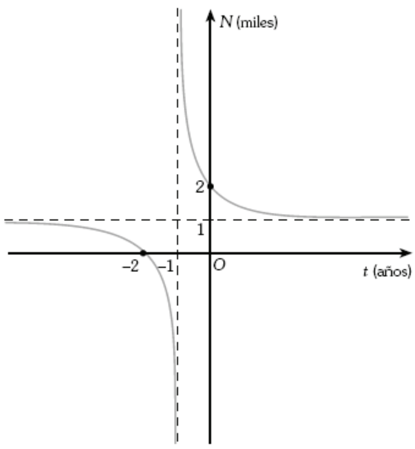
Dominio $=\mathbb{R}-\{-1\}$.
Cortes en $(0,4)$.
Asíntota vertical: $x=-1$.
Asíntota oblicua: $y=x-1$.
Máximo en $\left(-3,-\frac{13}{2}\right)$ y mínimo en $\left(1,2;\frac{5}{2}\right)$.

j) $w(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$



Dominio $= \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.
Cortes en $(0,0)$.
Simétrica respecto al origen.
Asíntota vertical: $x = -2; x = 2$.
Asíntota oblicua: $y = x$.
Máximo en $(-3,5; -5,2)$.
Mínimo en $(3,5; 5,2)$.

27. La función dada es :



En el dibujo está representada gráficamente la función dada.
Sólo consideramos la parte positiva de la gráfica (desde $t = 0$), pues el resto no tiene sentido en el contexto.

Unidad 14 – Introducción a las integrales y sus aplicaciones

PÁGINA 321

cuestiones iniciales

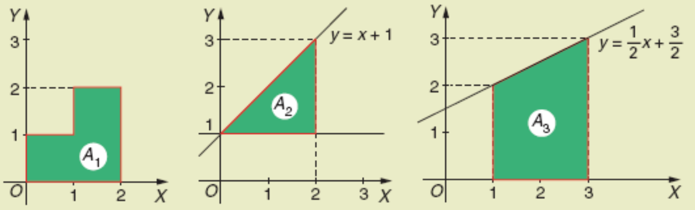
1. Una función F es primitiva de otra f siempre y cuando la derivada de F sea f, es decir, $F' = f$. Encuentra dos primitivas de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 4x$ c) $f(x) = \cos x$ e) $f(x) = \frac{5}{x}$

b) $f(x) = 3x^2$ d) $f(x) = e^x$

2. Calcula el área del recinto limitado por la recta $y = 2x + 4$, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 3$.

3. Calcula el área de los recintos planos A_1, A_2 y A_3:



SOLUCIONES

---

1. Las primitivas quedan:

   a) Primitivas de $f(x) = 4x$ son: $F(x) = 2x^2 + 3;\ G(x) = 2x^2$

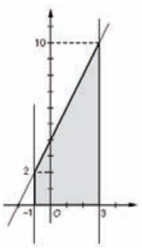
   b) Primitivas de $f(x) = 3x^2$ son: $F(x) = x^3 - 5;\ G(x) = x^3 + \sqrt{2}$

   c) Primitivas de $f(x) = \cos x$ son: $F(x) = \operatorname{sen} x;\ G(x) = \operatorname{sen} x + 1$

   d) Primitivas de $f(x) = e^x$ son: $F(x) = e^x + 3;\ G(x) = e^x - 7$

   e) Primitivas de $f(x) = \frac{5}{x}$ son: $F(x) = 5\ln|x| - 2;\ G(x) = 5\ln|x|$

2. La solución queda:



En el diagrama cartesiano está representado el recinto cuya área queremos hallar.
El área vale:

$$A = \frac{10+2}{2} \cdot 4 = 24\,\text{u}^2$$

3. Queda en cada caso:

$$\text{Área}(A_1) = 2^2 - 1 = 3\,\text{u}^2 \qquad \text{Área}(A_2) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2\,\text{u}^2 \qquad \text{Área}(A_3) = \frac{2+3}{2} \cdot 2 = 5\,\text{u}^2$$

PÁGINA 335

ACTIVIDADES

■ Intenta buscar analogías en tu archivo, y resuelve los siguientes problemas:

1. **Juego al quince.** Nueve tarjetas numeradas del 1 al 9 se colocan sobre la mesa. Es un juego para dos jugadores y gana el primero que consiga sumar 15, tomando alternativamente una tarjeta cada uno. Intenta elaborar dos estrategias que puedan conducir a la victoria: una para usarla si eres tú el primero en comenzar el juego, y otra para si te toca en segundo lugar.

2. **Las gemas de la familia.** Un antiguo problema indio cuenta de qué manera, al morir un rico nabab, sus hijos se repartieron la herencia, consistente en un cierto número de gemas iguales. El hijo mayor tomó una piedra más una séptima parte del resto; el segundo, 2 piedras más un séptimo del resto; y así sucesivamente. Al terminar el reparto, todos los hijos habían recibido el mismo número de gemas. ¿Cuántos hijos y gemas tenía el nabab?

3. **Lúnula y triángulo.** ¿Existe alguna relación entre el área de la lúnula y la del triángulo de la figura adjunta?

4. **La cadena del estudiante.** Un estudiante, a mediados de mes, se ha quedado sin dinero y no puede pagar la pensión de los últimos quince días. Dispone de una cadena de oro de 15 cm de longitud, y llega al acuerdo con la patrona de que le pagará la pensión entregándole 1 cm de cadena cada día. El estudiante piensa en la forma de cumplir con el acuerdo al que ha llegado, y que la cadena no pierde valor al cortarla en muchos trozos. Por esto, decidió cortar la cadena en sólo 4 trozos. ¿Cómo consiguió pagar a la patrona?

SOLUCIONES

1. La solución queda:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

La estrategia consiste en establecer una analogía con el cuadro mágico 3 x 3 que contiene los nueve primeros números naturales 1 … 9 y la constante mágica 15.
Hay que utilizarlo como si se jugase a las tres en raya.

2. En total el nabab tenía 36 gemas y 6 hijos.

Al mayor le da: $1+\frac{35}{7}=6$ gemas. Quedan 30.

Al 2.º le da: $2+\frac{28}{7}=6$ gemas. Quedan 24.

Al 3.º le da: $3+\frac{21}{7}=6$ gemas. Quedan 18.

Al 4.º le da: $4+\frac{14}{7}=6$ gemas. Quedan 12.

Al 5.º le da: $5+\frac{7}{7}=6$ gemas. Quedan 6.

Al 6.º le da: 6 gemas.

3. La solución queda:

$$\text{Área triángulo} = \frac{r^2}{2};$$

$$\text{Área lúnula} = \frac{1}{2}\,\text{Área semicírculo} - \text{Área }(x);$$

$$\text{Área }(x) = \frac{1}{4}\,\text{Área círculo} - \text{Área triángulo} = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\text{Área lúnula} = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2}\right) = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{\pi r^2}{4} + \frac{r^2}{2} = \frac{r^2}{2}$$

Ambas áreas son iguales.

4. Cortó la cadena en 4 trozos de 1, 2, 4 y 8 cm cada uno.

- El primer día le dio 1 cm.
- El segundo día le dio el trozo de 2 cm y le devolvió la patrona el de 1 cm.
- El tercer día le dio el trozo de 1 cm, luego la patrona tiene 1 cm y 2 cm.
- El cuarto día le dio el trozo de 4 cm y la patrona le devolvió los dos trozos que tenía.
- Así sucesivamente.

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Halla tres primitivas de cada una de las siguientes funciones:

   a) $f_1(x) = 2x$ b) $f_2(x) = 4x^3 - 5$ c) $f_3(x) = 2 \operatorname{sen} 2x$ d) $f_4(x) = e^{2x}$

2. Halla la primitiva de la función $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ que valga 3 para $x = 0$.

3. Encuentra una función $y = f(x)$ cuya derivada sea $f'(x) = 3x^2$ y pase por el punto $(2, 10)$.

4. Demuestra que la función $F(x) = 2x^2 \cdot \ln x - x^2 + \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ es una primitiva de $f(x) = 4x \ln x$.

5. Calcula las siguientes integrales, cuyas funciones primitivas son potenciales:

   a) $\displaystyle\int 5x^7\,dx$
   b) $\displaystyle\int \frac{2}{x^6}\,dx$
   c) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x^4}\,dx$
   d) $\displaystyle\int \frac{x^{-2}}{x^3}\,dx$
   e) $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt[4]{x}}\,dx$
   f) $\displaystyle\int x^5(x^2-1)\,dx$
   g) $\displaystyle\int (5x-3)^{12}\,dx$
   h) $\displaystyle\int (6x-5)^3\,dx$
   i) $\displaystyle\int \frac{1}{(2x+1)^2}\,dx$
   j) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cdot \cos x\,dx$
   k) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\,dx$
   l) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

6. Calcula las siguientes integrales, cuyas funciones primitivas son exponenciales:

   a) $\displaystyle\int 3^{2x}\,dx$
   b) $\displaystyle\int e^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x\,dx$
   c) $\displaystyle\int 4^{x^2+1} \cdot x\,dx$
   d) $\displaystyle\int \sqrt{2^x}\,dx$
   e) $\displaystyle\int \frac{e^{\ln x}}{x}\,dx$
   f) $\displaystyle\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

7. Calcula las siguientes integrales, cuyas funciones primitivas son logarítmicas:

   a) $\displaystyle\int \frac{2}{3x+5}\,dx$
   b) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx$
   c) $\displaystyle\int \frac{3x+6}{x^2+4x+5}\,dx$
   d) $\displaystyle\int \frac{2x^2}{3x^3-7}\,dx$
   e) $\displaystyle\int \frac{e^x}{2e^x-3}\,dx$
   f) $\displaystyle\int \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$

8. Calcula las siguientes integrales, cuyas funciones primitivas son trigonométricas:

   a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(3x+1)\,dx$
   b) $\displaystyle\int 2x \cdot \cos(3x^2)\,dx$
   c) $\displaystyle\int [1 + \operatorname{tg}^2(e^x)] \cdot e^x\,dx$
   d) $\displaystyle\int \frac{3x}{\cos^2 x^2}\,dx$
   e) $\displaystyle\int \sec^2 x\,dx$
   f) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

SOLUCIONES

1. Las primitivas quedan:

a) Primitivas de $f_1(x)=2x$ son: $F(x)=x^2$; $G(x)=x^2+3$; $H(x)=x^2-5$

b) Primitivas de $f_2(x)=4x^3-5$ son: $F(x)=x^4-5x$; $G(x)=x^4-5x-7$; $H(x)=x^4-5x+2$

c) Primitivas de $f_3(x)=2\,\mathrm{sen}\,2x$ son: $F(x)=-\cos 2x$; $G(x)=-\cos 2x+3$; $H(x)=5-\cos 2x$

d) Primitivas de $f_4(x)=e^{2x}$ son: $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$; $G(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+7$; $H(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-\sqrt{5}$

2. La solución queda:

Las primitivas de $f(x)=\frac{1}{x+1}$ son: $F(x)=\int\frac{1}{x+1}dx=\ln|x+1|+C$

La primitiva que vale 3 para $x=0$ es: $F(0)=3 \Rightarrow \ln 1+C=3 \Rightarrow C=3$, es decir, $F(x)=\ln|x+1|+3$

3. Las funciones cuya derivada es $3x^2$ son de la forma: $f(x)=x^3+C$

La que pasa por (2, 10) verifica: $f(2)=8+C \Rightarrow C=2$

Por tanto, la función buscada es: $f(x)=x^3+2$

4. Basta con demostrar que $F'(x)=f(x)$:

$$F'(x)=4x\ln x+\frac{2x^2}{x}-2x=4x\ln x=f(x)$$

5. Las integrales quedan:

a) $\int 5x^7\,dx=\frac{5x^8}{8}+C$

b) $\int\frac{2}{x^6}\,dx=\int 2x^{-6}\,dx=\frac{-2}{5x^5}+C$

c) $\int\sqrt[3]{x^4}\,dx=\int x^{\frac{4}{3}}\,dx=\frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}}+C=\frac{3\sqrt[3]{x^7}}{7}+C$

d) $\int\frac{x^{-2}}{x^3}\,dx=\int x^{-5}\,dx=\frac{-1}{4x^4}+C$

e) $\int\frac{3x}{\sqrt[4]{x}}\,dx=\int 3x^{\frac{3}{4}}\,dx=\frac{12\sqrt[4]{x^7}}{7}+C$

f) $\int x^5(x^2-1)\,dx=\int(x^7-x^5)\,dx=\frac{x^8}{8}-\frac{x^6}{6}+C$

g) $\int (5x-3)^{12}\,dx = \dfrac{(5x-3)^{13}}{65} + C$

h) $\int (6x-5)^{3}\,dx = \dfrac{(6x-5)^{4}}{24} + C$

i) $\int \dfrac{1}{(2x+1)^2}\,dx = \int (2x+1)^{-2}\,dx = -\dfrac{1}{2\,(2x+1)} + C$

j) $\int \text{sen}\,x \cdot \cos x\,dx = \dfrac{(\text{sen}\,x)^2}{2} + C$

k) $\int \dfrac{\text{tg}\,x}{\cos^2 x}\,dx = \dfrac{(\text{tg}\,x)^2}{2} + C$

l) $\int \dfrac{\ln x}{x}\,dx = \dfrac{(\ln x)^2}{2} + C$

6. Las integrales quedan:

a) $\int 3^{2x}\,dx = \dfrac{1}{2}\int 3^{2x} \cdot 2\,dx = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3^{2x}}{\ln 3} + C$

b) $\int e^{\text{sen}\,x} \cdot \cos x\,dx = e^{\text{sen}\,x} + C$

c) $\int 4^{x^2+1} \cdot x\,dx = \dfrac{1}{2}\int 4^{x^2+1} \cdot 2x\,dx = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4^{x^2+1}}{\ln 4} + C$

d) $\int \sqrt{2^x}\,dx = \int 2^{\frac{x}{2}}\,dx = 2\int 2^{\frac{x}{2}} \cdot \dfrac{1}{2}\,dx = 2 \cdot \dfrac{2^{\frac{x}{2}}}{\ln 2} + C$

e) $\int \dfrac{e^{\ln x}}{x}\,dx = e^{\ln x} + C$

f) $\int \dfrac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int 2^{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = 2 \cdot \dfrac{2^{\sqrt{x}}}{\ln 2} + C$

7. Las integrales quedan:

a) $\int \dfrac{2}{3x+5}\,dx = \dfrac{2}{3}\int \dfrac{3}{3x+5}\,dx = \dfrac{2}{3}\ln|3x+5| + C$

b) $\int \text{tg}\,x\,dx = -\ln|\cos x| + C$

c) $\int \dfrac{3x+6}{x^2+4x+5}\,dx = \dfrac{3}{2}\int \dfrac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx = \dfrac{3}{2}\ln|x^2+4x+5| + C$

d) $\int \dfrac{2x^2}{3x^3-7}\,dx = \dfrac{2}{9}\int \dfrac{9x^2}{3x^3-7}\,dx = \dfrac{2}{9}\ln|3x^3-7| + C$

e) $\int \dfrac{e^x}{2\,e^x-3}\,dx = \dfrac{1}{2}\ln|2\,e^x-3| + C$

f) $\int \dfrac{1}{x\,(\ln x)^2}\,dx = \int (\ln x)^{-2} \cdot \dfrac{1}{x}\,dx = \dfrac{-1}{\ln x} + C$

8. Las integrales quedan:

a) $\int \operatorname{sen}(3x+1)\,dx = \frac{1}{3}\int \operatorname{sen}(3x+1)\cdot 3\,dx = -\frac{1}{3}\cos(3x+1)+C$

b) $\int 2x\cdot\cos(3x^2)\,dx = \frac{1}{3}\int \cos(3x^2)\cdot 6x\,dx = \frac{\operatorname{sen}(3x^2)}{3}+C$

c) $\int (1+\operatorname{tg}^2 e^x)\cdot e^x\,dx = \operatorname{tg} e^x + C$

d) $\int \frac{3x}{\cos^2 x^2}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{\cos^2 x^2}\,dx = \frac{3}{2}\operatorname{tg}(x^2)+C$

e) $\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C$

f) $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \operatorname{sen}\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = -2\cos\sqrt{x}+C$

PÁGINA 339

■ 9. Calcula las siguientes integrales, cuyas funciones primitivas son inversas de las funciones trigonométricas:

a) $\int \frac{5}{9+x^2}\,dx$

b) $\int \frac{7}{\sqrt{1-25x^2}}\,dx$

c) $\int \frac{3x}{16+9x^4}\,dx$

d) $\int \frac{8}{\sqrt{4-9x^2}}\,dx$

e) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

f) $\int \frac{-3}{9x^2+7}\,dx$

■ 10. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int \frac{2x}{(7x^2+3)}\,dx$

b) $\int \cos^3 4x \cdot \operatorname{sen} 4x\,dx$

c) $\int \left(\frac{3}{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + \frac{5}{x} - 7\right) dx$

d) $\int \frac{dx}{x \cdot \ln x}$

e) $\int \sqrt{x^2+1} \cdot 5x\,dx$

f) $\int \frac{3^x}{\sqrt{1-3^x}}\,dx$

g) $\int \frac{4x^2-8}{x^3-6x}\,dx$

h) $\int \frac{x^2-\sqrt{x}}{x}\,dx$

i) $\int e^{\cos x} \cdot \operatorname{sen} x\,dx$

j) $\int \frac{-5x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

k) $\int 3e^{-x}\,dx$

l) $\int \frac{e^x+1}{e^x+x}\,dx$

m) $\int \frac{3x+1}{x^2+16}\,dx$

n) $\int 3x\,(x^2+5)^2 dx$

ñ) $\int (5x-5)\sqrt{x^2-2x+3}\,dx$

o) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{3-2\cos x}\,dx$

p) $\int \frac{x+2}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$

q) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{4+\cos^2 x}\,dx$

■ 11. Calcula las siguientes integrales definidas:

a) $\int_0^1 (x^2+2x)\,dx$

b) $\int_1^2 \frac{1}{x+1}\,dx$

c) $\int_2^3 \frac{1}{x^2}\,dx$

d) $\int_3^4 (x^3-x^2+3x-2)\,dx$

e) $\int_1^2 x\,e^{x^2}\,dx$

f) $\int_0^1 e^x\,dx$

g) $\int_2^4 \frac{x}{x^2+1}\,dx$

h) $\int_2^6 \sqrt{x-2}\,dx$

i) $\int_1^3 (x-1)^5\,dx$

j) $\int_0^1 e^{3x}\,dx$

k) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

l) $\int_0^\pi \operatorname{sen} 2x\,dx$

m) $\int_0^\pi \cos x\,dx$

n) $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx$

ñ) $\int_0^2 x^2\sqrt{1+x^3}\,dx$

■ 12. Calcula el área en cada uno de los siguientes casos:

a) Recinto limitado por la función $f(x) = -x^2 + 4$ y el eje de abscisas.

b) Recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = e$.

c) Recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = e^{2x}$, el eje de abscisas, el eje de ordenadas y la recta $x = 2$.

9. Las integrales quedan:

a) $\int \frac{5}{9+x^2}\,dx = \int \frac{\frac{5}{9}}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}\,dx = \frac{5}{3}\text{ arc tg}\left(\frac{x}{3}\right)+C$

b) $\int \frac{7}{\sqrt{1-25x^2}}\,dx = \frac{7}{5}\cdot\int \frac{5}{\sqrt{1-(5x)^2}}\,dx = \frac{7}{5}\cdot\text{ arc sen}\,(5x)+C$

c) $\int \frac{3x}{16+9x^4}\,dx = \frac{3}{16}\int \frac{x}{1+\left(\frac{3x^2}{4}\right)^2}\,dx = \frac{3}{16}\cdot\frac{4}{6}\int \frac{\frac{6x}{4}}{1+\left(\frac{3x^2}{4}\right)^2}\,dx = \frac{1}{8}\text{ arc tg}\left(\frac{3x^2}{4}\right)+C$

d) $\int \frac{8}{\sqrt{4-9x^2}}\,dx = \frac{2}{3}\cdot 4\int \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{3x}{2}\right)^2}}\,dx = \frac{8}{3}\text{ arc sen}\left(\frac{3x}{2}\right)+C$

e) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \text{arc tg}\,e^x + C$

f) $\int \frac{-3}{9x^2+7}\,dx = -\frac{3}{7}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}\int \frac{\frac{3}{\sqrt{7}}}{1+\left(\frac{3x}{\sqrt{7}}\right)^2}\,dx = -\frac{\sqrt{7}}{7}\text{arc tg}\left(\frac{3x}{\sqrt{7}}\right)+C$

10. Las integrales quedan:

a) $\int \frac{2x}{7x^2+3}\,dx = \frac{1}{7}\ln\left|7x^2+3\right|+C$

b) $\int \cos^3 4x\cdot\text{sen } 4x\,dx = \int (\cos 4x)^3\cdot\text{sen } 4x\,dx = -\frac{1}{4}\int (\cos 4x)^3\cdot(-4\text{ sen } 4x)\,dx = \frac{-(\cos 4x)^4}{16}+C$

c) $\int\left(\frac{3}{x^2}-2\sqrt[3]{x}+\frac{5}{x}-7\right)dx = \int\left(3x^{-2}-2x^{\frac{1}{3}}+\frac{5}{x}-7\right)dx = \frac{-3}{x}-\frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2}+5\ln|x|-7x+C$

d) $\int \frac{dx}{x\cdot\ln x} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx = \ln\left|\ln x\right|+C$

e) $\int \sqrt{x^2+1}\cdot 5x\,dx = \frac{5}{2}\int (x^2+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x\,dx = \frac{5\sqrt{(x^2+1)^3}}{2}+C$

f) $\int \frac{3^x}{\sqrt{1-3^x}}\,dx = \frac{1}{-\ln 3}\int (1-3^x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-3^x\cdot\ln 3)\,dx = \frac{-2\sqrt{1-3^x}}{\ln 3}+C$

g) $\int \frac{4x^2-8}{x^3-6x}\,dx=\frac{4}{3}\int\frac{3x^2-6}{x^3-6x}\,dx=\frac{4}{3}\ln\left|x^3-6x\right|+C$

h) $\int \frac{x^2-\sqrt{x}}{x}\,dx=\int\left(x-x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=\frac{x^2}{2}-2\sqrt{x}+C$

i) $\int e^{\cos x}\cdot \text{sen } x\,dx=-\int e^{\cos x}\cdot(-\text{sen } x)\,dx=-e^{\cos x}+C$

j) $\int \frac{-5x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx=-\frac{5}{2}\int\frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\,dx=-\frac{5}{2}\text{ arc sen }(x^2)+C$

k) $\int 3\,e^{-x}\,dx=-3\,e^{-x}+C$

l) $\int \frac{e^x+1}{e^x+x}\,dx=\ln\left|e^x+x\right|+C$

m) $\int \frac{3x+1}{x^2+16}\,dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x}{x^2+16}\,dx+\int\frac{1}{x^2+16}\,dx=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+16\right|+\frac{1}{4}\text{ arc tg}\left(\frac{x}{4}\right)+C$

n) $\int 3x\cdot(x^2+5)^2\,dx=\frac{3}{2}\,\frac{(x^2+5)^3}{3}+C=\frac{(x^2+5)^3}{2}+C$

ñ) $\int (5x-5)\sqrt{x^2-2x+3}\,dx=\frac{5}{2}\int(x^2-2x+3)^{\frac{1}{2}}\cdot(2x-2)\,dx=\frac{5\sqrt{(x^2-2x+3)^3}}{3}+C$

o) $\int \frac{\text{sen } x}{3-2\cos x}\,dx=\frac{1}{2}\ln\left|3-2\cos x\right|+C$

p) $\int \frac{x+2}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx=\int x\cdot(1-4x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx+\int\frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}}\,dx=\frac{\sqrt{1-4x^2}}{-4}+\text{arc sen }(2x)+C$

q) $\int \frac{\text{sen } x}{4+\cos^2 x}\,dx=-\frac{1}{2}\int\frac{-\frac{1}{2}\text{sen } x}{1+\left(\frac{\cos x}{2}\right)^2}\,dx=-\frac{1}{2}\text{ arc tg}\left(\frac{\cos x}{2}\right)+C$

11. Las integrales quedan:

a) $\int_0^1(x^2+2x)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^1=\frac{4}{3}$

b) $\int_1^2\frac{1}{x+1}\,dx=\left[\ln|x+1|\right]_1^2=\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

c) $\int_2^3\frac{1}{x^2}\,dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_2^3=\frac{1}{6}$

d) $\int_3^4(x^3-x^2+3x-2)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-2x\right]_3^4=\frac{479}{12}$

e) $\int_1^2 x\,e^{x^2}dx=\left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_1^2=\frac{e^4-e}{2}$

f) $\int_0^1 e^x\,dx=\left[e^x\right]_0^1=e-1$

g) $\int_2^4\frac{x}{x^2+1}\,dx=\left[\frac{1}{2}\ln|x^2+1|\right]_2^4=\ln\sqrt{\frac{17}{5}}$

h) $\int_2^6\sqrt{x-2}\,dx=\left[\frac{2\sqrt{(x-2)^3}}{3}\right]_2^6=\frac{16}{3}$

i) $\int_1^3 (x-1)^5\, dx = \left[\dfrac{(x-1)^6}{6}\right]_1^3 = \dfrac{32}{3}$

j) $\int_0^1 e^{3x}\, dx = \left[\dfrac{e^{3x}}{3}\right]_0^1 = \dfrac{e^3-1}{3}$

k) $\int_1^4 \dfrac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \left[2\sqrt{x}\right]_1^4 = 2$

l) $\int_0^{\pi} \text{sen}\, 2x\, dx = \left[-\dfrac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\pi} = 0$

m) $\int_0^{\pi} \cos x\, dx = \left[\text{sen}\, x\right]_0^{\pi} = 0$

n) $\int_0^{\pi/4} \text{tg}\, x\, dx = \left[-\ln|\cos x|\right]_0^{\pi/4} = \dfrac{\ln 2}{2}$

ñ) $\int_0^2 x^2\sqrt{1+x^3}\, dx = \left[\dfrac{2\sqrt{(1+x^3)^3}}{9}\right]_0^2 = 6 - \dfrac{2}{9} = \dfrac{52}{9}$

12. En cada uno de la solución es:

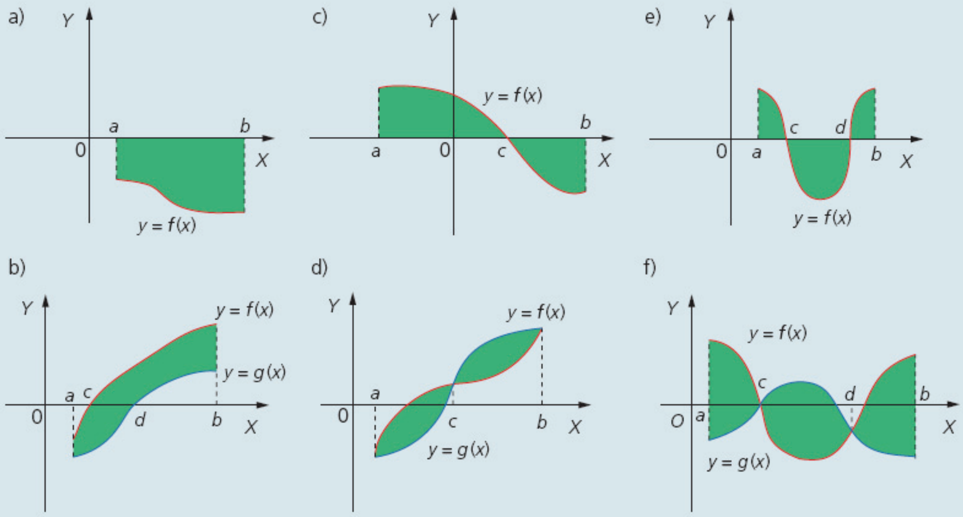
a) $\text{Área} = 2\cdot\int_0^2 (-x^2+4)\,dx = \dfrac{32}{3}\ \text{u}^2$

b) $\text{a} = \int_1^e \dfrac{1}{x}\, dx = \left[\ln|x|\right]_1^e = 1\,\text{u}^2$

c) $\text{a} = \int_0^2 e^{2x}\, dx = \left[\dfrac{e^{2x}}{2}\right]_0^2 = \dfrac{e^4-1}{2} = 26{,}80\ \text{u}^2$

ACTIVIDADES FINALES

■ 13. Expresa, mediante integrales, las áreas de los recintos siguientes:



■ 14. Realiza un esbozo de las regiones cuyas áreas vienen determinadas por las integrales que siguen y calcula las correspondientes áreas:

a) $\int_{1}^{3}(x^2-9)\,dx$ b) $\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)\,dx$ c) $\int_{0}^{3\pi/4}\cos x\,dx$

■ 15. Calcula el área de los recintos limitados por las curvas en cada uno de los siguientes apartados:

a) $y = x^2$; $y = 2$

b) $y = x^2$; $y = 2x$

c) $y = -x^2 + x$; $y = -x$

d) $y = 2x + 1$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 3$

e) $y = -x^2 + 4x + 5$; $y = 5$

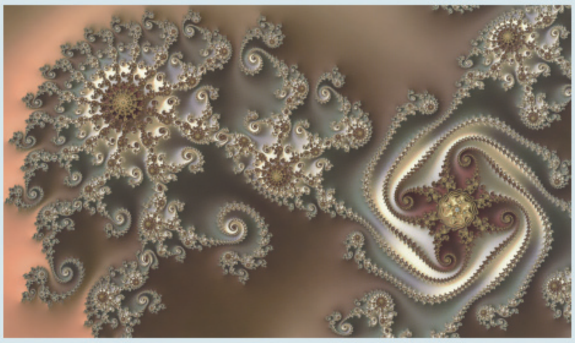
f) $y = -x^2 + 2x$; $y = x^2$

g) $y = x^3 - 3x^2$; $y = x - 3$

h) $y = 4 - x^2$; $y = 2x^2 - 8$

i) $y = \text{sen}\, x$; $y = \dfrac{1}{2}$

j) $y = \text{sen}\, x$; $y = \cos x$; $x = 0$; $x = \pi$



■ 16. Halla el área encerrada por la función $y = \text{sen}\, 2x$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$.

■ 17. Halla el área del trapecio limitado por el eje OX y las rectas $x - 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 2y + 2 = 0$.

■ 18. Halla una función $f(x)$ de la cual sabemos que $f(1) = 0$, $f'(1) = 0$ y $f''(x) = 6x - 6$.

13. Quedan del siguiente modo:

a) $A = -\int_a^b f(x)\,dx$

b) $A = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx$

c) $A = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx$

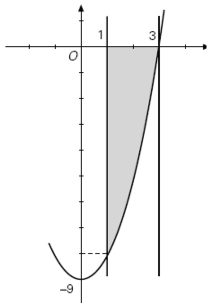
d) $A = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right] dx$

e) $A = \int_a^c \left[f(x) - g(x)\right] dx + \int_c^b \left[g(x) - f(x)\right] dx$

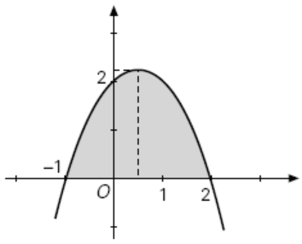
f) $A = \int_a^c \left[f(x) - g(x)\right] dx + \int_c^d \left[g(x) - f(x)\right] dx + \int_d^b \left[f(x) - g(x)\right] dx$

14. En cada caso queda:

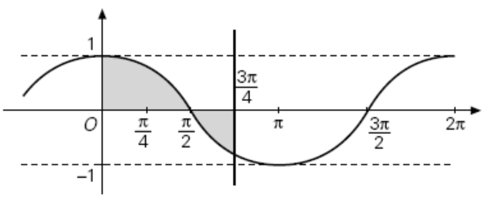
a) $\int_1^3 (x^2 - 9)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 9x\right]_1^3 = -\frac{28}{3}\ \text{u}^2$



b) $\int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^2 = \frac{9}{2}\ \text{u}^2$



c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} -\cos x\,dx = \left[\text{sen}\,x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-\text{sen}\,x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} = 1 + \frac{2-\sqrt{2}}{2} = \frac{4-\sqrt{2}}{2}\ \text{u}^2$



15. En cada caso:

a) $y = x^2$; $y = 2$

Puntos de corte: $\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow (\sqrt{2}, 2)\ (-\sqrt{2}, 2)$

$$\text{Área} = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2 - x^2)\, dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{3}\ \text{u}^2$$

b) $y = x^2$; $y = 2x$

Puntos de corte: $\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} P(0,0) \\ Q(2,2) \end{array}$

$$\text{Área} = \int_0^2 (2x - x^2)\, dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{4}{3}\ \text{u}^2$$

c) $y = -x^2 + x$; $y = -x$

Puntos de corte: $\left.\begin{array}{l} y = -x^2 + x \\ y = -x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} P(0,0) \\ Q(2,-2) \end{array}$

$$\text{Área} = \int_0^2 \left[-x^2 + x - (-x) \right] dx =$$

$$= \int_0^2 (-x^2 + 2x)\, dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{4}{3}\ \text{u}^2$$

d) $y = 2x + 1$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 3$

$$\text{Área} = \int_0^3 (2x + 1)\, dx = \left[x^2 + x \right]_0^3 = 12\ \text{u}^2$$

e) $y = -x^2 + 4x + 5$; $y = 5$

$$\text{Área}_1 = \int_{-1}^{0} (-x^2 + 4x + 5)\, dx + \int_0^4 5\, dx +$$

$$+ \int_4^5 (-x^2 + 4x + 5)\, dx = \frac{76}{3}\ \text{u}^2$$

$$\text{Área}_2 = \int_0^4 (-x^2 + 4x + 5 - 5)\, dx = \frac{32}{3}\ \text{u}^2$$

f) $y = -x^2 + 2x$; $y = x^2$

$$\text{Área} = \int_0^1 [-x^2 + (-x^2 + 2x)]\, dx =$$

$$= \int_0^1 (-2x^2 + 2x)\, dx = \left[\frac{-2x^3}{3} + x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{3}\ \text{u}^2$$

g) $y = x^3 - 3x^2$; $y = x - 3$

Puntos de corte: $\left.\begin{array}{l} y = x^3 - 3x^2 \\ y = x - 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} P(1,-2) \\ Q(-1,-4) \\ R(3,0) \end{array}$

$$\text{Área} = \int_{-1}^{1} [(x^3 - 3x^2) - (x-3)]\, dx +$$

$$+ \int_{1}^{3} [(x-3) - (x^3 - 3x^2)]\, dx = 8 \text{ u}^2$$

h) $y = 4 - x^2$; $y = 2x^2 - 8$

Puntos de corte: $\left.\begin{array}{l} y = 4 - x^2 \\ y = 2x^2 - 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} P(2,0) \\ Q(-2,0) \end{array}$

$$\text{Área} = \int_{0}^{2} [(4 - x^2) - (2x^2 - 8)]\, dx = 32 \text{ u}^2$$

i) $y = \text{sen}\, x ; y = \dfrac{1}{2}$

Puntos de corte en un período $[0,2\pi]$:

$$\left.\begin{array}{l} y = \text{sen}\, x \\ y = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} P\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{1}{2}\right) \\ Q\left(\dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{1}{2}\right) \end{array}$$

$$\text{Área} = \left| \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(\frac{1}{2} - \text{sen}\, x\right) dx \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{x}{2} + \cos x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \right| = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) \text{u}^2$$

j) $y = \text{sen}\, x ; y = \cos x ;\ x = 0 ;\ x = \pi$

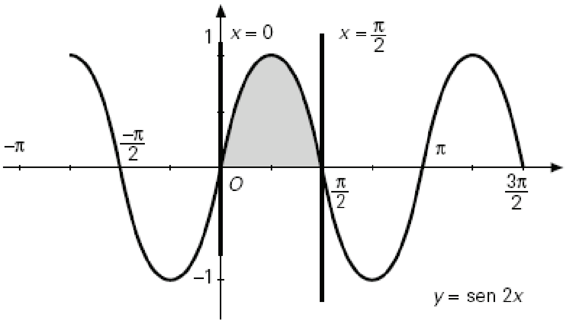
Puntos de corte en un período $[0,2\pi]$:

$$\left.\begin{array}{l} y = \text{sen}\, x \\ y = \cos x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} P\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ Q\left(\dfrac{5\pi}{4}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{array}$$

$$\text{Área} = \left| \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\cos x - \text{sen}\, x)\, dx \right| =$$

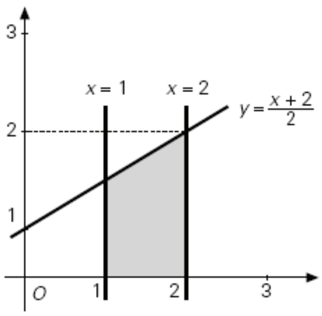
$$= \left| [\text{sen}\, x + \cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \right| = 2\sqrt{2} \text{ u}^2$$

16. El cálculo y la gráfica quedan:



$$\text{Área}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\text{sen } 2x\,dx=\left[\frac{-1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1\text{u}^2$$

17. El cálculo y el área quedan:



$$A=\int_1^2\frac{x+2}{2}\,dx=\left[\frac{(x+2)^2}{4}\right]_1^2=\frac{7}{4}\text{ u}^2$$

18. Las funciones que verifican $f''(x)=6x-6$ son: $f'(x)=3x^2-6x+C$.

Como $f'(1)=0 \Rightarrow f'(x)=3x^2-6x+3 \Rightarrow f(x)=x^3-3x^2+3x+K$.

Como $f(1)=0 \Rightarrow 1-3+3+K=0 \Rightarrow K=-1 \Rightarrow f(x)=x^3-3x^2+3x-1$.

Unidad 15 – Distribuciones bidimensionales. Correlación y regresión

PÁGINA 343

cuestiones iniciales

1. En un hospital se quiere estimar el peso de las niñas recién nacidas. Para ello, se seleccionan, de forma aleatoria, cien de estas, obteniéndose los siguientes resultados:

Intervalo (kg)	[1; 1,5)	[1,5; 2)	[2; 2,5)	[2,5; 3)	[3; 3,5)	[3,5; 4)	[4; 4,5)	[4,5; 5)
Nº de niñas	1	2	5	20	40	26	5	1

Calcula la media, la moda, la mediana, la varianza, la desviación típica y el número de niñas que están en los intervalos $(\bar{x}-\sigma, \bar{x}+\sigma)$; $(\bar{x}-2\sigma, \bar{x}+2\sigma)$; $(\bar{x}-3\sigma, \bar{x}+3\sigma)$. Comenta la simetría de esta distribución.

2. Las ventas de libros de aventuras en una librería tiene como valores $\bar{x} = 10$, $\sigma = 3$. ¿Cómo se clasificaría un día que se vendan 15 libros de aventuras?

3. Diez alumnos han realizado el último mes dos ejercicios de Matemáticas. Las notas son las de la tabla siguiente:

Primer ejercicio	4	7	6	9	4	7	9	4	8	10
Segundo ejercicio	5	8	5	10	3	6	8	4	8	10

Dibuja la nube de puntos. Ajusta a ojo una recta a la nube de puntos, y estima el valor que tendrá la posible correlación.

SOLUCIONES

1. Las soluciones quedan:

La media, $\bar{x}=\frac{324,5}{100}=3,245$; La moda, $Mo=3,25$; La mediana, $Me=3,25$

La varianza, $\sigma^2=\frac{1085,25}{100}-(3,245)^2=0,3225$; La desviación típica, $\sigma=\sqrt{0,3225}=0,5679$;

Los intervalos pedidos son:

$(\bar{x}-\sigma, \bar{x}+\sigma)=(2,677;3,813)$ — En el intervalo $(\bar{x}-\sigma, \bar{x}+\sigma)$ hay 86 niñas.

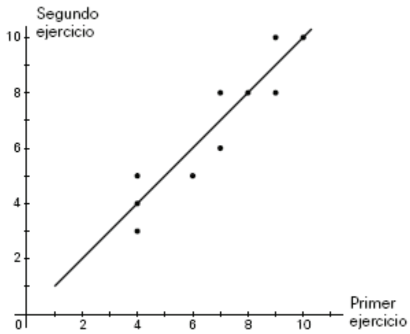
$(\bar{x}-2\sigma, \bar{x}+2\sigma)=(2,109;4,381)$ — En el intervalo $(\bar{x}-2\sigma, \bar{x}+2\sigma)$ hay 96 niñas.

$(\bar{x}-3\sigma, \bar{x}+3\sigma)=(1,5413;4,949)$ — En el intervalo $(\bar{x}-3\sigma, \bar{x}+3\sigma)$ hay 99 niñas.

La distribución es casi simétrica, ligeramente desplazada hacia la derecha.

2. Es un día raro ya que 15 se sitúa en el intervalo $(\overline{x}-2\sigma, \overline{x}+2\sigma)$. La puntuación típica $z=\frac{15-10}{3}=1,6667$ se aleja bastante de la media estándar que es cero.

3. La solución queda:



La nube de puntos aparece en la gráfica de la izquierda.

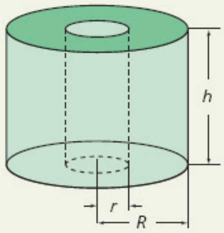
La recta ajustada *a ojo* puede ser bisectriz del cuadrante, $y=x$.

La correlación será positiva y fuerte, próxima a 1.

PÁGINA 357

ACTIVIDADES

■ Usando la simetría o los casos límites, intentar resolver los siguientes problemas:



1. **El bizcocho.** La figura representa la forma de un bizcocho especial. En la etiqueta figura que el volumen es:

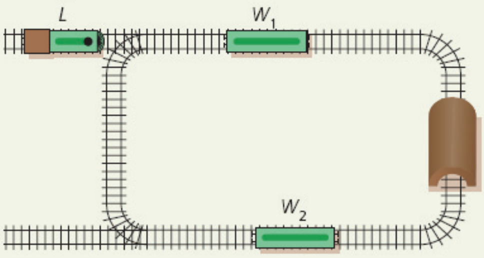
$$V = \pi \cdot h \cdot (R^2 + r^2)$$

¿Es cierto?

2. **Números felices.** El número 44 es un número feliz, pues:

$$44 \Rightarrow 4^2 + 4^2 = 32 \Rightarrow 3^2 + 2^2 = 13 \Rightarrow 1^2 + 3^2 = 10 \Rightarrow 1^2 + 0^2 = 1$$

Investiga sobre los números felices.



3. **Cambio de vagones.** La figura muestra unas vías de tren, en las cuales hay dos vagones W_1 y W_2, una locomotora L, situada en una vía muerta, y un túnel, por el cual sólo puede pasar la locomotora. La locomotora puede enganchar los vagones por delante y por detrás, e incluso puede arrastrar los dos vagones a la vez. El problema consiste en cambiar la posición de los dos vagones, dejando la locomotora en una de las dos vías muertas. Puedes simular este problema utilizando tres monedas diferentes.

4. **Doble frontón.** Un pelotari se encuentra en P y golpea la pelota. Esta debe llegar al pelotari que se encuentra en Q después de pegar en ambos frontones. Construye la trayectoria que debe seguir la pelota.

SOLUCIONES

1. Veamos los dos casos límite:

$1.^{er}$ $r = 0 \quad \Rightarrow \quad V = \pi \cdot h \cdot R^2 =$ volumen del cilindro.

$2.^{do}$ $r = R \quad \Rightarrow \quad V = \pi \cdot h \cdot (R^2 + R^2) = 2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot$h, pero si $r = R$ el volumen es cero.

Luego la fórmula es falsa.

2. La solución queda:

Números felices de 2 cifras:

$10 \Rightarrow 1^2 + 0^2 = 1$

$13 \Rightarrow 1^2 + 3^2 = 10 \Rightarrow 1^2 + 0^2 = 1$

$23 \Rightarrow 2^2 + 3^2 = 13 \Rightarrow 1^2 + 3^2 = 10 \Rightarrow 1^2 + 0^2 = 1$

$31 \Rightarrow 3^2 + 1^2 = 10 \Rightarrow 1^2 + 0^2 = 1$

$32 \Rightarrow 3^2 + 2^2 = 13 \Rightarrow 1^2 + 3^2 = 10 \Rightarrow 1^2 + 0^2 = 1$

$44 \Rightarrow 4^2 + 4^2 = 32 \Rightarrow 3^2 + 2^2 = 13 \Rightarrow 1^2 + 3^2 = 10 \Rightarrow 1^2 + 0^2 = 1$

Números felices de 3 cifras:

$100 \Rightarrow 1^2+0^2+0^2=1$

$130 \Rightarrow 1^2+3^2+0^2=10 \Rightarrow 1^2+0^2=1$

$103 \Rightarrow 1^2+0^2+3^2=10 \Rightarrow 1^2+0^2=1$

Igualmente: 310; 301; 230; 203; 320; 302; 440; 404.

Números felices de 4 cifras:

Igual que los que hemos estado formando hasta ahora más otros como 1 339.

Así sucesivamente podemos seguir con los demás.

3. Después de varios intentos vemos que la situación final, para lograr el objetivo buscado, que debe quedar en la vía muerta superior es: W_1 W_2 L.

   Llamamos A al lugar en que inicialmente está el vagón W_1 y B al lugar donde está inicialmente el vagón W_2.

   Los pasos a seguir son:

   1.º L coge W_1 y lo lleva a la vía muerta de abajo.

   2.º L da la vuelta al circuito pasando por el túnel y empuja a W_2 hasta el punto A.

   3.º L coge W_1 y lo lleva junto a W_2.

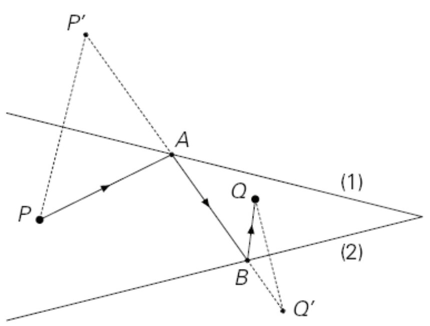
   4.º L da la vuelta al circuito y empuja a ambos vagones a la vía muerta de arriba, quedando la situación que buscábamos, W_1 W_2 L.

   5.º L remolca a W_2 hasta el punto A.

   6.º L da la vuelta al circuito y engancha a W_1 llevándolo a la posición B.

   7.º L vuelve a la vía muerta de arriba y los vagones han cambiado de posición.

4. La solución queda:



Este problema es una doble simetría.

Construimos P', simétrico de P respecto a la banda (1), y Q' simétrico de Q respecto a la banda (2).

Unimos P' y Q' y llamamos A y B a los puntos en que la recta P'Q' corta a las bandas.

La trayectoria pedida es $PABQ$.

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Una encuesta sobre el gasto que 200 países harán durante el próximo quinquenio para proteger la capa de ozono, han dado los resultados de la tabla siguiente:

Gastos (millones de dólares)	[150-155)	[155-160)	[160-165)	[165-170)	[170-175)	[175-180)	[180-185)	[185-190)	[190-195)
x_i	152,5	157,5	162,5	167,5	172,5	177,5	182,5	187,5	192,5
f_i	7	14	24	37	42	35	23	13	5

Calcula la media, la desviación típica, así como el número de países que se encuentran en los intervalos $(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$; $(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma)$ y $(\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma)$.

2. Se desea comparar la duración de dos marcas de pilas A y B. Para ello, elegimos dos muestras, compuestas por 10 pilas de cada una de las marcas. La duración en horas de cada una de ellas fue:

Marca A	25	28	26	34	30	28	24	27	22	23
Marca B	24	31	26	29	32	31	27	29	24	32

Calcula la media y la desviación típica de las duraciones de cada marca. ¿Qué marca será aconsejable elegir?

3. En las siguientes variables estadísticas bidimensionales, referidas a los alumnos de una clase, estima si hay o no correlación y, en caso de existir, señala si esta es positiva o negativa, fuerte o débil:

a) Estatura y calificación en Lengua

b) Peso y calificación en Educación Física

c) Número de horas diarias de estudio y número de asignaturas aprobadas en la última evaluación

d) Estatura y grado de concentración en el estudio

e) Peso y estatura

4. Se ha pasado una encuesta a los 20 vecinos de una urbanización de las afueras de una gran ciudad obteniéndose los siguientes resultados en los que el primer número se refiere al número de de viajes realizados por los padres y el segundo al número de viajes realizado por sus hijos:

(4, 1) (3, 4) (2, 5) (1, 6) (3, 2) (2, 6) (2, 6) (4, 2) (4, 1) (4, 2)
(1, 7) (1, 6) (4, 1) (1, 7) (2, 4) (2, 6) (3, 3) (4, 2) (1, 6) (2, 5)

a) Construye la tabla de doble entrada correspondiente.

b) Representa gráficamente los datos de esta tabla y, a la vista de la gráfica, estudia si existe correlación entre las variables y el tipo de la misma.

1. La solución queda:

La media, $\overline{x} = \frac{34\,425}{200} = 172{,}125$; La moda, $Mo = 172{,}25$; La mediana, $Me = 172{,}25$

La varianza, $\sigma^2 = \frac{59\,942\,750{,}1}{200} - (172{,}125)^2 = 86{,}735$; La desviación típica, $\sigma = \sqrt{86{,}735} = 9{,}313$;

El número de países en:

$$(\overline{x} - \sigma, \overline{x} + \sigma) = (162{,}8; 181{,}4) \text{ es } 138.$$
$$(\overline{x} - 2\sigma, \overline{x} + 2\sigma) = (153{,}5; 190{,}7) \text{ es } 188.$$
$$(\overline{x} - 3\sigma, \overline{x} + 3\sigma) = (144{,}2; 200{,}1) \text{ es } 200.$$

2. La solución es:

Las medias aritméticas son: $\overline{x}_A = \frac{267}{10} = 26{,}7$ y $\overline{x}_B = \frac{285}{10} = 28{,}5$.

Las desviaciones típicas son: $\sigma_A = \sqrt{\frac{7\,243}{10} - (26{,}7)^2} = 3{,}38$ y $\sigma_B = \sqrt{\frac{8\,209}{10} - (28{,}5)^2} = 2{,}94$.

a) Será aconsejable optar por la marca *B*, ya que tiene mayor media y, a su vez, menor desviación típica.

3. En cada caso queda:

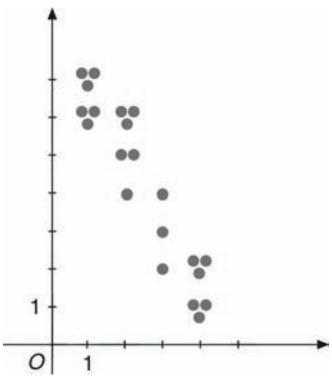
a) No existe correlación.
b) Existe correlación negativa y fuerte.
c) Existe correlación positiva y fuerte.
d) No existe correlación.
e) Existe correlación positiva y fuerte.

4. La solución queda:

a) La tabla de doble entrada es:

y viajes hijos / x viajes padres	1	2	3	4
1	—	—	—	3
2	—	—	1	3
3	—	—	1	—
4	—	1	1	—
5	—	2	—	—
6	3	3	—	—
7	2	—	—	—

b) El diagrama de dispersión es:



PÁGINA 361

■ 5. En una muestra de 100 familias se han estudiado las variables estadísticas X, número de miembros en edad laboral, e Y, número de ellos que se encuentran en activo. Los resultados obtenidos pueden verse en la tabla adjunta.

X \ Y	1	2	3
1	9	0	0
2	14	7	0
3	16	9	5
4	20	12	8

a) Construye la tabla bidimensional simple correspondiente y obtén las distribuciones marginales de X e Y.

b) Calcula la media y la derivación típica de las distribuciones marginales.

■ 6. Se ha solicitado a un grupo de 50 individuos información sobre el número de horas que dedica diariamente a dormir y a ver la televisión. La clasificación de las respuestas ha permitido elaborar la siguiente tabla:

N.º horas dormidas X	6	7	8	9	10
N.º horas televisión Y	4	3	3	2	1
Frecuencias absolutas	3	16	20	10	1

a) Realiza el diagrama de dispersión correspondiente.

b) Calcula la media y la derivación típica de cada una de las variables.

c) Halla el porcentaje de individuos que ven la televisión por encima de la media.

d) Calcula el coeficiente de correlación lineal.

■ 7. Se han hecho dos pruebas de Historia a un grupo de 10 alumnos/as de 3º de ESO. Los resultados obtenidos son:

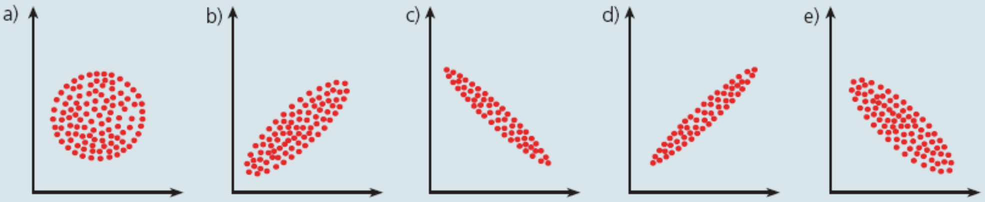
Alumno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	14	12	15	12	13	12	17	7	9	14
B	14	13	17	15	16	12	12	10	14	20

Calcula la covarianza y el coeficiente de correlación. ¿Existe dependencia entre ambas pruebas?

■ 8. En cinco estudios estadísticos se han obtenido los siguientes coeficientes de correlación lineal:

$r = -0{,}98$ $\quad r = 0{,}93$ $\quad r = 0{,}05$ $\quad r = 0{,}71$ $\quad r = -0{,}62$

Identifica, justificando la respuesta, la nube de puntos correspondiente a cada uno de ellos:



■ 9. La estadística de ingresos de determinadas empresas, en miles de euros, y de empleados, en miles, es la siguiente:

Ingresos	5,7	3,8	1,9	1	1
Empleados	16	29	17	6	9

Estudia la correlación existente entre ambas variables y determina la recta de regresión de ingresos en función del número de empleados.

5. La solución queda:

a)

x \ y	1	2	3	
1	9	0	0	9
2	14	7	0	21
3	16	9	5	30
4	20	12	8	40
	59	28	13	

b)

x_i	f_i
1	9
2	21
3	30
4	40

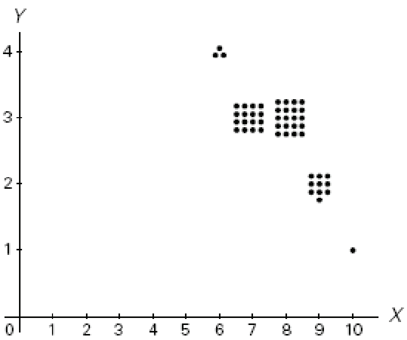
y_i	f_i
1	59
2	28
3	13

c) $\bar{x} = 3,01 \quad \sigma_x = 0,98$

$\bar{y} = 1,54 \quad \sigma_y = 0,71$

6. La solución queda:

a)



b) Para ambas variables queda:

$\bar{x} = \frac{390}{50} = 7,8$ horas dormidas y $\sigma_x = 0,89$

$\bar{y} = \frac{141}{50} = 2,82$ horas dormidas y $\sigma_y = 0,71$

c) El porcentaje de individuos por encima de la media es: $\frac{20+16+3}{50} = 0,78$, es decir, el 78%.

d) Para el cálculo de $r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$, calculamos la covarianza: $\sigma_{xy} = \frac{1078}{50} - 7,8 \cdot 2,82 = -0,436$.

Así $r = \frac{-0,436}{0,89 \cdot 0,71} = -0,69$. La correlación no es muy fuerte y es negativa.

7. La solución queda:

La covarianza es $\sigma_{AB} = \frac{1819}{10} - 12,5 \cdot 14,3 = 3,15$.

El coeficiente de correlación es: $r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{3,15}{2,73 \cdot 2,72} = 0,424$.

La dependencia estadística es moderada.

8. La correspondencia de cada gráfico con su coeficiente de correlación es:

a) $r = 0,05$ c) $r = -0,98$ e) $r = -0,62$

b) $r = 0,71$ d) $r = 0,93$

9. La solución queda:

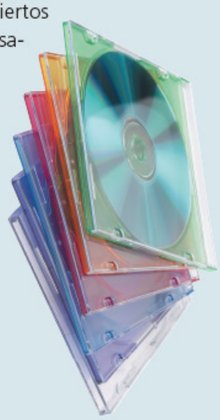
Los parámetros estadísticos son: $\overline{x}=2,68$; $\overline{y}=15,4$; $\sigma_x=1,98$; $\sigma_y=7,96$; $\sigma_{xy}=8,47$.

a) La correlación es $r=\dfrac{8,47}{1,98\cdot 7,96}=0,54$.

b) La recta de regresión es: $y-15,4=\dfrac{8,47}{3,92}(x-2,68)$.

ACTIVIDADES FINALES

10. Una compañía discográfica ha recopilado la siguiente información sobre el número de conciertos dados durante el verano por 15 grupos musicales y las ventas de discos de estos grupos (expresadas en miles de CDs), obteniendo los datos siguientes:



CD/conciertos	10-30	30-40	40-80
1-5	3	0	0
5-10	1	4	1
10-20	0	1	5

a) Calcula el número medio de CD vendidos por estos grupos.

b) ¿Cómo es el grado de dependencia lineal del número de conciertos dado por el grupo con respecto al número de discos que ha vendido?

c) Obtén la recta de regresión que explica la dependencia anterior.

d) Si un grupo musical ha vendido 18 000 CD, ¿qué número de conciertos es previsible que ofrezca?

11. Se observaron las edades de 5 niños y sus pesos respectivos, obteniéndose los siguientes resultados:

Edad, en años (X)	2	4,5	6	7,2	8
Peso, en kg (Y)	15	19	25	33	34

a) Halla el coeficiente de correlación y las rectas de regresión de Y sobre X y de X sobre Y.

b) ¿Qué peso corresponderá a un niño/a de 5 años? ¿qué edad corresponderá a un peso de 36 kg?

12. La siguiente tabla muestra los valores observados de dos variables X e Y en cinco individuos:

X	1	–1	a	2	3
Y	–2	–3	2	1	0

a) Halla a para que el coeficiente de correlación sea nulo.

b) Suponiendo que $a = 4$, determina la recta de regresión de Y sobre X, y estima el valor de Y cuando X tome el valor –2.

13. De dos variables X e Y, se sabe que la desviación típica de X es $\sqrt{3}$, la media y la desviación típica de Y valen 1 y 2, respectivamente, y la ecuación de la recta de regresión de Y sobre X es $2x + 3y = 6$. Hallar:

a) La media de X

b) La covarianza de X e Y

c) El coeficiente de correlación

d) La recta de regresión de X e Y

14. La estatura media de una muestra de padres es de 1,68 m con una desviación típica de 5 cm. En una muestra de sus hijos, la estatura media es de 1,70 m con una desviación típica de 7,5. El coeficiente de correlación entre las estaturas de padres e hijos es 0,7. Si un padre mide 1,80 m, ¿qué estatura se estima que tendrá su hijo?

10. Llamamos x al número de CDs vendidos e y al número de conciertos. Los datos en una tabla simple son:

x	3	8	8	8	15	15	
y	20	20	35	60	35	60	
f_i	3	1	4	1	1	5	$\ldots \rightarrow 15$

Los parámetros estadísticos son: $\bar{x} = 9,8$; $\bar{y} = 41$; $\sigma_x = 4,62$; $\sigma_y = 16,55$; $\sigma_{xy} = 62,53$.

a) El número medio de CDs vendidos es $\bar{x} = 9,8$.

b) El coeficiente de correlación es $r = \dfrac{62,53}{4,62 \cdot 16,55} = 0,82$. La dependencia lineal es moderada.

c) La recta de regresión es: $y - 41 = \dfrac{62,53}{21,34}(x - 9,8)$.

d) Si $x = 18 \Rightarrow y = 65,03$ conciertos.

11. La solución queda:

Los parámetros estadísticos son: $\bar{x} = 5,54$; $\bar{y} = 25,2$; $\sigma_x = 2,13$; $\sigma_y = 7,49$; $\sigma_{xy} = 15,42$.

a) El coeficiente de correlación es $r = \dfrac{15,42}{2,13 \cdot 7,49} = 0,97$.

b) La rectas de regresión son:

- De Y en X: $y - 25,2 = \dfrac{15,42}{4,54}(x - 5,54)$
- De X en Y: $y - 5,54 = \dfrac{15,42}{51,12}(x - 25,2)$

Un chico de $x = 5$ pesa, aproximadamente, $y = 27,03$ kg.

La edad que corresponderá a un peso de 36 kg es aproximadamente $x = 8,72$ años.

12. La solución queda:

El coeficiente de correlación lineal es nulo si la covarianza es nula.
Por tanto:

$$\frac{3+2a}{5}-(-0,4)\cdot\frac{5+a}{5}=0 \quad \Rightarrow \quad \text{La solución es: } a=-2,083.$$

Los parámetros de las variables son: $\overline{x}=1,8;\ \overline{y}=-0,4;\ \sigma_x=1,72;\ \sigma_y=1,85;\ \sigma_{xy}=2,92.$

La recta de regresión de Y sobre X es: $y+0,4=\dfrac{2,92}{(1,72)^2}(x-1,8) \Rightarrow y=0,99x-2,18$

Si $x=-2$, el valor estimado de y es: $y=0,99(-2)-2,18=-4,16$

13. La solución queda:

a) La recta de regresión $2x+3y=6$ pasa por el punto $(\overline{x},\overline{y})$, por tanto:

$$2\overline{x}+3\cdot 1=6 \quad \Rightarrow \quad 2\overline{x}=3 \quad \Rightarrow \quad \overline{x}=\frac{3}{2}$$

b) El coeficiente de regresión $\dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^{\ 2}}$ vale para la recta $2x+3y=6$, por tanto:

$$\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^{\ 2}}=-\frac{2}{3};\ \text{al ser } \sigma_x=\sqrt{3}, \text{ obtenemos } \sigma_{xy}=-2$$

c) El coeficiente de correlación es: $r=\dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\cdot\sigma_y}=\dfrac{-2}{\sqrt{3}\cdot 2}=-0,58$

d) La recta de regresión de X sobre Y es: $x-1,5=\dfrac{-2}{2^2}(y-1) \Rightarrow x=-0,5y+2$

14. Al ser el coeficiente de correlación $r=0,7$; obtenemos:

$$r=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\cdot\sigma_y} \quad \Rightarrow \quad 0,7=\frac{\sigma_{xy}}{5\cdot 7,5} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{xy}=26,25$$

La recta de regresión de Y (estatura de los hijos) sobre X (estatura de los padres) es:

$$y-170=\frac{26,25}{5^2}(x-168) \Rightarrow y=1,05x-6,4$$

Si un padre mide 180 cm, se estima que su hijo tendrá: $y=1,05\cdot 180-6,4=182,6$ cm.

NOTA: Todos los datos se han convertido a centímetros.

Unidad 16 – Probabilidad

PÁGINA 365

cuestiones iniciales

1. Estás jugando a cara o cruz con una moneda y las diez últimas tiradas han salido cara. ¿Por qué resultado apostarías en la próxima tirada? Razona tu respuesta.

2. La probabilidad de que nazca un niño es $\frac{1}{2}$. ¿Cuál es la probabilidad de que, entre cuatro nacimientos, dos sean hembras?

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{8}$ c) $\frac{3}{4}$ d) No puede saberse

3. En un experimento se lanzan al aire cuatro monedas juntas. Si el experimento se repite muchas veces, ¿cuál de los siguientes resultados se producirá más a menudo?

a) 2 caras y 2 cruces b) 1 cara y 3 cruces c) 3 caras y 1 cruz

4. En un curso, el 90% de los alumnos estudian inglés y el resto francés. El 30% de los que estudian inglés y el 40% de los que estudian francés son chicos. Si elegimos un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?

SOLUCIONES

1. El azar no tiene memoria. Por cualquiera de las dos, cara o cruz.

2. La probabilidad queda: $P(2 \text{ hembras}) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$

3. El resultado más probable es 2 caras y 2 cruces, se presentará 6 veces de cada 16 por término medio.

4. Recopilamos la información en la siguiente tabla:

	Inglés	Francés	Total
Chicos	27	4	31
Chicas	63	6	69
Total	90	10	100

$P(\text{Chica}) = \frac{69}{100} = 0,69$

PÁGINA 381

ACTIVIDADES

- Utiliza la experimentación en la resolución de los siguientes problemas:

1. **Sumas.** Considera los números impares 1, 3, 5, 7, etc. ¿Cuánto vale la suma de los n primeros?

2. **Castillo de naipes.** En la figura tienes un castillo de naipes de dos pisos. Han sido necesarias 7 cartas para formarlo. ¿Cuántas cartas serán necesarias para hacer un castillo similar de 15 pisos de altura? ¿cuántos pisos tendrá un castillo que tiene 3 775 naipes?

3. **Las bicis.** Un padre y un hijo van en sendas bicicletas a la misma velocidad. La rueda trasera de la bici del padre da una vuelta, al tiempo que la rueda trasera de la bici del hijo da vuelta y media. En la rueda de la bici del padre hay dos marcas, azul y roja, diametralmente opuestas; esto ocurre análogamente en la rueda de la bici del hijo. En un determinado instante, las dos marcas rojas están sobre el suelo. ¿Cuándo coincidirán por primera vez las marcas azules sobre el suelo?

4. **Número fantasma.** Tu amigo Juan dice haber encontrado un número cuyo cuadrado acaba en tres cifras idénticas. ¿Dice la verdad? ¿Sería cierto si las cifras no pueden ser cero?

5. **Desigualdad.** ¿Es cierta la siguiente desigualdad?:

$$(2n)! > [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)]^2 \cdot \sqrt{2n+1}$$

SOLUCIONES

1. La suma queda: $1+3+5+7+...+2n-1=\dfrac{1+(2n-1)}{2}\cdot n=n^2$

2. La solución queda:

   1.^{er} piso: se necesitan 2 naipes.
   2.º piso: se necesitan 5 naipes.
   3.^{er} piso: se necesitan 8 naipes.
   4.º piso: se necesitan 11 naipes.

   Luego en el enésimo piso habrá $(3n-1)$ naipes.

   Una torre con *n* pisos tendrá: $\dfrac{(3n+1)\cdot n}{2}$ naipes.

   Una torre con 15 pisos tendrá: $\dfrac{(3\cdot 15+1)\cdot 15}{2}=345$ naipes.

   Veamos cuántos pisos tendrá un castillo de 3 775 naipes:

$$\frac{(3n+1)\cdot n}{2}=3775 \Rightarrow 3n^2+n-7750=0 \Rightarrow \boxed{n=50 \text{ pisos}}$$

3. Imaginamos que la rueda del padre tarda 6 segundos en dar una vuelta y la del hijo 6 segundos en dar vuelta y media.

   En la situación de partida vuelven a estar al cabo de 12'', pero en ningún momento coincidirán las marcas azules sobre el suelo.

4. El cuadrado de cualquier número entero termina en 0, 1, 4, 5, 6, 9.

   Si el número entero es par, su cuadrado es múltiplo de 4.

   Así, $14^2 = 196 = \dot{4}$.

   Si el número entero es impar, su cuadrado es múltiplo de $4+1$. Así, $13^2 = 169 = \dot{4}+1$.

   Ahora bien, si el número al cuadrado termina en 111, 555, 666 ó 999, éstos no son ni múltiplos de 4 ni múltiplos de $4+1$, luego no pueden ser.

   Veamos, pues, los que terminan en 000 ó 444.

   Efectivamente: $1444 = 38^2$, luego también se verifica si no son cero las cifras.

5. La demostración queda:

$$(2n)! = 2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Veamos si es cierta la igualdad anterior transformada en otra:

$$2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 > [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)]^2 \cdot \sqrt{2n+1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)} > \sqrt{2n+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{2n \cdot (2n-2) \cdot \ldots \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{(2n-1) \cdot \ldots 5 \cdot 3 \cdot 1} > \sqrt{2n+1}$$

Esto es lo que vamos a demostrar por el método de inducción:

Para $n = 1 \Rightarrow 2 > \sqrt{2 \cdot 1 + 1} \Rightarrow 2 > \sqrt{3}$

Supongamos que es cierto para n: $\dfrac{2n \cdot (2n-2) \cdot \ldots \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{(2n-1) \cdot \ldots 5 \cdot 3 \cdot 1} > \sqrt{2n+1}$

Veamos que es cierto para $n+1$: ¿$\dfrac{(2n+2) \cdot (2n) \cdot (2n-2) \cdot \ldots \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{(2n+1) \cdot (2n-1) \cdot \ldots 5 \cdot 3 \cdot 1} > \sqrt{2n+3}$? (I)

$$\frac{(2n+2) \cdot (2n) \cdot (2n-2) \cdot \ldots \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{(2n+1) \cdot (2n-1) \cdot \ldots 5 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{(2n+2)}{(2n+1)} \cdot \frac{(2n) \cdot (2n-2) \cdot \ldots \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{(2n-1) \cdot \ldots 5 \cdot 3 \cdot 1} > \frac{(2n+2)}{(2n+1)} \sqrt{2n+1} > \sqrt{2n+3}$$

Elevando al cuadrado: $(2n+2)^2(2n+1) > (2n+1) > (2n+1)^2(2n+3) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 16n + 4 > 14n + 3 \quad \Rightarrow \quad 2n + 1 > 0$$

Esto siempre es cierto, pues $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ es cierta la desigualdad (I) $\Rightarrow$ es cierto el enunciado.

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Describe el espacio muestral asociado a lanzar tres monedas al aire y anotar las puntuaciones de las caras superiores.

2. Consideramos el fenómeno aleatorio «Extraer una carta de una baraja española de 40 cartas y anotarla». Sean los sucesos:

$A = \{\text{Sacar oro}\}$ $B = \{\text{Sacar rey}\}$ $C = \{\text{Sacar rey de bastos}\}$

Encuentra los elementos de los siguientes sucesos:

a) $A \cap \overline{C}$ b) $A \cap B \cap C$ c) $A \cup B$ d) $B \cap A$

3. Sea el espacio muestral $E = \{A, B, C, D\}$. ¿Cuál de las siguientes funciones es una probabilidad?

a) $P(A) = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{1}{3},\ P(C) = \frac{1}{4},\ P(D) = \frac{1}{5}$

b) $P(A) = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{1}{8},\ P(C) = \frac{1}{4},\ P(D) = \frac{1}{8}$

c) $P(A) = \frac{1}{3},\ P(B) = -\frac{1}{3},\ P(C) = \frac{1}{2},\ P(D) = \frac{1}{2}$

4. Consideramos el espacio muestral $E = \{A, B, C\}$ y P una función de probabilidad sobre E. Calcula $P(A)$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $P(B) = \frac{1}{3},\ P(C) = \frac{1}{6}$ b) $P(A) = 3P(B),\ P(B) = 2P(C)$

5. Una moneda está trucada de forma que la probabilidad de obtener cara es el triple que la de obtener cruz. Halla la probabilidad de obtener cruz al lanzar la moneda.

6. Lanzamos dos dados al aire y observamos los puntos de sus caras superiores. Halla la probabilidad de obtener al menos un 6. ¿Y de que la suma de sus puntos sea 10?

7. Lanzamos cuatro monedas al aire. Calcula la probabilidad de que:

a) Salgan 2 caras y 2 cruces c) Salga alguna cara

b) Salga, como máximo, 1 cruz d) Salga, como mínimo, 3 caras

8. De una baraja de 52 cartas se extrae una al azar. Halla la probabilidad de que:

a) Sea de copas b) Sea una figura c) Sea de oros o una sota

9. De una urna que contiene 9 bolas rojas y 5 negras se extraen, sucesivamente, dos bolas. Halla la probabilidad de que sean:

a) Ambas negras b) Una roja y una negra c) Al menos una roja

10. En un bote hay 6 caramelos de fresa, 7 de menta y 5 de limón. Si extraen 3 caramelos, ¿cuál es la probabilidad de que los tres sean de sabores distintos? Resuelve el problema devolviendo al bote cada caramelo después de la extracción y sin devolverlo.

11. Un monedero de piel contiene 6 monedas de aluminio y 4 de cobre. Otro monedero de tela contiene 8 monedas de cobre y 5 de aluminio. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Sacamos una moneda de cada monedero. Halla la probabilidad de que ambas sean de aluminio. ¿Y de que sean de materiales distintos?

b) Elegimos un monedero y sacamos 2 monedas, una detrás de la otra, sin reintegrar la primera al monedero. Halla la probabilidad de sacar monedas de cobre.

SOLUCIONES

1. El espacio muestral tiene $2^3=8$ elementos: $E=\{(ccc)(ccx)(cxc)(xcc)(cxx)(xxc)(xcx)(xxx)\}$.

2. Quedan:
   a) $A\cap\overline{C}=\{\text{sacar oros}\}$
   b) $A\cap B\cap C=\{\varnothing\}$
   c) $A\cup B=\{\text{sacar oros o rey}\}$
   d) $B\cap A=\{\text{rey de oros}\}$

3. Quedan:
   a) No es una probabilidad pues $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)+\mathrm{P}(D)=\dfrac{77}{60}\neq 1$
   b) Es una probabilidad pues $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)+\mathrm{P}(D)=1$
   c) No es una probabilidad pues $\mathrm{P}(B)=-\dfrac{1}{3}<0$

4. Quedan:
   $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(C)=\dfrac{1}{2}$
   b) Llamando $\mathrm{P}(C)=x \Rightarrow \mathrm{P}(A)=6x;\ \mathrm{P}(B)=2x;\ \ \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)=1$
   $$\Rightarrow\ 9x=1\ \Rightarrow\ x=\frac{1}{9}\ \Rightarrow\ \mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$$

5. La probabilidad es $\mathrm{P}(\text{cruz})=\dfrac{1}{4}$

6. Queda:
   $\mathrm{P}(\text{Al menos un seis})=\dfrac{11}{36}$
   $\mathrm{P}(\text{Suma }10)=\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{12}$

7. El espacio muestral tiene 16 elementos.
   a) $\mathrm{P}(2\text{ caras y }2\text{ cruces})=\dfrac{6}{16}$
   c) $\mathrm{P}(\text{alguna cara})=\dfrac{15}{16}$
   b) $\mathrm{P}(\text{como máximo una cruz})=\dfrac{5}{16}$
   d) $\mathrm{P}(\text{como mínimo 3 caras})=\dfrac{5}{16}$

8. Queda:
   a) $\mathrm{P}(\text{copas})=\dfrac{1}{4}$
   b) $\mathrm{P}(\text{figura})=\dfrac{12}{52}=\dfrac{3}{13}$
   c) $\mathrm{P}(\text{oros o sota})=\dfrac{16}{52}=\dfrac{4}{13}$

9. Queda:

a) $P(2\,\text{negras}) = \frac{5}{14} \cdot \frac{4}{13} = \frac{10}{91}$

b) $P(1\text{roja y }1\text{negra}) = \frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13} \cdot 2 = \frac{45}{91}$

c) $P(\text{al menos }1\text{roja}) = 1 - \frac{5}{14} \cdot \frac{4}{13} = \frac{81}{91}$

10. Queda:

Con devolución: $\frac{6}{18} \cdot \frac{7}{18} \cdot \frac{5}{18} \cdot 6 = \frac{35}{162}$

Sin devolución: $\frac{6}{18} \cdot \frac{7}{17} \cdot \frac{5}{16} \cdot 6 = \frac{35}{136}$

11. Queda:

a) $P(2\text{ de aluminio}) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{13} = \frac{3}{13}$; $\quad P(\text{materiales distintos}) = \frac{6}{10} \cdot \frac{8}{13} + \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{13} = \frac{34}{65}$

b) $P(2\text{ monedas de cobre}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{7}{12} = \frac{16}{65}$

PÁGINA 385

■ 12. Se supone que 25 de cada 100 hombres y 600 de cada 1 000 mujeres usan gafas. Si el número de mujeres es cuatro veces superior al de hombres, se pide la probabilidad de encontrarnos:

a) con una persona sin gafas b) con una mujer con gafas.

■ 13. En un centro de enseñanza hay 1 000 alumnos que se distribuyen según la tabla siguiente:

	Alumnas	Alumnos	Total
Ciencias		300	600
Letras	250		
Total			

Se pide:

a) Completa la tabla en tu cuaderno.

b) Si se elige un estudiante al azar, halla la probabilidad de que sea de ciencias.

■ 14. Se lanza un dado numerado de 1 a 6 y se pide:

a) Encuentra la probabilidad de que salga 3, si se sabe que salió impar.

b) Calcula la probabilidad de que salga par, si se sabe que salió mayor que tres.

■ 15. A un congreso asiste el mismo número de hombres que de mujeres. El 60% de los hombres tiene 40 años o más y el 30% de las mujeres tiene menos de 40 años. Se pide:

a) Si se elige al azar una persona que asiste al congreso, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

b) Si se elige al azar una persona que asiste al congreso, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 40 años?

c) Si se elige un asistente al azar y se observa que tiene más de 40 años, ¿cuál es la probabilidad de que dicha persona sea mujer?

■ 16. En una ciudad en la que hay doble número de hombres que de mujeres, hay una epidemia. El 6% de los hombres y el 11% de las mujeres están enfermos. Se elige al azar un individuo. Calcula la probabilidad de que:

a) sea hombre b) esté enfermo c) sea hombre, sabiendo que está enfermo

■ 17. Un estudiante hace dos pruebas en un mismo día. La probabilidad de que pase la primera prueba es del 0,6; la probabilidad de que pase la segunda es del 0,8; y la de que pase ambas es del 0,5. Se pide:

a) La probabilidad de que pase, al menos, una prueba

b) La probabilidad de que no pase ninguna prueba

c) ¿Son las pruebas independientes?

d) La probabilidad de que pase la segunda prueba en el caso de no haber superado la primera

■ 18. La producción de una empresa la realizan, a partes iguales, 3 turnos, de los que 2 son diurnos y 1 nocturno. El porcentaje de piezas defectuosas producidas en cada turno diurno es el 2%, en tanto que el porcentaje de piezas defectuosas producidas por el turno nocturno es del 8%:

a) Si se toma una pieza al azar de un turno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuosa?

b) Si se toma una pieza al azar de un turno al azar y resulta ser defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que la pieza haya sido fabricada en el turno nocturno? ¿Y cuál es de probabilidad de que haya sido fabricada en el turno diurno?

■ 19. Una urna contiene 2 bolas blancas y 2 rojas; y otra urna 3 blancas y 2 rojas. Se pasa una bola de la primera a la segunda urna y, después, se extrae una bola de la segunda urna, que resulta ser blanca. Determina la probabilidad de que la bola trasladada haya sido blanca.

12. Introducimos los datos en una tabla:

	Mujeres	Hombres	Total
Gafas	62,5	600	662,5
No gafas	187,5	400	587,5
Total	250	1000	1250

a) $P(\text{persona sin gafas}) = \dfrac{587,5}{1250} = 0,47$

b) $P(\text{mujer con gafas}) = \dfrac{600}{1250} = 0,48$

13. Queda:

	Alumnas	Alumnos	Total
Ciencias	300	300	600
Letras	250	150	400
Total	550	450	1000

$P(\text{ciencias}) = \dfrac{600}{1000} = \dfrac{3}{5}$

14. Queda:

a) $P\left(3 / \text{impar}\right) = \dfrac{1}{3}$ b) $P\left(\text{par} / \text{mayor que } 3\right) = \dfrac{2}{3}$

15. Queda:

	Hombres	Mujeres	Total
≥ 40 años	60	70	130
< 40 años	40	30	70
Total	100	100	200

a) $P(\text{mujer}) = \dfrac{1}{2} = 0,5$

b) $P(< 40 \text{ años}) = \dfrac{7}{20} = 0,35$

c) $P\left(\text{mujer} / \geq 40 \text{ años}\right) = \dfrac{70}{130} = \dfrac{7}{13}$

16. Queda:

	Hombres	Mujeres	Total
Enfermo	12	11	23
No enfermo	188	89	277
Total	200	100	300

a) $P(\text{hombre}) = \dfrac{200}{300} = 0,67$

b) $P(\text{enfermo}) = \dfrac{23}{300} = 0,77$

c) $P\left(\text{hombre} / \text{enfermo}\right) = \dfrac{12}{23} = 0,52$

17. Sean A y B respectivamente la primera y la segunda prueba.

a) $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=0,6+0,8-0,5=0,9$

b) $\mathrm{P}(\text{no pase ninguna})=1-\mathrm{P}(\text{pase al menos una})=1-0,9=0,1$

c) No son independientes pues $\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B)\neq\mathrm{P}(A\cap B)$

d) $\mathrm{P}\left(B/\overline{A}\right)=\dfrac{\mathrm{P}(\overline{A}\cap B)}{\mathrm{P}(\overline{A})}=\dfrac{\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)}{1-\mathrm{P}(A)}=\dfrac{0,3}{0,4}=0,75$

18. Queda:

	Diurno	Nocturno	Total
Defectuosa	4	8	12
No defectuosa			
Total	200	100	300

a) $\mathrm{P}(\text{defectuosa})=\dfrac{12}{300}=0,04$

b) $\mathrm{P}\left(\text{nocturno}/\text{defectuosa}\right)=\dfrac{8}{12}=\dfrac{2}{3}$

c) $\mathrm{P}\left(\text{diurno}/\text{defectuosa}\right)=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$

19. Queda:

$$\mathrm{P}\left(B_1/B_2\right)=\frac{\mathrm{P}(B_1)\cdot\mathrm{P}\left(B_2/B_1\right)}{\mathrm{P}(B_1)\cdot\mathrm{P}\left(B_2/B_1\right)+\mathrm{P}(R_1)\cdot\mathrm{P}\left(B_2/R_1\right)}=\frac{\frac{2}{4}\cdot\frac{4}{6}}{\frac{2}{4}\cdot\frac{4}{6}+\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{6}}=\frac{4}{7}$$

PÁGINA 386

ACTIVIDADES FINALES

20. Una fábrica de coches tiene 3 cadenas de producción, A, B y C. La cadena A fabrica el 50% del total de coches producidos, la B el 25% y la C el resto. La probabilidad de que un coche resulte defectuoso es:

- En la cadena A, $\frac{1}{2}$
- En la cadena B, $\frac{1}{4}$
- En la cadena C, $\frac{1}{6}$

Calcula razonadamente:

a) La probabilidad de que un coche sea defectuoso y haya sido fabricado por la cadena A.

b) La probabilidad de que un coche sea defectuoso.

c) Si un coche no es defectuoso, ¿cuál es probabilidad de que haya sido producido por la cadena C?

21. Una urna contiene 2 bolas. Se sabe que la urna se llenó tirando una moneda al aire 2 veces y poniendo 1 bola blanca en la urna por cada cara y una negra por cada cruz. Se extrae una bola de la urna y resulta ser blanca. Calcula la probabilidad de que la otra bola de la urna sea también blanca.

22. El 20% de los empleados de una empresa son ingenieros y otro 20% son economistas. El 75% de los ingenieros ocupan un puesto directivo y el 50% de los economistas también, mientras que de los no ingenieros y no economistas solamente el 20% ocupan un puesto directivo. ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado directivo elegido al azar sea ingeniero?

23. Un empresario tiene dos negocios en funcionamiento, N1 y N2. El primero produce pérdidas en el 20% de sus balances y el segundo, solo en el 4%. Suponiendo que el volumen de negocios es el mismo para N1 y N2, y que analizando un balance al azar arrojó pérdidas, ¿cuál es la probabilidad de que sea del primer negocio?

24. Una urna contiene 5 bolas rojas y 3 blancas. Se selecciona una bola al azar, se descarta, y se colocan 2 bolas del otro color en la urna. Luego, se saca una segunda bola. Determina la probabilidad de que:

a) La segunda sea roja

b) La primera sea roja si la segunda lo es

25. En una casa hay tres llaveros: A, B y C. El primero tiene 5 llaves, el segundo 7 y el tercero con 8, y solo una llave de cada llavero abre la puerta del trastero. Se escoge al azar un llavero y, de él, una llave para intentar abrir la puerta.

a) ¿Cuál será la probabilidad de que se acierte con la llave?

b) ¿Cuál será la probabilidad de que el llavero escogido sea el C y la llave no abra?

c) Y si la llave escogida es la correcta, ¿cuál será la probabilidad de que pertenezca al llavero A?

26. En un cierto edificio se usan dos ascensores. El 45% de los inquilinos usa el primero y el resto usa el segundo. El porcentaje de fallos del primero es del 5%, mientras que el del segundo es del 8%. Si un cierto día un inquilino se queda encerrado en un ascensor, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido en el primer ascensor?

27. Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = 0{,}40$; $P(B) = 0{,}3$ y $P(A \cap B) = 0{,}2$. Calcula razonadamente:

a) $P(A \cup B)$

b) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$

c) $P(A/B)$

d) $P(\overline{A} \cap B)$

28. Sean A y B dos sucesos de un espacio de probabilidad tales que:

$$P(A) = \frac{1}{2} \qquad P(A \cup B) = \frac{3}{4} \qquad P(\overline{B}) = \frac{5}{8}$$

Calcula:

a) $P(A \cap B)$

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

c) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$

d) $P(\overline{A \cap B})$

29. Determina si son dependientes o independientes, compatibles o incompatibles, los sucesos A y B que cumplen las condiciones siguientes:

a) $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$

b) $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$

20. Queda:

a) $P(\text{defectuoso y por A}) = \frac{50}{100}\cdot\frac{1}{2} = 0,25$

b) $P(\text{defectuoso}) = \frac{50}{100}\cdot\frac{1}{2} + \frac{25}{100}\cdot\frac{1}{4} + \frac{25}{100}\cdot\frac{1}{6} = \frac{17}{48}$

c) $P\left(C/\text{no defectuoso}\right) = \dfrac{\frac{25}{100}\cdot\frac{5}{6}}{\frac{25}{100}\cdot\frac{5}{6} + \frac{50}{100}\cdot\frac{1}{2} + \frac{25}{100}\cdot\frac{3}{4}} = \frac{10}{31}$

21. Las configuraciones de las urnas son:

1ª urna: Dos bolas blancas con probabilidad de salir dos caras.
2ª urna: Una bola blanca y otra negra con probabilidad de salir cara y cruz.
3ª urna: Dos bolas negras con probabilidad de salir dos cruces.

$$P\left(1^{a}\text{ urna}/\text{blanca}\right) = \dfrac{\frac{1}{4}\cdot 1}{\frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot 0} = \frac{1}{2} = 0,5$$

22. Queda:

	Ingeniero	Economista	Otros	Total
Directivo	15	10	12	37
No directivo	5	10	48	63
Total	20	20	60	100

$$P\left(\text{ingeniero}/\text{directivo}\right) = \frac{15}{37} = 0,41$$

23. Queda:

$$P\left(N_1/\text{pérdidas}\right) = \frac{0,20\cdot 0,5}{0,20\cdot 0,5 + 0,04\cdot 0,5} = \frac{5}{6}$$

24. Queda:

a) $P(2^a \text{ roja}) = \frac{5}{8}\cdot\frac{4}{9} + \frac{3}{8}\cdot\frac{7}{9} = \frac{41}{72}$

b) $P\left(1^a \text{ roja} / 2^a \text{ roja}\right) = \dfrac{\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{9}}{\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{9} + \frac{3}{8}\cdot\frac{7}{9}} = \frac{20}{41}$

25. Queda:

a) $P(\text{acierte llave}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} = 0{,}16$

b) $P(C \text{ y no abra}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{7}{8} = \frac{7}{24} = 0{,}29$

c) $P\left(A / \text{llave abre}\right) = \dfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}} = \frac{56}{131} = 0{,}43$

26. Queda:

$$P\left(1^o / \text{fallo}\right) = \dfrac{\frac{45}{100}\cdot\frac{5}{100}}{\frac{45}{100}\cdot\frac{5}{100} + \frac{55}{100}\cdot\frac{8}{100}} = \frac{225}{665} = 0{,}34$$

27. Queda:

a) $P(A \cup B) = 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}2 = 0{,}5$

b) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

c) $P\left(A / B\right) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}2}{0{,}3} = \frac{2}{3}$

d) $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}3 - 0{,}2 = 0{,}1$

28. Queda:

a) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} - \frac{3}{4} = \frac{1}{8}$

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = \frac{1}{4}$

c) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = \frac{7}{8}$

d) $P(\overline{A \cap B}) = \frac{7}{8}$

29. Queda:

a) $P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{5}{8} = \frac{1}{8} \Rightarrow \begin{cases} A \text{ y } B \text{ son compatibles pues } P(A \cap B) \neq 0 \\ A \text{ y } B \text{ son independientes pues } P(A \cap B) = P(A)\cdot P(B) \end{cases}$

b) $P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} A \text{ y } B \text{ son incompatibles pues } P(A \cap B) = 0 \\ A \text{ y } B \text{ son dependientes pues } P(A \cap B) \neq P(A)\cdot P(B) \end{cases}$

Unidad 17 – Distribuciones de probabilidad. Distribuciones binomial y normal

PÁGINA 389

cuestiones iniciales

1. En las familias formadas por cuatro hijos la probabilidad de que estos sean dos varones y dos hembras es de:

   a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{8}$ d) No puede saberse

2. Una empresa fabrica chips para ordenadores personales. Tras varios controles de calidad descubre que el 5% de los que fabrica son defectuosos. El último año fabricó 80 000. ¿Cuántos debe esperar que resulten defectuosos?

3. Una fábrica de galletas las empaqueta en cajas de cien unidades cada una. Para probar la eficacia de la producción se han analizado 80 cajas, comprobando las galletas defectuosas que contiene cada una y se han obtenido los resultados de la tabla:

Nº de galletas defectuosas	0	1	2	3	4	5	6
Número de cajas	40	15	10	9	3	2	1

Calcula, para esta distribución, la media aritmética (μ), la desviación típica (σ) y el número de cajas que están en los intervalos $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$, $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$, $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$.

SOLUCIONES

1. La probabilidad es: $P(2V \ \text{ y } \ 2M) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$

2. Sabemos que $\text{P(Defectuoso)} = 0{,}05$.

   El número de chips que cabe esperar defectuosos es: 80 000 · 0,05 $=$ 4 000 chips.

3. Sabemos que: $\mu = 1{,}125$; $\sigma = 1{,}452$.

   En $(\mu - \sigma, \mu + \sigma) = (-0{,}327; 2{,}577)$ hay 65 cajas defectuosas, es decir, el 81,25%.

   En $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma) = (-1{,}779; 4{,}029)$ hay 77 cajas defectuosas, es decir, el 96,25%.

   En $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma) = (-3{,}231; 5{,}481)$ hay 79 cajas defectuosas, es decir, el 98,75%.

   Esta distribución no tiene un comportamiento ¨normal¨.

PÁGINA 407

ACTIVIDADES

■ Utilizando el método de inducción, intenta resolver los siguientes problemas:

1. **Suma de pares.** Prueba que la suma de los n primeros números pares es $(n^2 + n)$:

$$2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n = n^2 + n$$

2. **Suma de múltiplos.** Demuestra la siguiente igualdad:

$$3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

3. **Múltiplos de 8.** Demuestra que $\forall n \in \mathbb{N}$ se verifica:

$$(2n-1)^2 - 1 = \dot{8}$$

4. **Factoriales.** Dada la sucesión $a_1 = 1 \cdot 1!$; $a_2 = 2 \cdot 2!$; $a_3 = 3 \cdot 3!$; … demuestra que:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = (n+1)! - 1!$$

SOLUCIONES

1. La demostración queda:

Veamos que para $n = 1$ se cumple: $2 = 1^2 + 1$

Supongamos que se cumple para $n = p \Rightarrow 2 + 4 + 6 + \dots + 2p = p^2 + p$

Veamos qué pasa para $n = p + 1$:

$$\Rightarrow \quad 2 + 4 + 6 + \dots + 2p + 2(p+1) = (p^2 + p) + 2(p+1) = p^2 + 3p + 2 = (p+1)^2 + (p+1)$$

Luego queda probado que la igualdad es cierta para todo número natural n.

2. La demostración queda:

Siguiendo el método de la inducción del mismo modo que en el problema anterior obtenemos:

• Para $n = 1 \Rightarrow 3^0 + 3^1 = \frac{3^2 - 1}{2} = 4$ por lo que se cumple la igualdad.

• Supongamos que se cumple para $n = p$: $3^0 + 3^1 + \dots + 3^p = \frac{3^{p+1} - 1}{2}$

• Veamos que para $n = p + 1$: $3^0 + 3^1 + \dots + 3^p + 3^{p+1} = \frac{3^{p+1} - 1}{2} + 3^{p+1} = \frac{3^{p+1} - 1}{2}$

Luego la igualdad es cierta $\forall n \in \mathbb{N}$.

3. La demostración queda:

Utilizando el proceso de inducción obtenemos :

• Para $n=1 \Rightarrow (2-1)^2-1=0=\dot{8}$ por lo que se cumple la igualdad.

• Para $n=2 \Rightarrow (4-1)^2-1=8=\dot{8}$ por lo que se cumple la igualdad.

• Supongamos que se cumple para $n=p$: $(2p-1)^2-1=\dot{8}$

• Veamos que para $n=p+1$: $\left[(2p+1)^2-1\right]^2-1=(2p+1)^2-1=\left[(2p-1)+2\right]^2-1=$

$$=(2p-1)^2+4(2p-1)+4-1=\left[(2p-1)-1\right]+8p=\dot{8}+\dot{8}=\dot{8}$$

Luego la igualdad es cierta $\forall n \in \mathbb{N}$.

4. La demostración queda:

Utilizando el proceso de inducción obtenemos :

• Para $n=1 \Rightarrow S_1=a_1=(1+1)!-1!=2!-1!=2\cdot 1!-1!=1!(2-1)=1!\cdot 1=a_1$

Por lo que se cumple la igualdad.

• Supongamos que se cumple para $n=p$: $S_p=a_1+a_2+...+a_p=(p+1)!-1!$

• Veamos que para $n=p+1$: $S_{p+1}=\left[a_1+a_2+...+a_p\right]+a_{p+1}=(p+1)!-1!+(p+1)\cdot(p+1)!=$

$$=(1+p+1)\cdot(p+1)!-1!=(p+2)!-1!$$

Luego la igualdad es cierta $\forall n \in \mathbb{N}$.

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. En el lanzamiento de dos dados consideramos la variable aleatoria que asocia a cada resultado el mayor de los números obtenidos.

   a) Halla la función de probabilidad asociada a dicha variable aleatoria.

   b) Realiza el gráfico correspondiente.

   c) Calcula la media o valor esperado y la desviación típica.

2. Responde a las cuestiones propuestas en la actividad anterior; ahora se considera la variable aleatoria diferencia de puntos de los dos dados, en valor absoluto.

3. Lanzamos una moneda cuatro veces. Sea X el número de caras consecutivas. Halla la función de probabilidad, la media y la desviación típica.

4. Tomamos al azar una ficha del dominó y consideramos la variable aleatoria que describa la suma de puntos de la ficha. Calcula la función de probabilidad, su esperanza y su desviación típica.

5. En una urna hay 3 bolas blancas y 7 negras. Se extraen, con devolución, 3 bolas y se observa cuántas son de color blanco. Calcula:

   a) La función de probabilidad, la media y la desviación típica b) $P(X \leq 2)$ c) $P(X > 1)$

6. Una variable aleatoria X sigue la ley binomial de tipo $B\,(5;\,0{,}3)$. Determina:

   a) Su función de probabilidad

   b) La media y la desviación típica

   c) Las probabilidades $P(X = 2)$, $P(X = 3)$, $P(X < 2)$, $P(X \geq 3)$

7. Con una moneda trucada, la probabilidad de sacar cara es cuatro veces la de sacar cruz. Se lanza seis veces la moneda. Calcula las siguientes probabilidades:

   a) Obtener dos veces cruz

   b) Obtener, a lo sumo, dos veces cruz

8. La probabilidad de que un estudiante de un determinado centro de enseñanza obtenga el título de Bachillerato es de 0,3. Calcula la probabilidad de que, en un grupo de 7 estudiantes matriculados en Primer curso:

   a) Los 7 finalicen el Bachillerato

   b) Al menos dos acaben el Bachillerato

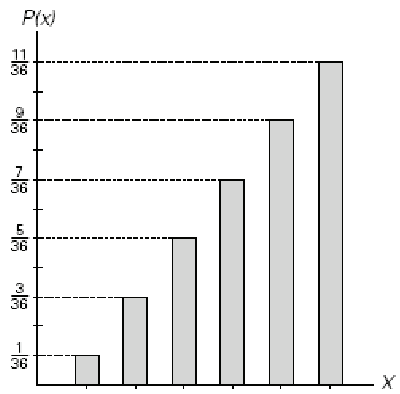
9. La probabilidad de que un alumno de Primero de Bachillerato estudie Matemáticas I es de 0,4. Calcula la probabilidad de que en un grupo de 10 alumnos elegidos al azar haya exactamente 7 que no estudien Matemáticas I.

1. La solución queda:

a) La función de probabilidad es:

Mayor nº	1	2	3	4	5	6
Probabilidad	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

b) El gráfico queda:



c) Los valores son:

$$\mu = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{9}{36} + 6 \cdot \frac{11}{36} = 4{,}47$$

$$\sigma = \sqrt{1^2 \cdot \frac{1}{36} + 2^2 \cdot \frac{3}{36} + 3^2 \cdot \frac{5}{36} + 4^2 \cdot \frac{7}{36} + 5^2 \cdot \frac{9}{36} + 6^2 \cdot \frac{11}{36} - 4{,}47^2} = 1{,}41$$

2. La solución queda:

a) La función de probabilidad es:

Mayor nº	0	1	2	3	4	5
Probabilidad	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

b) El gráfico queda de forma análoga al ejercicio anterior.

c) Los valores son:

$$\mu = 0\cdot\frac{6}{36}+1\cdot\frac{10}{36}+2\cdot\frac{8}{36}+3\cdot\frac{6}{36}+4\cdot\frac{4}{36}+5\cdot\frac{2}{36}=1{,}94$$

$$\sigma=\sqrt{0^2\cdot\frac{6}{36}+1^2\cdot\frac{10}{36}+2^2\cdot\frac{8}{36}+3^2\cdot\frac{6}{36}+4^2\cdot\frac{4}{36}+5^2\cdot\frac{2}{36}-1{,}94^2}=1{,}44$$

3. Queda:

La función de probabilidad es:

X	0	1	2	3	4
$P(X)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

Y los valores de media y desviación típica:

$$\mu = 0\cdot\frac{1}{16}+1\cdot\frac{7}{16}+2\cdot\frac{5}{16}+3\cdot\frac{2}{16}+4\cdot\frac{1}{16}=1{,}6875$$

$$\sigma=\sqrt{0^2\cdot\frac{1}{16}+1^2\cdot\frac{7}{16}+2^2\cdot\frac{5}{16}+3^2\cdot\frac{2}{16}+4^2\cdot\frac{1}{16}-1{,}6875^2}=0{,}98$$

4. La función de probabilidad es:

Suma puntos (X)	0	1	2	3	4	5	6
Probabilidad P_i	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{4}{28}$

Suma puntos (X)	7	8	9	10	11	12
Probabilidad P_i	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$

Sus valores de media y desviación típica: $\mu=6;\ \sigma=3.$

5. La solución en cada caso queda:

a) La función de probabilidad es:

Color Blanco	0	1	2	3
Probabilidad	0,343	0,441	0,189	0,027

b) $P(X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0{,}343+0{,}441+0{,}189=0{,}973$

c) $P(X>1)=P(X=2)+P(X=3)=0{,}189+0{,}027=0{,}216$

6. La solución queda:

a) La función de probabilidad es:

X	0	1	2	3	4	5
P_i	0,1681	0,3602	0,3087	0,1323	0,0284	0,0024

b) La media y la desviación típica son: $\mu = n \cdot p = 5 \cdot 0,3 = 1,5$; $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{5 \cdot 0,3 \cdot 0,7} = 1,025$.

$P(X=2) = 0,3087$

$P(X=3) = 0,1323$

$P(X<2) = P(X=0) + P(X=1) = 0,1681 + 0,3602 = 0,5283$

$P(X \geq 3) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = 0,1631$

7. Es una distribución binomial $B\left(6; 4/5\right)$, con: $P\,(\text{cara}) = \frac{4}{5}$ y $P\,(\text{cruz}) = \frac{1}{5}$.

a) $P(X = 4\,\text{caras}) = \binom{6}{4} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 0,2458$

b) $P(X \geq 4) = P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) =$

$$= \binom{6}{4} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \binom{6}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^5 \cdot \frac{1}{5} + \binom{6}{6} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^6 = 0,2458$$

8. Es una distribución binomial $B(7; 0,3)$.

a) $P(X = 7) = \binom{7}{7} \cdot (0,3)^7 = 0,000227$

b) $P(X \geq 2) = 1 - P(X<2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - \binom{7}{0} \cdot (0,7)^7 - \binom{7}{1} \cdot (0,7)^6 \cdot (0,3)^1 = 0,6706$

9. Es una distribución binomial $B(10; 0,4)$.

La probabilidad pedida es: $P(X = 3) = \binom{10}{3} \cdot (0,4)^3 \cdot (0,6)^7 = 0,2150$

PÁGINA 411

■ 10. La probabilidad de que salga cara en moneda trucada es 0,45. Se lanza una moneda un total de 7 veces. Calcula la probabilidad de que:

a) salgan exactamente 3 caras b) salgan, al menos, 3 caras c) salgan, a lo sumo, 3 caras

■ 11. En un examen tipo test hay 10 preguntas, con 4 posibles respuestas a elegir en cada una. Si una persona desconoce completamente la materia y responde al azar.

a) ¿Cuántas respuestas acertará por término medio?

b) ¿Cuánto vale la desviación típica?

c) ¿Qué probabilidad tiene de acertar, cinco preguntas al menos y, por tanto, aprobar?

■ 12. Supón que la probabilidad de que una persona sea mujer es $\frac{1}{2}$. Se eligen al azar 100 familias con cinco hijos cada una. ¿En cuántas es de esperar que haya 2 mujeres y 3 hombres?

■ 13. La probabilidad de nacimientos de niños varones en España es de 51,7%. Halla la probabilidad de que una familia de 5 hijos tenga:

a) Por lo menos, una niña b) Por lo menos, un niño

■ 14. Comprueba, ayudándote de su representación gráfica, que las funciones siguientes son funciones de densidad de ciertas variables aleatorias continuas:

I) $f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{para otros } x \end{cases}$ II) $f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si} \quad 0 < x < 3 \\ 0 & \text{para otros } x \end{cases}$

Para las funciones anteriores, calcula las siguientes probabilidades:

a) $P(0{,}5 \le X \le 1{,}5)$ b) $P(X \le 1)$ c) $P(X \ge 0{,}4)$ d) $P(X = 0{,}65)$

■ 15. Se ha hecho un estudio sobre una especie vegetal en tres zonas diferentes, A, B y C, resultando que se ajustan a curvas normales $N(5;\,3{,}5)$, $N(5;\,1{,}5)$ y $N(7;\,1{,}5)$, respectivamente:

a) Elige, la gráfica más adecuada a cada caso.

b) Haz un breve resumen, comparando las semejanzas y las diferencias que hay en la altura que alcanza el vegetal en las tres zonas estudiadas.

■ 16. En una distribución normal $N(0,\,1)$, calcula:

a) $P(Z \le 1{,}45)$ c) $P(Z \ge 0{,}25)$ e) $P(Z \le -1{,}45)$ g) $P(0{,}35 \le Z \le 1{,}5)$

b) $P(-1{,}35 \le Z \le 0{,}25)$ d) $P(Z \ge -0{,}84)$ f) $P(-1{,}45 \le Z \le -0{,}15)$ h) $P(-2{,}25 \le Z \le 2)$

■ 17. En una distribución normal $N(0,\,1)$, calcula el valor de k, sabiendo que $k \ge 0$, en los siguientes casos:

a) $P(Z \ge k) = 0{,}7967$ b) $P(Z \ge k) = 0{,}1075$ c) $P(Z \ge k) = 0{,}4236$

■ 18. En una distribución normal $N(5,\,2)$, calcula:

a) $P(X \le 6)$ b) $P(X \ge 4{,}5)$ c) $P(X \le 7{,}2)$ d) $P(3 \le X \le 6)$ e) $P(4 \ge X \ge 6)$

10. Es una distribución binomial $B(7;0,45)$.

a) $P(X=3)=\binom{7}{3}\cdot(0,45)^3\cdot(0,55)^4=0,2918$

b) $P(X\geq 3)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)=$
$=1-\binom{7}{0}\cdot(0,55)^7-\binom{7}{1}\cdot(0,45)^1\cdot(0,55)^6-\binom{7}{2}\cdot(0,45)^2\cdot(0,55)^5=0,6836$

c) $P(X\leq 3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=$
$=\binom{7}{0}\cdot(0,55)^7-\binom{7}{1}\cdot(0,45)^1\cdot(0,55)^6+\binom{7}{2}\cdot(0,45)^2\cdot(0,55)^5+\binom{7}{3}\cdot(0,45)^3\cdot(0,55)^4=0,6083$

11. La solución queda:

a) Es una binomial $B\left(10;\frac{1}{4}\right)$. Acertará, por término medio, $\mu=10\cdot\frac{1}{4}=2,5$ preguntas.

b) La desviación típica es: $\sigma=\sqrt{10\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}=1,37$

c) La probabilidad pedida es:

$$P(X\geq 5)=P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)=0,076$$

12. Es una distribución binomial $B\left(5;\frac{1}{2}\right)$.

La probabilidad de que una familia formada por 5 hijos sean 2 mujeres y 3 hombres es:

$$\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=0,3125$$

Entre 100 familias cabe esperar que haya: $100\cdot 0,3125\cong 31$ familias con 2 hijas y 3 hijos.

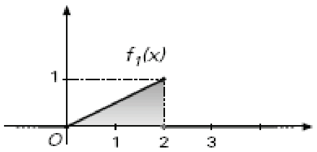
13. Es una distribución binomial $B(5;0,517)$.

a) La probabilidad es: $P(\text{al menos 1 niña})=1-P(X=5\text{ varones})=1-\binom{5}{5}\cdot(0,517)^5=0,9631$.

b) La probabilidad es: $P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\binom{5}{0}\cdot(0,483)^5=0,9737$

14. La solución queda:

I) La representación es:



$$\left.\begin{array}{l}\bullet f_1(x)\geq 0\ \forall x\\ \bullet \text{Área recinto}=\dfrac{2\cdot 1}{2}=1\end{array}\right\}\Rightarrow \text{Luego es una función de densidad.}$$

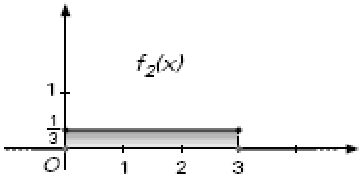
a) $P(0,5\leq x\leq 1,5)=\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}{2}\cdot 1=0,5$

b) $P(x\leq 1)=\dfrac{1\cdot\frac{1}{2}}{2}=0,25$

c) $P(x\geq 0,4)=\dfrac{0,2+1}{2}\cdot 1,6=0,96$

d) $P(x=0,65)=0$

II) La representación es:



$$\left.\begin{array}{l}\bullet f_2(x)\geq 0\ \forall x\\ \bullet \text{Área recinto}=\dfrac{3\cdot 1}{3}=1\end{array}\right\}\Rightarrow \text{Luego es una función de densidad.}$$

a) $P(0,5\leq x\leq 1,5)=1\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$

b) $P(x\leq 1)=1\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$

c) $P(x\geq 0,4)=2,6\cdot\dfrac{1}{3}=0,87$

d) $P(x=0,65)=0$

15. La solución es:

La gráfica 1 se corresponde con la distribución $N(7;1,5)$.
La gráfica 2 se corresponde con la distribución $N(5;1,5)$.
La gráfica 3 se corresponde con la distribución $N(5;3,5)$.

a) Las plantas más altas corresponden a la distribución $N(7;1,5)$. En las otras distribuciones, la media de las alturas coincide, y en $N(5;1,5)$ están más agrupadas, respecto a la media, que en $N(5;3,5)$.

16. Manejando la tabla de la distribución normal, hallamos cada caso:

a) $P(Z \leq 1,45) = 0,9265$

b) $P(Z \geq 1,45) = 1 - P(Z < 0,25) = 1 - 0,5987 = 0,4013$

c) $P(Z \leq -1,45) = 1 - P(Z \leq 1,45) = 1 - 0,9265 = 0,0735$

d) $P(0,35 \leq Z \leq 1,5) = P(Z \leq 1,5) - P(Z \leq 0,35) = 0,9332 - 0,6368 = 0,2964$

e) $P(-1,35 \leq Z \leq 0,25) = P(Z \leq 0,25) - P(Z \leq -1,35) = P(Z \leq 0,25) - \left[1 - P(Z \leq 1,35)\right] = 0,5102$

f) $P(Z \geq -0,84) = P(Z \leq 0,84) = 0,7995$

g) $P(-1,45 \leq Z \leq -0,15) = P(0,15 \leq Z \leq 1,45) = P(Z \leq 1,45) - P(Z \leq 0,15) = 0,3669$

h) $P(-2,25 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq -2,25) = P(Z \leq 2) - \left[1 - P(Z \leq 2,25)\right] = 0,965$

17. En las tablas vemos que:

a) $P(Z \geq K) = 0,7967 \quad \Rightarrow \quad K = -0,83.$

b) $P(Z \leq K) = 1 - P(Z > K) = 1 - 0,1075 = 0,8925 \quad \Rightarrow \quad K = 1,24.$

c) $P(Z \leq K) = 1 - P(Z > K) = 1 - 0,1075 = 0,4236 \quad \Rightarrow \quad K = 1,195.$

18. Tipificamos la variable X, convirtiéndola en N(0,1) y, posteriormente, consultamos la tabla:

a) $P(X \leq 6) = P\left(Z = \dfrac{x-5}{2} \leq \dfrac{6-5}{2}\right) = P(Z \leq 0,5) = 0,6915$

b) $P(X \geq 4,5) = P\left(Z = \dfrac{x-5}{2} \geq \dfrac{4,5-5}{2}\right) = P(Z \geq -0,25) = P(Z \leq 0,25) = 0,5987$

c) $P(X \leq 7,2) = P\left(Z = \dfrac{x-5}{2} \leq \dfrac{7,2-5}{2}\right) = P(Z \leq 1,1) = 0,8643$

d) $P(3 \leq X \leq 6) = P\left(\dfrac{3-5}{2} \leq \dfrac{x-5}{2} \leq \dfrac{6-5}{2}\right) = P(-1 \leq Z \leq 0,5) = 0,5328$

e) $P(4 \geq X \geq 6)$. Imposible.

PÁGINA 412

ACTIVIDADES FINALES

19. En una distribución normal $N(5, 2)$, calcula el valor de k, para que se cumplan las siguientes igualdades:

a) $P(X \le k) = 0{,}8106$ b) $P(X \ge k) = 0{,}4801$ c) $P(5 - k \le X \le 5 + k) = 0{,}5934$

20. Una compañía de autobuses realiza un estudio sobre el número de veces que, semanalmente, utilizan el autobús los usuarios. Se sabe que los datos se distribuyen $N(10, 3)$. Calcula la probabilidad de que un usuario utilice el autobús:

a) Más de 11 veces b) Menos de 8 veces

21. La dirección de una clínica ha observado que la estancia de los enfermos sigue una distribución normal de media 9 días y desviación típica 3. Calcula la probabilidad de que la estancia de un enfermo:

a) Sea superior a 8 días b) Sea superior a 5 días c) Esté comprendida entre 11 y 13 días

22. El tiempo necesario para que una ambulancia llegue a un centro sanitario se distribuye según una variable normal de media 17 minutos y desviación típica 3 minutos.

a) Calcula la probabilidad de que el tiempo de llegada esté comprendido entre 13 y 21 minutos.

b) ¿Para qué valor de t la probabilidad de que la ambulancia emplee más de t minutos en llegar es del 5%?

23. Una máquina realiza piezas de precisión con un diámetro medio de 8 mm y una desviación típica de 0,5 mm. Suponiendo que la distribución es normal, calcula la probabilidad de que una pieza tomada al azar tenga un diámetro:

a) Mayor que 8,5 mm b) Menor que 7,5 mm c) Comprendido entre 7 y 9 mm

24. En un centro hay 500 alumnos cuyas estaturas se distribuyen según la curva normal de media 170 cm y desviación típica 8 cm:

a) ¿Cuántos alumnos tienen su estatura comprendida en el intervalo [162, 178]?

b) ¿Cuántos medirán más de 186 cm?

25. La calificación media de cierto examen ha sido de 5,5 con una desviación típica de 1,5, y el conjunto de notas se ajusta a una distribución normal. El profesor quiere calificar con sobresaliente al 10% de la clase, y con notable al 30%. ¿A partir de qué nota se conseguirá el sobresaliente y de cuál el notable?

26. Se lanza un dado 360 veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 menos de 55 veces?

27. Un jugador de ajedrez gana 9 de cada 10 partidas que disputa. Si juega 50 partidas, ¿cuál es la probabilidad de que gane 40?

28. Se lanza una moneda 100 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de caras que se obtenga esté comprendido entre 45 y 55?

29. Un examen tipo test tiene 100 preguntas y cada pregunta 4 respuestas diferentes, de las que sólo una es correcta. Calcula:

a) La probabilidad de que un estudiante que responde al azar acierte más de 20 preguntas.

b) La probabilidad de que entre las 20 primeras preguntas acierte, a lo sumo, 4.

19. Tipificamos la variable y consultamos la tabla.

$$\text{a)}\, k = 6{,}76 \qquad b)\, k = 5{,}1 \qquad \text{c)}\, k = 1{,}66$$

20. La solución queda:

$$\text{a)}\, P(X \geq 11) = P\left(\frac{x-10}{3} \geq \frac{11-10}{3}\right) = P\left(Z \geq \frac{1}{3}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{1}{3}\right) = 1 - 0{,}6293 = 0{,}3707$$

$$\text{b)}\, P(X \leq 8) = P\left(\frac{x-10}{3} \leq \frac{8-5}{3}\right) = P\left(Z \leq -\frac{2}{3}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{2}{3}\right) = 0{,}2546$$

21. La solución queda:

$$\text{a)}\, P(X \geq 8) = P\left(\frac{x-9}{3} \geq \frac{11-9}{3}\right) = P\left(Z \geq -\frac{1}{3}\right) = P\left(Z \leq \frac{1}{3}\right) = 0{,}6293$$

$$\text{b)}\, P(X \geq 5) = P\left(\frac{x-9}{3} \geq \frac{5-9}{3}\right) = P\left(Z \geq -\frac{4}{3}\right) = P\left(Z \leq \frac{4}{3}\right) = 0{,}9082$$

$$\text{c)}\, P(11 \leq X \leq 13) = P\left(\frac{11-9}{3} \leq Z \leq \frac{13-9}{3}\right) = P\left(\frac{2}{3} \leq Z \leq \frac{4}{3}\right) = P\left(Z \leq \frac{4}{3}\right) - P\left(Z \leq \frac{2}{3}\right) = 0{,}1628$$

22. La solución es:

$$\text{a)}\, P(11 \leq t \leq 21) = P\left(\frac{13-17}{3} \leq Z \leq \frac{21-17}{3}\right) = P\left(-1{,}33 \leq Z \leq 1{,}33\right) = 2P\left(Z \leq 1{,}33\right) - 1 = 0{,}8164$$

$$\text{b)}\, P(X \leq t) = 0{,}95 \;\Rightarrow\; P\left(Z \leq \frac{t-17}{3}\right) = 0{,}95 \;\Rightarrow\; \frac{t-17}{3} = 1{,}645 \;\Rightarrow\; t = 21{,}935 \approx 22 \text{ minutos.}$$

23. La solución queda:

$$\text{a)}\, P(X \geq 8{,}5) = P\left(Z \geq 1\right) = 1 - P\left(Z \leq 1\right) = 0{,}1587$$

$$\text{b)}\, P(X \leq 7{,}5) = P\left(Z \leq -1\right) = 1 - P\left(Z \leq 1\right) = 0{,}1587$$

$$\text{c)}\, P(7 \leq X \leq 9) = P\left(-2 \leq Z \leq 2\right) = 2P\left(Z \leq 2\right) - 1 = 0{,}9544$$

24. La solución queda:

a) $P(162 \leq X \leq 178) = P\left(-1 \leq Z \leq 1\right) = 2P\left(Z \leq 1\right) - 1 = 0,6826$

Por tanto el número de alumnos de estatura entre 162 y 178 cm es de $500 \cdot 0,6826 = 341,3$.

b) $P(X \geq 186) = P\left(Z \geq 2\right) = 1 - P\left(Z \leq 2\right) = 0,0228$

Por tanto el número de alumnos de estatura mayor 186 cm es de $500 \cdot 0,0228 = 11,14$.

25. Llamamos k a la nota mínima a partir de la cual se conseguirá el sobresaliente.

Debe cumplirse:

$$P\left(\frac{x-5,5}{1,5} \geq \frac{k-5,5}{1,5}\right) = 0,9 \Rightarrow \frac{k-5,5}{1,5} = 1,282 \Rightarrow k = 7,423$$

Para el notable ocurre de igual modo:

$$P\left(\frac{x-5,5}{1,5} \geq \frac{k-5,5}{1,5}\right) = 0,7 \Rightarrow \frac{k-5,5}{1,5} = 0,525 \Rightarrow k = 6,2875$$

26. Es una distribución binomial $B\left(360, \frac{1}{6}\right)$ y la aproximaremos con una distribución normal.

Quedaría: $\mu = 360 \cdot \frac{1}{6} = 60$ y $\sigma = \sqrt{360 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 7,07$.

La probabilidad es:

$$P(X \leq 55) = P(X' \leq 55,5) = P\left(\frac{X'-60}{7,07} \leq \frac{55,5-60}{7,07}\right) = P\left(Z \leq -0,64\right) = 1 - P\left(Z \leq 0,64\right) = 0,2611$$

27. Es una distribución binomial $B\left(50; 0,9\right)$ y la aproximaremos con una distribución normal.

Quedaría: $\mu = 50 \cdot 0,9 = 45$ y $\sigma = \sqrt{50 \cdot 0,9 \cdot 0,1} = 1,12$.

La probabilidad pedida con la corrección de Yates es:

$$P(X = 40) = P(39,5 \leq X' \leq 40,5) = P\left(\frac{39,5-45}{2,12} \leq Z \leq \frac{40,5-45}{2,12}\right) = P\left(-2,59 \leq Z \leq -2,12\right) =$$

$$= 1 - P\left(2,12 \leq Z \leq 2,59\right) = P\left(Z \leq 2,59\right) - P\left(Z \leq 2,12\right) = 0,122$$

28. Es una distribución binomial $B(100;0,5)$ y la aproximaremos con una distribución normal.

Quedaría: $\mu = 100 \cdot 0,5 = 50$ y $\sigma = \sqrt{100 \cdot 0,5 \cdot 0,5} = 5$.

La probabilidad pedida con la corrección de Yates es:

$$P(45 \le X \le 55) = P(44,5 \le X' \le 55,5) = P\left(\frac{45,5-50}{5} \le \frac{X'-50}{5} \le \frac{55,5-50}{5}\right) = P(-1,1 \le Z \le 1,1) =$$
$$= P(Z \le 1,1) - \left[1 - P(Z \le 1,1)\right] = 0,7286$$

29. Es una distribución binomial $B(100;0,25)$ y la aproximaremos con una distribución normal $N(25;4,33)$.

a) La probabilidad pedida es:

$$P(X \ge 20) = P(X' \ge 19,5) = P\left(Z \ge \frac{19,5-25}{4,33}\right) = P(Z \ge -1,27) = P(Z \le 1,27) = 0,8980$$

b) Es una binomial $B(20;0,25)$ que aproximamos a una normal $N(5;1,94)$.

La probabilidad pedida con la corrección de Yates, como en el apartado anterior, es:

$$P(X \le 4) = P(X' \le 4,5) = P\left(Z \le \frac{4,5-5}{1,94}\right) = P(Z \le -0,26) = 1 - P(Z \le 0,26) = 0,3974$$